

Toroidal embedding への数式処理システムの応用

神戸大学 教育学部 高橋 正 (Tadashi Takahashi)
日立製作所 情報システム開発本部 米村 崇 (Takashi Yonemura)

要旨

解析空間における特異点の構造を研究する際、Toroidal embedding が重要な役割をする。Toroidal embedding は 3 次元に用いるとき、多面体の分割、局所的関数の計算などをしなければならない。これらのグラフィックス、計算を、グラフィック機能を備えた数式処理システムを用いて実行することができる。本稿においては、Toroidal embedding の一般論とその例を示しながら、数式処理システムを Toroidal embedding に用いる方法を考察する。

1. 準備

まず、記号を次のように定める。

$\mathbf{Z}$: 有理整数環, $\mathbf{R}$: 実数体, $\mathbf{C}$: 複素数体,

$\mathbf{Z}_0 = \{n \in \mathbf{Z} | n \geq 0\}$, $\mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z} | n > 0\}$, $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_+$ も同様。

$z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{Z}_0^{n+1}$ に対して、 $z^v = z_0^{v_0} \cdot z_1^{v_1} \cdots z_n^{v_n}$ と書く。

$x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$ のとき $\mathbf{R}^{n+1}$ における普通の内積

$$x \cdot y = \sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i$$

を $\langle x, y \rangle$ と書く。

定義 (Newton 多面体, Newton 図形)

$n+1$ (複素) 変数の多項式

$$f = \sum a_v z^v \in \mathbf{C}[z_0, z_1, \dots, z_n], a_v \in \mathbf{C} \text{ (係数)}$$

に対して

$$\bigcup_{a_v \neq 0} (v + \mathbf{R}_0^{n+1})$$

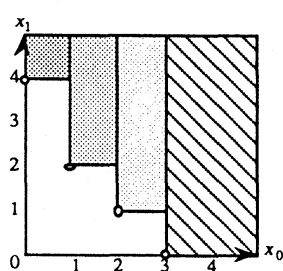
の凸包 (convex hull) を $\Gamma_+(f)$ と書き f の Newton 多面体という。また、 $\Gamma_+(f)$ の compact face の和を $\Gamma(f)$ と書き、 f の Newton 図形という ($\Gamma_+(f)$, $\Gamma(f)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の中の図形)。

f の定義する $\mathbf{C}^{n+1}$ における超曲面

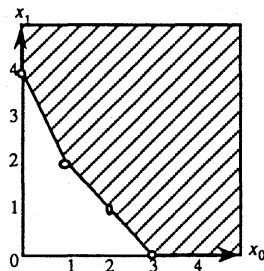
$$X = \{f = 0\} \in \mathbf{C}^{n+1}$$

が原点 $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ において孤立特異点を持つ場合を考える ([1] を参照)。

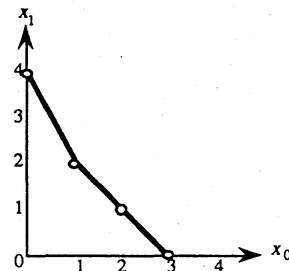
例 $n=1$, $f = z_0^3 + 2z_0^2z_1 + 3z_0z_1^2 + z_1^4$ ($a_{30}=1, a_{21}=2, a_{12}=3, a_{04}=1$ その他 $a_v=0$)



$\bigcup_{a_v \neq 0} (v + \mathbf{R}_0^2)$

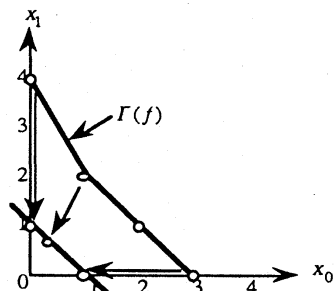


$\Gamma_+(f)$



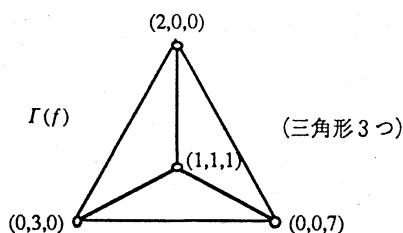
$\Gamma(f)$

$n \geq 2$ のときは前のように絵が描けないので $\mathbf{R}^{n+1}$ の第一象限 $\mathbf{R}_0^{n+1}$ を超平面 $\{x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1\}$ に射影した中で ($\mathbf{R}_0^{n+1} / \mathbf{R}_+$ の中で) 絵を描く (それでもせいぜい $n=3$ まで)。前の例では、次のようになる。

