

Quaternionic Manifolds

大阪大学 理学部 新田貴士

Abstract. 四元数 hyperbolic space $\mathbb{H}^n \mathbb{H}$ と 四元数
射影空間 $\mathbb{P}^n \mathbb{H}$ 亦は $\mathbb{H}^n$ 上の quaternionic
structure 全体、空間との関係を調べる。

序, 以下

$$G := Sp(1, n) = \left\{ A \in SL(n+1, \mathbb{H}) \mid {}^t \bar{A} \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とする。この話の出发点は 荒川氏の次の論文である。

Tsuneo Arakawa "On certain automorphic forms of $Sp(1, n)$."
彼はこの論文の中で次の事を論じている。

dg を $G = Sp(1, n)$ の Haar measure とし, $\Gamma \subset G$
を G の lattice として $\int_{\Gamma \backslash G} dg < +\infty$ なるものとする。
更に $\tilde{P}$ を $Sp(1)$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な表現
$$\tilde{P}: Sp(1) \xrightarrow{\sim} SU(2) \text{ on } \mathbb{C}^2$$

とし, $\bar{P}^\nu$ を $\bar{P}$ の symmetric ν -tensor 表現

$$\bar{P}^\nu: Sp(1) \curvearrowright \text{ on } S^\nu(\mathbb{C}^2),$$

where S^ν : symmetric ν -tensor on $\mathbb{C}$.

とする。それを自然に $K := Sp(1) \times Sp(n)$ に

引き上げたものを P^ν と書く。つまり $Sp(1)$ -成分は

$\bar{P}^\nu$ で $Sp(n)$ の方は止めておく。 Ω を G 上の

Cassimir operator とすると $\lambda: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ が決まり,

$$A_0(P \backslash G, \nu) := \{ f: G \rightarrow S^\nu(\mathbb{C}^2) \mid \begin{array}{l} \textcircled{1} f(g) \text{ is ldd. on } G, \\ \textcircled{2} f(ygk) = P_\nu(k)^{-1} f(g) \\ \text{for } y \in P, k \in K, g \in G, \\ \textcircled{3} \Omega f = \lambda(1 + \frac{\nu}{2}) f \end{array} \}$$

$$\textcircled{2} f(ygk) = P_\nu(k)^{-1} f(g)$$

for $y \in P, k \in K, g \in G,$

$$\textcircled{3} \Omega f = \lambda(1 + \frac{\nu}{2}) f$$

の次元を Trace formula という積分表示を用いて調べられる。

上の $A_0(P \backslash G, \nu)$ は幾何学的には次の空間と同値である:
とき 満洲丸と共に調べた。

$$H^\nu \text{ を } G/K \text{ 上の vector 束で } G \times_{P^\nu} S^\nu(\mathbb{C}^2)$$

とする。左から P で割ると H^ν は $P \backslash G/K = P \backslash H^\nu/H$

上の vector 束とも考えられ, その vector 束は G/K の

Lie 環の分解から決まる接続を持ち, それは H^ν 上の

Laplacian Δ を誘導する。

$$\{ \tilde{f} \in P_{\infty}(P \setminus H^n H, H^n) \mid, \quad \tilde{f}: \text{odd}, \quad \Delta \tilde{f} = M(v) \tilde{f} \}$$

但し, $M(v)$ は v のある関数である. A_0 と上の空間との対応は自然なものである.

よ: 以下考えたい問題は次である.

" $H^n H$ の $P \setminus H^n H$ は何か幾何学的意味があるか? 例えば何か幾何学的構造のモジュライ空間になっているとか."

本論,

$P^n H$ を quaternionic projective space とすると, それは $Sp(n+1) / Sp(1) \times Sp(n)$ なる対称空間の形で書けた.

$Sp(n)$ の $\mathbb{C}^{2n}$ への自然な表現を

$$P_E: Sp(n) \hookrightarrow SU(2n) \text{ on } \mathbb{C}^{2n}$$

と書き, P_E で $Sp(n+1) / Sp(1) \times id$ に $\mathbb{C}^{2n}$ をはり合せた complex vector bundle を E と書くとき, $[N_i]$

で Y は上のある種の Yang-Mills connection の

moduli space は $SL(n+1) / Sp(n+1)$ になることを

示した. 調べたい $H^n H = Sp(1, n) / Sp(1) \times Sp(n)$ は

$SL(n+1) / Sp(n+1)$ に自然に totally geodesic submfd.

として入っている. つまり $H^n H$ の各元は E 上の

Yang-Mills connection である条件を満たすものである.

