

部分的デファイナブル G 自明性について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 部分的デファイナブル自明性

ここでは、 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の o-minimal 拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ で考察する。実閉体上でも議論することができるが、ここでは、 $\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] など議論されている。

部分的デファイナブル自明性に関して、次の定理が知られている。

定理 1.1. ([2]) (部分的デファイナブル自明性) $f : S \rightarrow A$ をデファイナブル写像とする。このとき、 S のデファイナブル集合 $\{C_i\}$ への有限分割とデファイナブル写像 $h_i : f^{-1}(C_i) \rightarrow f^{-1}(y_i)$ が存在して、各 $(f, h_i) : f^{-1}(C_i) \rightarrow C_i \times f^{-1}(y_i)$ がデファイナブル同相写像である。ただし、 $y_i \in C_i$ とする。

一般の場合は、必ず分割しなければならない。

例 1.2. $X = \{(x, y) | xy = 1\} \cup \{(x, y) | x = 0\} \subset \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}, f(x, y) = x$ とすると、3つに分けなければ、部分的デファイナブル自明とならない。

問題 1.3. (1) 部分的デファイナブル自明性の C^r 版、同変版、 C^r 同変版はどうか？

(2) 部分的デファイナブル自明性より強く、デファイナブル自明性が成り立つ場合はどんなときか？

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S10, 57S15, 58A05, 03C64.
Keywords and Phrases. Definable sets, definable C^r manifolds, o-minimal, affine.

2. 部分的デファイナブル G 自明性

群 G がデファイナブル群とは、 G がデファイナブル集合であって、群演算 $G \times G \rightarrow G$ と $G \rightarrow G$ がデファイナブルであることである。デファイナブル群の表現写像とは、 G からある直交群 $O(n)$ への群準同型写像で、デファイナブルとなるものである。 G の表現とは、 G の表現写像の表現空間のことである。デファイナブル G 集合とは、ある G 表現の G 不変デファイナブル部分集合のことである。

X, Y をデファイナブル G 集合とする。デファイナブル G 写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル G 自明とは、ある $y \in Y$ とデファイナブル G 写像 $h: X \rightarrow f^{-1}(y)$ が存在して、 $(f, h): X \rightarrow Y \times f^{-1}(y)$ がデファイナブル同相写像となることである。

定理 2.1. ([6]) G をコンパクトデファイナブル群、 S を G 表現 Ω の中のデファイナブル G 集合とする。 A をある $\mathbb{R}^n$ の中のデファイナブル集合とし、 $f: S \rightarrow A$ を G 不変デファイナブル写像とする。このとき、 A のデファイナブル集合 $\{A_i\}$ への有限分割が存在して、各 $f|f^{-1}(A_i): f^{-1}(A_i) \rightarrow A_i$ がデファイナブル G 自明である。

n を 8 以上自然数とする。 n 次元球面 S^n に直交群 $O(n+1)$ が自然に作用しているとす。接束 $T(S^n)$ から S^n への射影 π は、自明ではなく、作用は推移的なので、 π は部分的デファイナブル自明とならない。よって、定理 2.1 において、 G 不変の条件は必要である。

定理 2.1 の証明のために、以下の準備が必要である。

定理 2.2. (10.2.18 [2]) G をコンパクトデファイナブル群、 X をデファイナブル G 集合とする。このとき、軌道空間 X/G はデファイナブル集合として存在し、射影 $\pi: X \rightarrow X/G$ はデファイナブル、連続かつ固有である。

K を G の部分群とする。 $G \times_K X$ は、 $G \times X$ を同値関係 $(g, x) \sim (gk^{-1}, kx), k \in K$ で割った商空間とするとき、以下の補題が成り立つ。

補題 2.3. G をコンパクトデファイナブル群、 K, H を G のデファイナブル部分群で $K \subset H$ を満たすとする。 X がデファイナブル K 集合ならば、写像 $G \times_K X \rightarrow G \times_H (H \times_K X), [g, x] \mapsto [g, [e, x]]$ はデファイナブル G 同相写像である。