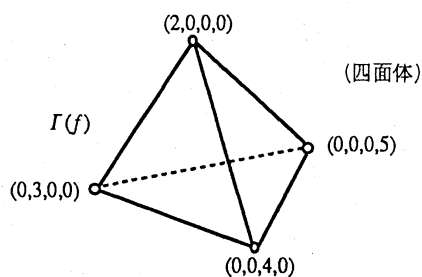


これを $(0,4) \quad (1,2) \quad (3,0)$ と描く。

例 $n=2$ $f = z_0^2 + z_1^3 + z_2^7 + z_0z_1z_2$



$n=3$ $f = z_0^2 + z_1^3 + z_2^4 + z_3^5$



定義 (非退化 (non-degenerate))

$\Gamma(f)$ の compact face $\Delta \subset \Gamma(f)$ に対して $f_\Delta = \sum_{v \in \Delta} a_v z^v$ とおく。

任意の Δ に対して

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_0} = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n} = 0$$

が $(\mathbf{C}^*)^{n+1}$ で成立しないとき f は非退化であるという。

f が非退化のとき f の定義する超曲面の孤立特異点 $(X, 0)$ の良特異点除去 (good resolution) が以下の手続きで得られる。

2. 良特異点除去を得る手続き

2-1. 双対 Newton 図形 $\Gamma^*(f)$ を求める。

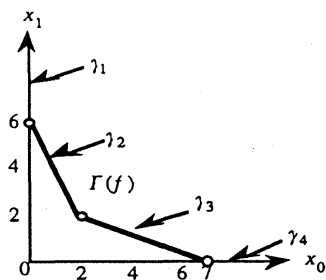
$\Gamma^*(f)$ は次のように定義される。

$a \in \mathbf{R}_0^{n+1}$ に対して $\ell(a) := \min\{\langle a, \alpha \rangle \mid \alpha \in \Gamma_+(f)\}$, $\gamma(a) := \{\alpha \in \Gamma_+(f) \mid \langle a, \alpha \rangle = \ell(a)\}$ とおく。

また、 $\Gamma_+(f)$ の face γ に対して、 $\sigma(\gamma) := \{a \in \mathbf{R}_0^{n+1} \mid \gamma(a) \supset \gamma\}$ と定める。 $\sigma(\gamma)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の (原点を頂点とする) cone (錐) になる。 $\Gamma_+(f)$ の face 全体の集合を F とするとき $\Gamma^*(f) := \{\sigma(\gamma) \mid \gamma \in F\}$ と定める。 $\Gamma^*(f)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の cone から成る集合で

$$\bigcup_{\sigma \in \Gamma^*(f)} \sigma = \mathbf{R}_0^{n+1} \quad \text{を満たす。}$$

例 $n=1$ $f = z_0^7 + z_0^2 z_1^2 + z_1^6$



$\Gamma_+(f)$ の face は $\Gamma_+(f)$ 自身と折れ線

$$\leftarrow \gamma_4 (7,0) \xrightarrow{\gamma_3} (2,2) \xrightarrow{\gamma_2} (0,6) \xrightarrow{\gamma_1} \rightarrow$$

$$\gamma_4 : x_1 = 0$$

$$\gamma_3 : 2x_0 + 5x_1 = 14$$

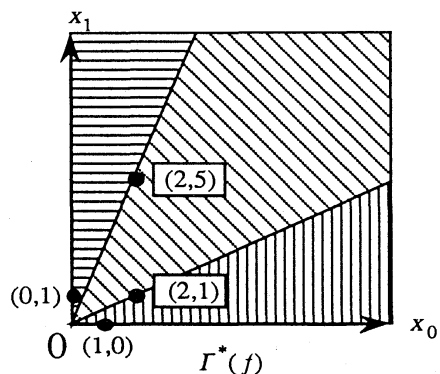
$$\gamma_2 : 2x_0 + x_1 = 6$$

$$\gamma_1 : x_0 = 0$$

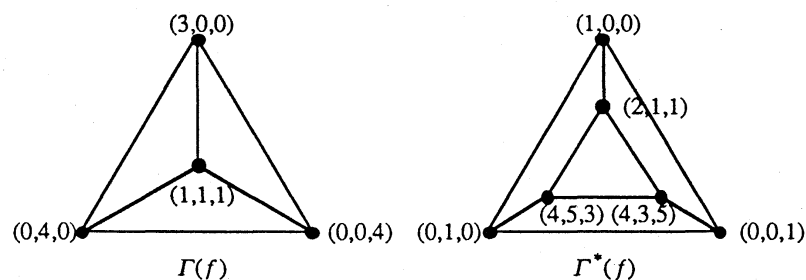
だから $a = (a_0, a_1)$ とすると

$\frac{a_0}{a_1}$	0	...	$\frac{2}{5}$	...	$\frac{2}{1}$	...	∞ ($a_1 = 0$)
$\gamma(a)$	γ_4	$(7,0)$	γ_3	$(2,2)$	γ_2	$(0,6)$	γ_1