γ : τ の条件を調べよう。 $[N_i]$ の $SL(n+1, \mathbb{H})/Sp(n+1)$
 と Yang-Mills connection との対応を見よう。

$A \in SL(n+1, \mathbb{H})$ に対して $P^n\mathbb{H}$ 上の quaternionic
 rank n の vector bundle E_A を

$$\begin{array}{ccc} P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} \supset E_A & \supset & (E_A)_{[h]} \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in \mathbb{H}^{n+1} \mid {}^t\bar{v} {}^t\bar{A} A h = 0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^n\mathbb{H} & \rightarrow & [h] \end{array}$$

と定義し, E_A 上の connection を $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$ の flat connection
 の制限 connection とする。特に $A = \text{id}$ の時 $E_{\text{id}} = E$
 となり E_A は E と C^∞ vector bundle として同型な τ の
 E_A の上で定義した connection を E に引き戻した
 connection を ∇_A とすると これは Yang-Mills connection
 となり, A に対し ∇_A を対応させた。つまり U を
 quaternionic universal bundle :

$$\begin{array}{ccc} P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} \supset U & \supset & (U)_{[h]} \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in \mathbb{H}^{n+1} \mid v \in h \cdot \mathbb{H}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^n\mathbb{H} & \rightarrow & [h] \end{array}$$

とすると, $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} = U \oplus E_A$ だが, $\gamma = 1$ に
 依存する connection を入れた, $\gamma = \tau$ E_A の条件から
 A を $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$ の bundle automorphism と考えたと
 $U \oplus E_A \simeq A(U) \oplus A(E_A)$ で右辺は

直交分解にたがっている。特に $A \in Sp(1, n)$ の時,

bundle automorphism A に対して $\begin{pmatrix} 1 & \\ & \vdots \\ & \end{pmatrix} = J$ となる

quaternionic Hermitian structure は 変化する。 $J =$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \vdots \\ 0 & \end{pmatrix}$ の上では $(U)_{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$ と $(E_A)_{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$ は J に対して直交している。

更に $P^n\mathbb{H}$ の tangent bundle $TP^n\mathbb{H} = U^* \otimes_{\mathbb{H}} E$ として

ある。 U には 自然な connection ∇_0 がある。 $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$

の制限として $(U, \nabla_0)^* \otimes_{\mathbb{H}} (E, \nabla_A)$ として

$TP^n\mathbb{H}$ 上の connection が決まる。

principal bundle の言葉でいうと、

$TP^n\mathbb{H}$ の frame bundle を $Sp(n+1)$ とする時、

$TP^n\mathbb{H}$ の connection は $\mathfrak{sp}(n+1)$ 上の Lie algebra

の分解を $Sp(n+1)$ として定めたものである。

vertical 方向は $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n) \hookrightarrow \mathfrak{sp}(n+1)$

の image として、horizontal 方向は それを

$\mathfrak{sp}(n+1)$ の中で直交補空間としてある。 今の時、

$(U, \nabla_0)^* \otimes (E, \nabla_A)$ とは、 standard として

$\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n) \hookrightarrow \begin{pmatrix} \mathfrak{sp}(1) & 0 \\ 0 & \mathfrak{sp}(n) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{sp}(n+1)$ となる

埋め込みを $A x^t \bar{A}$ (for $x \in \mathfrak{sp}(n+1)$) として

変化させたものに他ならない。 今の A に依存する

$\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n)$ の埋め込みを f_A と書く。

$A \in Sp(1, n)$ の時 $f_A(\mathfrak{sp}(1))$ と $f_A(\mathfrak{sp}(n))$ は

$J = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ であり、 J 直交している。この条件と
 (*) と 書くとき、 $A \in Sp(1, n)$ の時、 $(U, \nabla_U)^* \otimes (E, \nabla_A)$
 は (*) を 満たす TP^nH 上の $Sp(1) \cdot GL(n, H)$ -connection
 である。また 逆も言える。まとめると、

$$H^n H \cong \left\{ P^n H \text{ 上の } Sp(1) \cdot GL(n, H)\text{-linear} \right. \\ \left. \text{connection s.t. (*)} \right\}$$

と なる。

また、 $\Gamma' \subset SL(n+1, H)$ discrete subgroup と
 する時、 Γ' の元は 自然に $TP^n H$ の bundle automorphism
 と 考えられ それに応じて connection の moduli space
 $H^n H$ 上の automorphism を 対応させた。つまり、

$$\Gamma' \subset SL(n+1, H) \quad \rightsquigarrow \quad \Gamma \subset Sp(1, n)$$

なる対応が 定義された。この対応で、

$$\underline{\Gamma \backslash H^n H} \cong \left\{ \underline{\Gamma' \backslash P^n H \text{ 上の } Sp(1) \cdot GL(n, H)\text{-linear}} \right. \\ \left. \text{connection s.t. (*)} \right\}$$

と なる。

注、なほ、ここであって、この問題について 満洲化け別の
 解答を得ている。

Reference

- [Ar] T. Arakawa ; On certain automorphic forms of $Sp(1, g)$, Taniguchi Symp, Katata '83, Birkhäuser '84
- [Ni] T. Nitta ; Compactification of Moduli spaces of Einstein-Hermitian Connections for null-correlation bundles , Adv. Study 18.1. '90
397-416.