コンパクト位相群 G と G 空間 X に対して、 $x \in X$ のとき、 $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ を x におけるアイソトロピー群といい、 G の閉部分群となっている。 X のアイソトロピー群としてあらわれる H, K の共役類 $(H), (K)$ に対して、順序 $(H) \leq (K)$ を H は K のある部分群と共役と定義する。これは、順序となって、それらを軌道型という。

定理 2.1 の証明. 定理 2.2 より、軌道空間 S/G はデファイナブル集合で射影 $\pi: S \rightarrow S/G$ はデファイナブル、連続かつ固有である。よって、 f から誘導される連続デファイナブル写像 $\bar{f}: S/G \rightarrow A$ が存在して、 $f = \bar{f} \circ \pi$ を満たす。[2] より、 $\bar{f}$ は部分的デファイナブル自明である。だから、 π が部分的デファイナブル G 自明であることを示せばよい。

$S \subset \Omega$ で Ω は G 表現なので、 S は有限個の軌道型がしかもたない。それらを $(H_1), \dots, (H_l)$ とする。各 (H_i) に対して、 $S(H_i) = \{x \in S | (G_x) = (H_i)\} = \{x \in S | \exists g \in G \ gG_xg^{-1} = H_i\}$ 。なので、 $S(H_i)$ はデファイナブル G 部分集合である。さらに、 $\pi(S(H_i)) = S(H_i)/G$ は $\pi(S) = S/G$ のデファイナブル部分集合である。 π を $\pi|_{S(H_i)}: S(H_i) \rightarrow S(H_i)/G$ に制限することにより、 S はただひとつの軌道型 (H) をもつとしてよい。

このとき、 H 不動点集合 $S^H = \{s \in S | hs = s \ \forall h \in H\}$ は S の閉 N 部分集合となる。ただし、 N は H の正規化群とする。写像 $\alpha: G \times_N S^H \rightarrow S, \alpha([g, x]) = gx$ は、 α のグラフが作用写像 $G \times S \rightarrow S$ の $G \times S^H$ への制限の射影 $\pi_1: G \times S^H \rightarrow G \times_N S^H$ の像となるので、デファイナブル G 同相写像となる。

さらに、包含写像 $j: S^H \rightarrow S$ は、デファイナブル同相写像 $\beta: S^H/N \rightarrow S/G$ を誘導する。定理 2.2 より、 S^H/N のデファイナブル集合への有限分割 $\{A_i\}_{i=1}^k$ が存在して、各 i に対して、デファイナブル同相写像 $\phi_i: N/H \times A_i \rightarrow \pi_H^{-1}(A_i)$ で $\pi_H \circ \phi_i = p_1$ を満たすものが存在する。ただし、 $\pi_H: S^H \rightarrow S^H/N$ は射影を表し、 p_1 は射影 $N/H \times A_i \rightarrow A_i$ を表すとする。

$B_i = \beta(A_i)$ とする。 H は A_i 上自明に作用しているので、 $N \times_H A_i \cong N/H \times A_i$ かつ $G \times_H A_i \cong G/H \times A_i$ である。だから、 $\psi_i: G/H \times B_i \rightarrow \pi^{-1}(B_i), \psi_i(gH, x) = g \cdot (j \circ \phi(eH, \beta^{-1}(x)))$ は、補題 2.3 と $G/H \times B_i \cong G/H \times A_i \cong G \times_H A_i \cong G \times_N (N \times_H A_i) \cong G \times_N (N/H \times A_i) \cong G \times_N \pi_H^{-1}(A_i) \cong G \times_N (\pi^{-1}(B_i))^H \cong \pi^{-1}(B_i)$ なので、デファイナブル G 同相写像である。□

3. 部分的デファイナブル $C^r G$ 自明性

群 G がデファイナブル C^r 群とは、 G がデファイナブル C^r 多様体であって、群演算 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$ がデファイナブル C^r 写像であることである。デファイナブル C^r 群 G がアフィンとは、 G がデファイナブル C^r 多様体としてアフィンであることである。デファイナブル $C^r G$ 多様体とは、デファイナブル C^r 多様体 X と群作用 θ の組であって、 $\theta: G \times X \rightarrow X$ がデファイナブル C^r 写像となるものである。 (X, θ) と書く代わりに、省略して X と書く。