$a = (0,0)$ のとき $\gamma(a) = \Gamma_+(f)$ で $\sigma(\gamma(a)) = \{0\}$



$$n=2 \quad f = z_0^3 + z_1^4 + z_2^4 + z_0 z_1 z_2$$



2-2. $\Gamma^*(f)$ を unimodular cone に細分する。

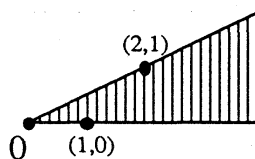
$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}^{n+1}$ のある基底 $m_0, m_1, \dots, m_n$ があって、cone σ がこの基底の一部で張られる (つまり、基底の一部 $m_0, m_1, \dots, m_k$ ($k \leq n$) に対して

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i m_i \mid t_i \in \mathbb{R}_0 \right\}$$

と書ける) とき、 σ は unimodular であるといい、 $m_0, m_1, \dots, m_k$ を σ の生成元という。

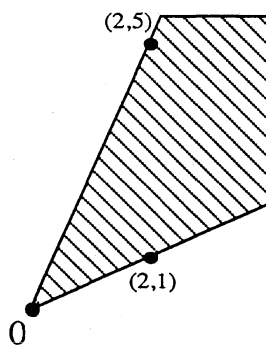
例 前の例における $n=1$ において

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{より}$$

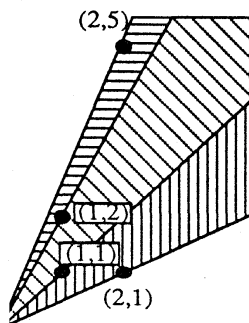


は unimodular であるが、

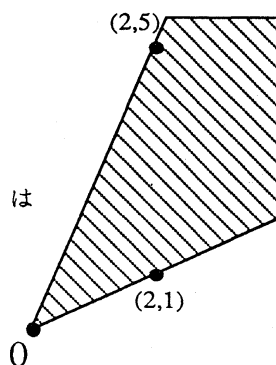
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{より}$$



は unimodular ではない。

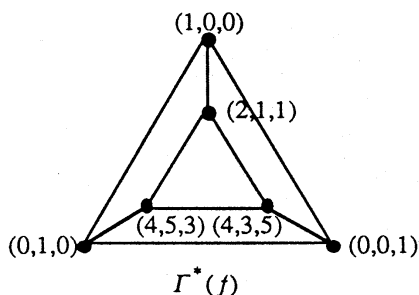


は

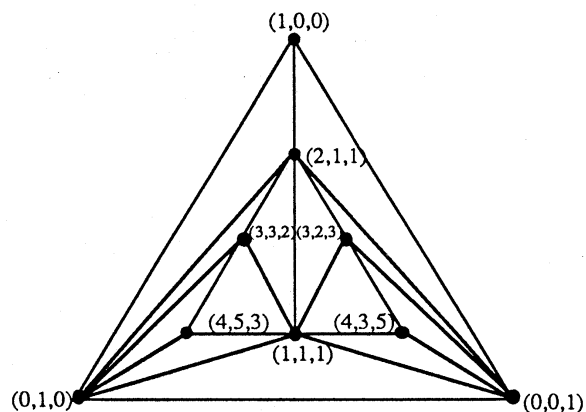


の unimodular な細分である。

前の例における $n=2$ において



を unimodular に細分すると、例えば



となる。

一般に unimodular な細分はたくさんある。

2-3. $\Gamma^*(f)$ の unimodular な細分 Σ から 有理写像 $\pi: Y_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ をつくる。

Σ の $n+1$ 次元の cone σ に対し、 σ の生成元を

$$a_0 = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}), a_1 = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

とすると、有理写像 $\pi(\sigma): \mathbb{C}^{n+1}(\sigma) = \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ を

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_0^{a_{00}} z_1^{a_{10}} \dots z_n^{a_{n0}}, z_0^{a_{01}} z_1^{a_{11}} \dots z_n^{a_{n1}}, \dots, z_0^{a_{0n}} z_1^{a_{1n}} \dots z_n^{a_{nn}})$$

で定義する。行列 A を $A = (a_{ij})$ $0 \leq i, j \leq n$ とすると、 σ は unimodular だから $\det A = \pm 1$ である。上の写像 $\pi(\sigma)$ を $z \mapsto^A z$ と書く。代数多様体 Y_Σ を

$$Y_\Sigma: \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{C}^{n+1}(\sigma) / \sim$$

$\dim \sigma = n+1$

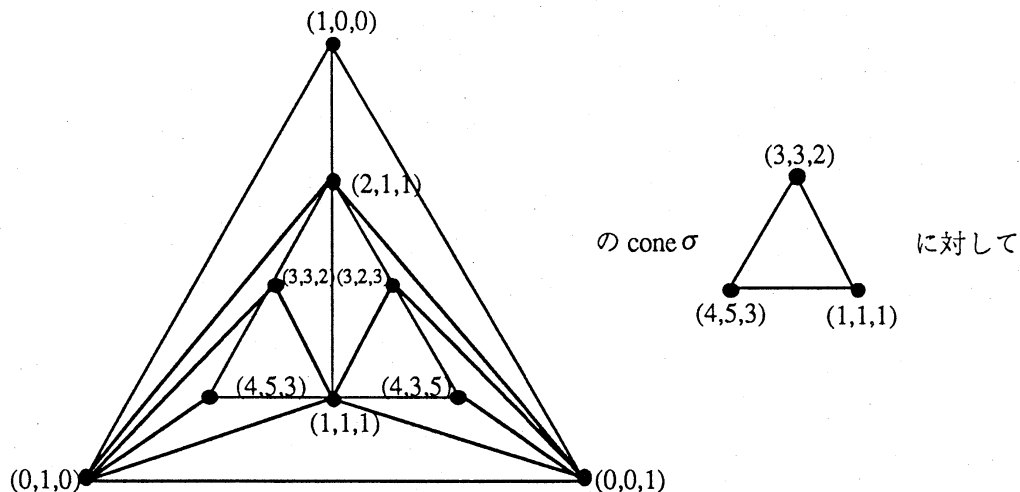
で定義する。ただし、ここで $z \in \mathbb{C}^{n+1}(\sigma)$, $w \in \mathbb{C}^{n+1}(\tau)$ に対して $z \sim w$ であるとは $w = B^{-1}A z$ となることとする (σ の生成元 $a_0, a_1, \dots, a_n$, τ の生成元 $b_0, b_1, \dots, b_n$, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$)。

写像 $\pi(\sigma)$ を貼り合わせて有理写像 $\pi: Y_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ が得られる。

2-4. 良特異点除去をつくる。

$\tilde{X} := \overline{\pi^{-1}(X \setminus \{0\})}$, $E := \pi^{-1}(0) \cap \tilde{X}$ とすると、 $\pi|_{\tilde{X}} : (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, 0)$ は良特異点除去である。

例 (前の例の続き) めんどうなので、 $z_0 = x$, $z_1 = y$, $z_2 = z$ と書く。



$$C^3(\sigma) \xrightarrow{\pi(\sigma)} C^3$$

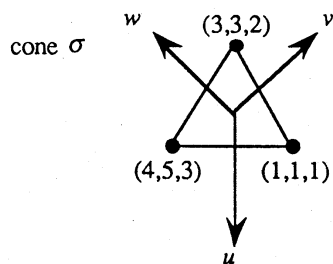
$$(u, v, w) \mapsto (u^3 v^4 w, u^3 v^5 w, u^2 v^3 w) = (x, y, z)$$

$$f \circ \pi(\sigma) = x^3 + y^4 + z^4 + xyz$$

$$= (u^3 v^4 w)^3 + (u^3 v^5 w)^4 + (u^2 v^3 w)^4 + (u^3 v^4 w)(u^3 v^5 w)(u^2 v^3 w)$$

$$= u^8 v^{12} w^3 (u + u^4 v^8 w + w + 1)$$

$C^3(\sigma)$ において $\tilde{X} = \{f_\sigma = 0\}$ $E = \tilde{X} \cap \{uvw = 0\}$ これを次のように図示する。

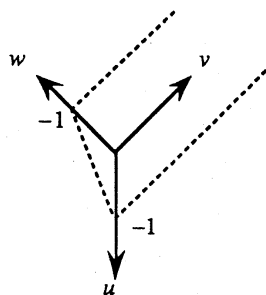


に $C^3(\sigma)$ の座標軸 u, v, w 軸を左のように描くと

E は

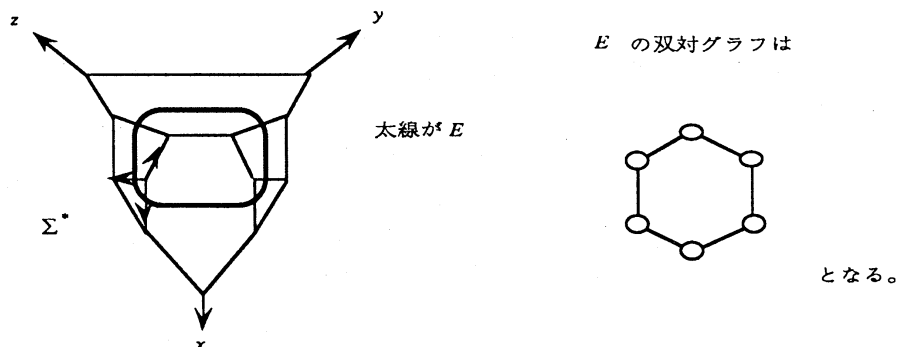
$$\{u = 0, w + 1\} \cup \{v = 0, u + w + 1\} \cup \{w = 0, u + 1\}$$

これより



点線が E (3本の有理曲線)