X, Y をデファイナブル $C^r G$ 多様体とする。デファイナブル $C^r G$ 写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル $C^r G$ 自明とは、ある $y \in Y$ とデファイナブル $C^r G$ 写像 $h: X \rightarrow f^{-1}(y)$ が存在して、 $(f, h): X \rightarrow Y \times f^{-1}(y)$ がデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像となることである。

定理 3.1. ([6]) G をコンパクトデファイナブル C^r 群、 $1 \leq r < \infty$ とする。 S を G 表現中のデファイナブル $C^r G$ 部分多様体、 A を $\mathbb{R}^n$ 中のデファイナブル C^r 部分多様体とする。このとき、任意の G 不変全射デファイナブル C^r 沈めこみ $f: S \rightarrow A$ に対して、 A のデファイナブル C^r 部分多様体への有限分割 $\{A_i\}$ が存在して、各 $f|f^{-1}(A_i): f^{-1}(A_i) \rightarrow A_i$ がデファイナブル $C^r G$ 自明となる。

さらに、 M が C^ω (C^∞) セル分解をもつならば、 $r = \omega$ ($r = \infty$) ととることができる。

定理 3.1 の証明. S の次元に関する帰納法で証明する。 $\dim S = 0$ のときは、明らかである。

$\dim S = k > 0$ とする。10.1.8 [2] より、 G はデファイナブル群とデファイナブル群同型である。定理 2.1 より、 A のデファイナブル集合への有限分割 $\{D_j\}$ が存在して、各 $f|f^{-1}(D_j): f^{-1}(D_j) \rightarrow D_j$ がデファイナブル G 自明である。 $\{D_j\}$ を保存する A の C^r セル分解を考えることにより、 $\{D_j\}$ の各成分は A のデファイナブル C^r 部分多様体としてよい。

$S_j = f^{-1}(D_j)$ とする。このとき、 S_j は S は、デファイナブル $C^r G$ 部分多様体である。 $\dim S_j = k$ となるものだけ考えればよい。というのは、 $\dim S_j < k$ ならば、帰納法の仮定により、 $f|S_j: S_j \rightarrow D_j$ は部分的デファイナブル $C^r G$ 自明となるからである。

$f|S_j: S_j \rightarrow D_j$ は沈めこみである。 $f|S_j: S_j \rightarrow D_j$ がデファイナブル G 自明なので、連続デファイナブル G 写像 $h_j: S_j \rightarrow F_j$ が存在して、 $(f|S_j, h_j): S_j \rightarrow D_j \times F_j$ がデファイナブル G 同相写像である。ただし、 $F_j = f^{-1}(a_j), a_j \in D_j$ とする。 h_j にセル分解定理を適用することにより、 S_j の閉 G 不変デファイナブル部分集合 S'_j が存在して、 $\dim S'_j < k$ かつ $h_j|S_j - S'_j: S_j - S'_j \rightarrow h_j(S_j - S'_j) \subset F_j$ がデファイナブル $C^r G$ 写像となる。 $S_j - S'_j$ が S_j において開かつ G 不変なので、 $f(S_j - S'_j)$ は、 $f(S_j)$ の開 G 不変デファイナブル部分集合である。

このとき、 $(f, h_j)|S_j - S'_j: S_j - S'_j \rightarrow f(S_j - S'_j) \times h_j(S_j - S'_j)$ は、デファイナブル $C^r G$ 写像である。同じ議論を $(f, h_j)|S_j - S'_j$ の逆写像に適用することにより、 $S_j - S'_j$ の閉 G 不変デファイナブル部分集合 W_j と $f(S_j - S'_j) \times h_j(S_j - S'_j)$ の閉 G 不変デファイナブル部分集合 W'_j で $\dim W_j, \dim W'_j < k$ かつ $(f, h_j)|(S_j - S'_j - W_j): S_j - S'_j - W_j \rightarrow$