この作業を Σ のすべての cone に対して行なうと、次の図ができる。



上の図は Σ の双対図形のようなもので、例えば、この部分は $(1,1,1)$ の dual $(1,1,1)^*$ である。

$n=2$ のときは、 E の各既約成分 (曲線) の種数 (genus) 及び自己交点数 (self-intersection number) が $\Gamma(f)$, $\Gamma^*(f)$, Σ から求められる ([2] を参照)。

種数の求め方

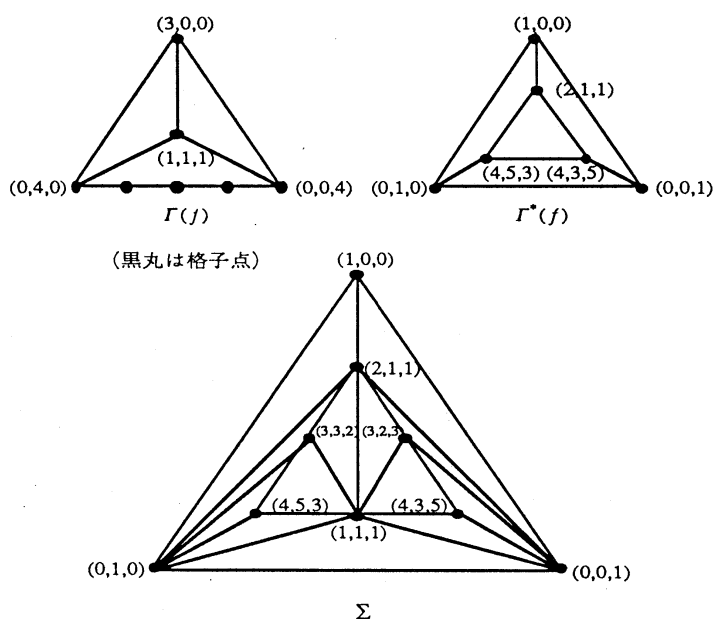
Σ の 1 次元 cone の生成元を a とする (上の図に示す各点が a , 以下 Σ の点と呼ぶ)。 a が $\Gamma^*(f)$ の点でなければ a^* 内の曲線は有理曲線。 a が $\Gamma^*(f)$ の点ならば a^* 内の曲線の種数は $\gamma(a)$ ($\Gamma(f)$ の face で a を法線ベクトルにもつもの) の (相対) 内部にある格子点の数に等しい。

自己交点数の求め方

a^* 内の曲線の自己交点数を α とし、 $\Gamma^*(f)$ の実線部分に沿って a になり合う Σ の点を $b_1, b_2, \dots, b_s$, $\gamma(a) \cap \gamma(b_i)$ 上の格子点の数を $v_i + 1$ とするとき、

$$-\alpha a = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \dots + v_s b_s \quad \text{である。}$$

例



この例では、すべて有理曲線（種数0）である。

$a=(1,1,1)$ とすると、 $\Gamma^*(f)$ の実線部分に沿って a となり合う Σ の点は $(4,5,3), (4,3,5)$ であるから、 $8a=(4,5,3)+(4,3,5)$ より $(1,1,1)^*$ における曲線の自己交点数は、 -8 である。また、 $a=(2,1,1)$ とすると、となり合うのは $(1,0,0), (3,3,2), (3,2,3)$ である。 $b=(1,0,0)$ とおくと、 $\gamma(a) \cap \gamma(b)$ は線分

$$(0,4,0) \text{-----} (0,0,4)$$

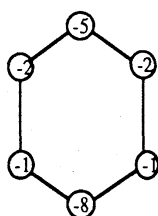
となり、この上の格子点の数は $4+1$ より、

$$5a=4 \cdot (1,0,0) + (3,3,2) + (3,2,3).$$

よって、 $(2,1,1)^*$ における曲線の自己交点数は、 -5 である。

同様な計算により、

E の双対グラフ



を得る。

3. Mathematica による計算

Mathematica を用いて $n=2, 3$ の例を計算する（ $n=2$ の例は、2 で示した例と同じ）。

$n=2$ の例

```
pts=Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],{Point[{1,1,1}],Point[{3,0,0}],
Point[{0,4,0}],Point[{0,0,4}]}],Thickness[0.025], GrayLevel[0.2]],
ViewPoint->{3,3,3},Lighting->False,Boxed->False];
```

（Newton diagram の頂点を入力する）

```
face1={Polygon[{{1,1,1},{3,0,0},{0,4,0}}]};face2={Polygon[{{1,1,1},
{0,4,0},{0,0,4}}]};face3={Polygon[{{1,1,1},{0,0,4},{3,0,0}}]};
```

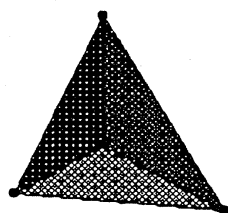
```
f1=Show[ Graphics3D[{FaceForm[GrayLevel[1],GrayLevel[0]],face1}],
ViewPoint->{3,3,3},Lighting->False,Boxed->False];
```