$(f(S_j - S'_j) \times h_j(S_j - S'_j)) - W'_j$ がデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像となる。 $S_j - S'_j - W_j$ の C^r セル分解 $\{U_j^l\}$ をとる。

このとき、 $(f, h_j)(W_j) = W'_j$ なので、各 $(f, h_j)|_{U_j^l} : U_j^l \rightarrow f(U_j^l) \times h_j(U_j^l)$ はデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像である。 $f(S'_j \cup W_j)$ の C^r セル分解 $\{T_\lambda\}$ をとる。このとき、各 $f^{-1}(T_\lambda)$ は S デファイナブル $C^r G$ 部分多様体で、 $f|_{f^{-1}(T_\lambda)} : f^{-1}(T_\lambda) \rightarrow T_\lambda$ は帰納法の仮定を満たす。よって、部分的デファイナブル $C^r G$ 自明である。だから、前半の証明が終わった。

後半も同様に得られる。 □

写像 $f : X \rightarrow Y$ が固有とは、 Y の任意のコンパクト部分集合 C に対して、 $f^{-1}(C)$ がコンパクトとなることである。

定理 3.2. ([1]) X をアフィン Nash 多様体、 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を全射固有 Nash 沈めこみとするとき、 f は Nash 自明である。

問題 3.3. (1) 定理 3.2 の G 作用つきはどうか？

(2) デファイナブル版はどうか？

定理 3.4. ([5]) G をコンパクトデファイナブル C^r 群、 X をアフィンデファイナブル $C^r G$ 多様体、 $1 \leq r < \infty$ とする。 G 不変全射固有デファイナブル C^r 沈めこみ $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ はデファイナブル $C^r G$ 自明である。

定理 3.4 の証明. 部分的デファイナブル $C^r G$ 自明性定理を適用することにより、 $\mathbb{R}$ の分割 $-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_j < a_{j+1} = \infty$ とデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像 $\phi_i : f^{-1}((a_i, a_{i+1})) \rightarrow (a_i, a_{i+1}) \times f^{-1}(y_i)$ で $f|_{f^{-1}((a_i, a_{i+1}))} = p_i \circ \phi_i$, $(0 \leq i \leq j)$ を満たすものが存在する。ただし、 p_i は射影 $(a_i, a_{i+1}) \times f^{-1}(y_i) \rightarrow (a_i, a_{i+1})$ を表し、 $y_i \in (a_i, a_{i+1})$ とする。

$1 \leq i \leq j$ の各 a_i に対して、 a_i を含む開区間 I_i とデファイナブル $C^r G$ 写像 $\pi_i : f^{-1}(I_i) \rightarrow f^{-1}(a_i)$ が存在して、 $F_i = (f, \pi_i) : f^{-1}(I_i) \rightarrow I_i \times f^{-1}(a_i)$ がデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像となる。デファイナブル $C^r G$ 管状近傍定理より、 $f^{-1}(a_i)$ の X におけるデファイナブル $C^r G$ 管状近傍 (U_i, π_i) が存在する。 f は固有なので、 a_i を含む開区間 I_i が存在して、 $f^{-1}(I_i) \subset U_i$ となる。 f が固有でなければ、そのような開区間は存在するとは限らない。

必要ならば、 I_i を縮小することにより、 $F_i = (f, \pi_i) : f^{-1}(I_i) \rightarrow I_i \times f^{-1}(a_i)$ は求めるデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像である。

上記の議論により、開区間の有限族 $\{J_i\}_{i=1}^l$ とデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像 $h_i : f^{-1}(J_i) \rightarrow J_i \times f^{-1}(y_i)$, $(1 \leq i \leq l)$ が存在して、 $y_i \in J_i$, $\cup_{i=1}^l J_i = \mathbb{R}$ かつ h_i と射影 $J_i \times f^{-1}(y_i) \rightarrow J_i$ の合成が $f|f^{-1}(J_i)$ となる。