（Newton diagram の各 face を作る）

.....

```
uf={pts,f1,f2,f3}; (Newton diagram の face を作る)
```

```
face=Show[ { uf }]
```



(* Newton diagram of f *)

```

f=x^3 + y^4 + x y z ;eq1= D[f,x]; eq2= D[f,y]; eq3= D[f,z];
Solve[ {eq1,eq2,eq3}=={0,0,0},{x,y,z} ]
({ y -> 0, x -> 0 })      (f が non-degenerate であるか調べる)
.....
(* f is non-degenerate *)

x= 1; y= 1; z= 1; eq1=a x + b y + c z + d;x= 3; y= 0; z= 0;
eq2=a x + b y + c z + d;x= 0; y= 4; z= 0; eq3=a x + b y + c z + d;
Solve[ {eq1,eq2,eq3}=={0,0,0},{a,b,c} ]
      -d          -d          -5d
({ a -> -- , b -> -- , c -> ---- }) (face の方向ベクトルを求める)
      3           4           12
.....
dpts=Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],{Point[{1,0,0}],
Point[{0,1,0}],Point[{0,0,1}],Point[{2,1,1}],Point[{4,5,3}],
Point[{4,3,5}]}],Thickness[0.025], GrayLevel[0.2]],
ViewPoint->{-1,-1,-1},Lighting->False,Boxed->False]]
(双対 Newton diagram の頂点を入力する)

```



```

.....
dface=Show[ { duf } ] (双対 Newton diagram を描く)

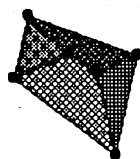
```



```

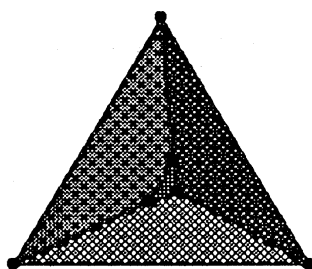
(* dual Newton diagram of f *)
dpts=Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],{Point[{1,0,0}],
Point[{0,1,0}],Point[{0,0,1}],Point[{2,1,1}],Point[{4,5,3}],
Point[{4,3,5}]}],Thickness[0.025], GrayLevel[0.2]],
ViewPoint->{-1,-3,-4},Lighting->False,Boxed->False]]
(見る位置を変えて、双対 Newton diagram を描く)
.....

```



```
dpts=Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],{Point[{12,0,0}],
Point[{0,12,0}],Point[{0,0,12}],Point[{2,1,1}],Point[{4,5,3}],
Point[{4,3,5}]}],Thickness[0.025], GrayLevel[0.2]],
ViewPoint->{-1,-1,-1},Lighting->False,Boxed->False]]
```

.....



```
b0={1,0,0}; b1={0,1,0}; b2={0,0,1};
b3={2,1,1}; b4={4,5,3}; b5={4,3,5}; (Unimodular cone に分割する)
```

```
c0={2,0,0}; m1={b0,b1,c0}; d1=Det[m1]; m2={b1,b2,c0}; d2=Det[m2];
m3={b2,b0,c0}; d3=Det[m3]; d={d1,d2,d3}
{0,2,0}
```

```
Clear[m1,m2,m3,d1,d2,d3,d]
```

```
c0={1,1,0}; m1={b0,b1,c0}; d1=Det[m1]; m2={b1,b2,c0}; d2=Det[m2];
m3={b2,b0,c0}; d3=Det[m3]; d={d1,d2,d3}
{0,1,0}
```

```
Clear[m1,m2,m3,d1,d2,d3,d]
```

.....

```
c0={1,1,1}; m1={b0,b1,c0}; d1=Det[m1]; m2={b1,b2,c0}; d2=Det[m2];
m3={b2,b0,c0}; d3=Det[m3]; d={d1,d2,d3}
{1,1,1}
```

```
b0={1,0,0}; b1={0,1,0}; b2={0,0,1}; b3={1,1,1}; b4={2,1,1};
b5={4,5,3}; b6={4,3,5};
```

```
Clear[m1,m2,m3,d1,d2,d3,d]
```

.....

```
c0={3,3,2}; m1={b4,b1,c0}; d1=Det[m1]; m2={b1,b5,c0}; d2=Det[m2];
m3={b5,b3,c0}; d3=Det[m3]; m4={b3,b4,c0}; d4=Det[m4]; d={d1,d2,d3,d4}
{1,1,1,1}
```

```
b0={1,0,0}; b1={0,1,0}; b2={0,0,1}; b3={1,1,1}; b4={2,1,1};
b5={3,3,2}; b6={4,5,3}; b7={4,3,5};
```

```
.....
upts=Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],{Point[b0],Point[b1],
Point[b2],Point[b3],Point[b4],Point[b5],Point[b6],Point[b7],
Point[b8]}},Thickness[0.025], GrayLevel[0.2]],
ViewPoint->{-1,-1,-1},Lighting->False,Boxed->False]
```

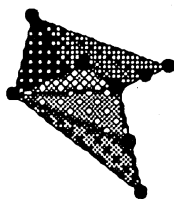
```
.....
uface=Show[ { uf }] (Unimodular cone に分割した双対 Newton diagram を描く)
```



```
upts=Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],{Point[b0],Point[b1],
Point[b2],Point[b3],Point[b4],Point[b5],Point[b6],Point[b7],
Point[b8]}},Thickness[0.025], GrayLevel[0.2]],
ViewPoint->{-1,-3,-4},Lighting->False,Boxed->False]
```

(見る位置を変えて、Unimodular cone に分割した双対 Newton diagram を描く)

```
.....
```



```
f= x^3 + y^4 + z^4 + x y z; x= u^3 v^4 w; y= u^3 v^5 w;
z= u^2 v^3 w; g= Expand[f] (Proper transform を求める)
8 12 3 9 12 3 8 12 4 12 20 4
u v w + u v w + u v w + u v w
```

```
g1= Factor[g]
```

```

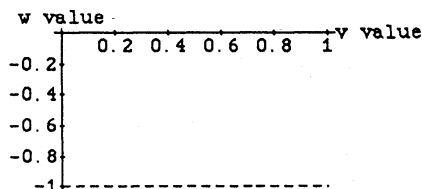
8 12 3          4 8
u v w (1+ u + w + u v w)

```

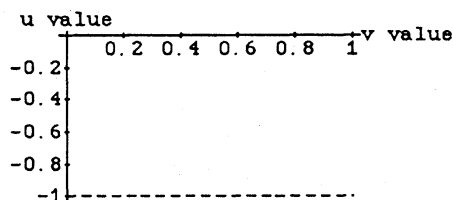
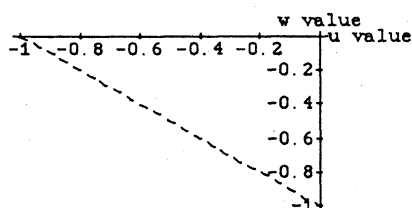
```

.....
Plot[{0,-1}, {v,0,1}, AxesLabel->{"v value","w value"},
PlotStyle->{{GrayLevel[0.0]}, {Dashing[{0.025,0.025}]}} ]

```



.....



.....

n=3

例 1. $f = x^4 + y^4 + z^4 + w^4$ (この定義方程式によって定義される解析空間は、原点において simple K3 singularity を持つ ([3] を参照)) の原点における特異点を調べる。

```

(* {4,0,0,0},{0,4,0,0},{0,0,4,0},{0,0,0,4} *)
(* Newton diagram of f *)
f=x^4 + y^4 + z^4 + w^4 ; eq1= D[f,x]; eq2= D[f,y]; eq3= D[f,z];
eq4= D[f,w];Solve[ {eq1,eq2,eq3,eq4}=={0,0,0,0},{x,y,z,w} ]
{{w->0, z->0, y->0, x->0},..... (f が non-degenerate であるか調べる)

Clear[f,eq1,eq2,eq3,eq4]

x= 4; y= 0; z= 0; w= 0; eq1= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 4; z= 0; w= 0; eq2= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 0; z= 4; w= 0; eq3= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 0; z= 0; w= 4; eq4= a x + b y + c z + d w + e;
Solve[ {eq1,eq2,eq3,eq4}=={0,0,0,0},{a,b,c,d} ]
{{a -> -e/4, b -> -e/4, c -> -e/4, d -> -e/4}} (face の方向ベクトルを求める)
.....
(* {1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1},{1,1,1,1} *)
(* dual Newton diagram of f *)

```

```

b0={1,0,0,0}; b1={0,1,0,0}; b2={0,0,1,0}; b3={0,0,0,1}; b4={1,1,1,1};

```

```

m1={b0,b1,b2,b4}; d1=Det[m1]; m2={b0,b1,b3,b4}; d2=Det[m2];
m3={b0,b2,b3,b4}; d3=Det[m3]; m4={b1,b2,b3,b4}; d4=Det[m4];

```

```

d={d1,d2,d3,d4}
{1,-1,1,-1}      (Unimodular cone に分割する)

Clear[m1,m2,m3,d1,d2,d3,d]

f= z0^4 + z1^4 + z2^4 + z3^4; z0= u0^1 u1^0 u2^0 u3^1;
z1= u0^0 u1^1 u2^0 u3^1; z2= u0^0 u1^0 u2^1 u3^1;
z3= u0^0 u1^0 u2^0 u3^1; g= Expand[f]
      4      4      4      4      4      4
u3 + u0 u3 + u1 u3 + u2 u3

g1= Factor[g]
      4      4      4      4
(1 + u0 + u1 + u2 )u3      (Proper transform を求める)
.....