自明写像を得るために、これらの自明写像をはり合わせる。 $i \geq 2$ としてよい。 $U_{i-1} \cap J_i = (a, b)$ かつ $k_{i-1} : f^{-1}(U_{i-1}) \rightarrow U_{i-1} \times f^{-1}(y_1)$ はデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像で、 $f|f^{-1}(U_{i-1}) = \text{proj}_{i-1} \circ k_{i-1}$ を満たすものとする。ただし、 $U_{i-1} = \cup_{s=1}^{i-1} J_s$ かつ proj_{i-1} は射影 $U_{i-1} \times f^{-1}(y_1) \rightarrow U_{i-1}$ を表すとする。 $z \in (a, b) = U_{i-1} \cap J_i$ をとる。このとき、 $f^{-1}(y_1) \cong f^{-1}(z) \cong f^{-1}(y_i)$ なので、 $f^{-1}(y_1)$ は $f^{-1}(y_i)$ とデファイナブル $C^r G$ 微分同相である。 h_i を $f^{-1}(J_i)$ から $J_i \times f^{-1}(y_1)$ へのデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像とする。

このとき、デファイナブル $C^r G$ 微分同相写像 $k_{i-1} \circ h_i^{-1} : (a, b) \times f^{-1}(y_1) \rightarrow (a, b) \times f^{-1}(y_1)$, $(t, x) \mapsto (t, q(t, x))$ を得る。 C^r Nash 関数 $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $u = \frac{a+b}{2}$ on $(-\infty, \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b]$ かつ $u = \text{id}$ on $[\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, \infty)$ を満たすものとする。 $H : (a, b) \times f^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}((a, b))$, $H(t, x) = k_{i-1}^{-1}(t, q(u(t), x))$ とする。このとき、 H はデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像で、 $H = h_i^{-1} \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \leq t \leq b$ かつ $H = k_{i-1}^{-1} \circ (\text{id} \times \psi)$ $a \leq t \leq \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$ を満たす。ただし、 $\psi : f^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}(y_1)$, $\psi(x) = q(\frac{a+b}{2}, x)$ 。

$$\tilde{k}_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times f^{-1}(y_1),$$

$$\tilde{k}_i(x) = \begin{cases} (\text{id} \times \psi)^{-1} \circ k_{i-1}(x), & f(x) \leq \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \\ H^{-1}(x), & \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \leq f(x) \leq b \\ h_i(x), & f(x) > b \end{cases}$$

$\tilde{k}_i$ はデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像である。これを改めて、 t_i とおく。よって k_i が求めるデファイナブル $C^r G$ 微分同相写像である。 $\square$

系 3.5. ([4]) G を有限群とする。 X をアフィン Nash G 多様体, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を G 不変全射固有 Nash 沈めこみとすると、 f は Nash G 自明である。

系 3.5 の証明. 定理 3.4 より、 C^r Nash G 微分同相写像 $F = (f, \phi) : X \rightarrow \mathbb{R} \times f^{-1}(y)$ で、 $f = p \circ F$ を満たすものが存在する。ただし、 $p : \mathbb{R} \times f^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ は射影を表すとする。近似定理より、Nash G 写像 $\psi : X \rightarrow f^{-1}(y)$ で ϕ の近似となるものが存在する。この近似が十分よければ、 $H = (f, \psi) : X \rightarrow \mathbb{R} \times f^{-1}(y)$ は求める Nash G 微分同相写像である。 $\square$

REFERENCES

- [1] M. Coste and M. Shiota, *Nash triviality in families of Nash manifolds*, Invent. Math. 108 (1992), no. 2, 349-368.
- [2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. 84 (1996), 497-540.
- [4] T. Kawakami, *Definable $C^r G$ triviality of G invariant proper definable C^r maps*, 京都大学数理解析研究所講究録 1393 (2004), 102-105.
- [5] T. Kawakami, *Equivariant definable C^r approximation theorem, definable $C^r G$ triviality of G invariant definable C^r functions and compactifications*, , Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 55. (2005), 23-36.
- [6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. 123 (2002), 323-349.