```

この計算により、原点における特異点は simple K3 surface であることが分かる。この例のように、 $n=3$ のときはグラフィックスを描くことができない。グラフィックスを描かなくても、この例は例外集合を求めることができる。

例 2. $f = x^3 + y^3 z + y^3 w + z^5 - w^5$ (この定義方程式によって定義される解析空間も、原点において simple K3 singularity を持つ ([3] を参照)) の原点における特異点を調べる。

```

(* {3,0,0,0},{0,3,1,0},{0,3,0,1},{0,0,5,0},{0,0,0,5} *)
(* Newton diagram of f *)
f=x^3 + y^3 z + y^3 w + z^5 ; eq1= D[f,x]; eq2= D[f,y]; eq3=D[f,z];
eq4= D[f,w]; Solve[{eq1,eq2,eq3,eq4}=={0,0,0,0},{x,y,z,w} ]
({w->0, z->0, y->0, x->0},.....
(f が non-degenerate であるか調べる)

Clear[f,eq1,eq2,eq3,eq4]

f=x^3 + y^3 z + y^3 w - w^5 ; eq1= D[f,x]; eq2= D[f,y]; eq3= D[f,z];
eq4= D[f,w]; Solve[ {eq1,eq2,eq3,eq4}=={0,0,0,0},{x,y,z,w} ]
({w->0, z->0, y->0, x->0},.....

Clear[f,eq1,eq2,eq3,eq4]
.....
(* f is non-degenerate *)

x= 3; y= 0; z= 0; w= 0; eq1= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 3; z= 1; w= 0; eq2= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 3; z= 0; w= 1; eq3= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 0; z= 5; w= 0; eq4= a x + b y + c z + d w + e;
Solve[ {eq1,eq2,eq3,eq4}=={0,0,0,0},{a,b,c,d} ]
      -e      -4 e      -e      -e
({ a -> -- , b -> ---- , c -> --, c -> -- }) (face の方向ベクトルを求める)
      3      15      5      5

```

```

x= 3; y= 0; z= 0; w= 0; eq1= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 3; z= 1; w= 0; eq2= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 3; z= 0; w= 1; eq3= a x + b y + c z + d w + e;
x= 0; y= 0; z= 0; w= 5; eq4= a x + b y + c z + d w + e;
Solve[ {eq1,eq2,eq3,eq4}=={0,0,0,0},{a,b,c,d} ]
      -e      -4 e      -e      -e
{{ a -> --, b -> ----, c -> --, c -> -- }}
      3      15      5      5
.....

(* {1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1},{5,4,3,3} *)
(* dual Newton diagram of f *)

b0={1,0,0,0}; b1={0,1,0,0}; b2={0,0,1,0}; b3={0,0,0,1}; b4={5,4,3,3};

m1={b0,b1,b2,b4}; d1=Det[m1]; m2={b0,b1,b3,b4}; d2=Det[m2];
m3={b0,b2,b3,b4}; d3=Det[m3]; m4={b1,b2,b3,b4}; d4=Det[m4];
d={d1,d2,d3,d4}
{3,-3,4,-5}

Clear[m1,m2,m3,d1,d2,d3,d]

c0={1,1,1,1}; m1={b0,b1,b2,c0}; d1=Det[m1]; m2={b1,b2,b3,c0};
d2=Det[m2]; m3={b2,b3,b0,c0}; d3=Det[m3]; m4={b3,b0,b1,c0};
d4=Det[m4]; d={d1,d2,d3,d4}
{1,-1,1,-1} (Unimodular cone に分割する)

b0={1,0,0,0}; b1={0,1,0,0}; b2={0,0,1,0}; b3={0,0,0,1};
b4={1,1,1,1}; b5={5,4,3,3}; Clear[c0,m1,m2,m3,m4,d1,d2,d3,d4,d]

m1={b0,b1,b4,b5}; d1=Det[m1]
0
(* ? *)

```

face を分割する際には、一意的に分割する方法を定め、分割を実行することが良いであろう。分割を実行する方法を考察中である。

グラフィックスを描かないと、この例のように、例外集合を求めにくいものがある。この例に用いた定義方程式によって定義される解析空間の原点の特異点の例外集合は、手計算によって求められている。

人間の手計算は、図的イメージと式の計算を絶妙に生かしている。その絶妙さを分析し、数式処理システムの計算パワーを真に生かさなければならない。

参考文献

- [1] 金子 晃：ニュートン図形・特異点・振動積分，上智大学数学講究録，No. 11.
- [2] Mutsuo Oka：On the Resolution of the Hypersurface Singularities, Advanced Studies in Pure Math. 8, 1986, Complex Analytic Singularities, pp. 405-436.
- [3] Takashi Yonemura：Hypersurface Simple K3 Singularities, Tohoku Mathematical journal, The Second Series, vol. 42, no. 3, 1990, pp. 351-380.