

海洋波のための数値スキームの研究

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

1 イントロダクション

海洋波浪は、通常その最低次の近似としては、さまざまな方向にさまざまな波長を持って伝播する波の重ねあわせとして表現される。これら非常に多くの波動モードが非線形相互作用を通して互いに影響しあう上に、風など外的な要因も複雑に絡んでくるために決定論的な記述法は非実用的であり、各種統計量による記述のみが現実的で有用な記述法となっている。これらの統計量の中でもっとも重要と思われるのが、各波動モードへのエネルギーの分配を表現する種々のエネルギースペクトルである。エネルギー密度、すなわち単位水平面積あたりの波動場の持つエネルギー E は、波数スペクトル $\epsilon(\mathbf{k})$ や方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ を用いて

$$E = \int \epsilon(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Phi(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (1)$$

のように表現される。ここで $\mathbf{k}$ は水平面内の(2次元)波数ベクトルで、最初の積分の積分領域は $\mathbf{k}$ 平面全体である。また ω は角周波数で $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$, θ は主伝播方向から計った角度を表す。周波数スペクトル $\Psi(\omega)$ は $\Phi(\omega, \theta)$ から

$$\Psi(\omega) = \int_0^{2\pi} \Phi(\omega, \theta) d\theta \quad (2)$$

で求められる。

現在のところ海洋波のエネルギースペクトルはエネルギー平衡方程式

$$\frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{c}_g(\mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \epsilon(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) = S_{nl} + S_{in} + S_{dis} \quad (3)$$

にしたがって時間的空間的に発展するものと考えられている。左辺は「波数ベクトル $\mathbf{k}$ を持つ波動モードのエネルギーは、対応する群速度 $\mathbf{c}_g(\mathbf{k})$ で伝播する」という線形理論の結果を表現している。一方、右辺はソース項であり、 S_{nl} は非線形相互作用による異なる波数成分間のエネルギー輸送、 S_{in} は風からのエネルギー流入、 S_{dis} は砕波によるエネルギー損失を表す。これら3つのソース項のうち本研究で対象とするのは S_{nl} の部分である。これに対しては Hasselmann (1962) によって理論的に導出された非常に複雑ながらも陽な表式が存在し、現在では多重積分を含むこの表式をいかに効率よく計算するかという点に主な関心が向けられている。 S_{nl} の具体的な表現は以下のようなものである。

$$S_{nl}(\mathbf{k}_4) = \iiint |T_{1234}|^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ \times \{N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)\} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \quad (4)$$

ここで $N(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$ はウェイブアクション密度、 T_{1234} は $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ に依存するある複雑な関数、 δ はデルタ関数を表す。

このHasselmann理論に基づくエネルギー輸送関数の表現は、次世代波浪予測モデルの基礎として現在世界各国で導入が進められている。しかし S_{nl} に対するこの表式の導出過程にはさまざまな仮定がなされており、まだまだより明確にされるべき点が残されているように思われる。例えば――

1. Hasselmann理論が与えるのは、あくまでも非線形性についての最低次のエネルギー輸送であり、より大きなエネルギー密度 E を持つ荒れた海になるほど、その理論的予測の誤差は増大するはずである。しかしこの理論では摂動展開を最低次で止めているために、はたしてどの程度の E に対してどの程度の信頼性があるのか、その適用範囲が定量的に明らかにされていない。
2. 海洋波浪のスペクトルは基本的に狭帯域である。外洋で十分発達した波動場に適用される Pierson-Moskowitz スペクトルは海洋波スペクトルの中では比較的幅の広いスペクトルであるが、それに対してもピーク振動数の2倍高調波でのスペクトル強度はピーク周波数におけるその約3%、3倍高調波では約0.4%にまで急激に減少する。一方Hasselmann理論においては、すべての波動成分が同じオーダーの強さを持つことを仮定しており、どのような波数の組み合わせに関しても

$$b(k_1) \gg b(k_2) b(k_3) \gg b(k_4) b(k_5) b(k_6) \quad (5)$$

などの漸近的な関係が仮定されている。¹ このような漸近的なオーダーリングは現実的なスペクトルには必ずしも成立しているとは考えられず、特にスペクトルのピーク付近からはずれた振動数領域での振舞いを不正確にする可能性が大きいのではないかと考えられる。

3. Hasselmann理論は線形理論を出発点とした漸近摂動理論であり、各波数モード間のエネルギーのやり取りは非常に弱く、したがってその時間スケールは振動数から決まる特徴的な時間スケールに比べてはるかに長いと想定されている。この仮定は波数ベクトルの空間で分解された各モード間の非線形相互作用を定式化する際に、例えばスキマティックに表現すると

$$\int \exp(i\Delta\omega t) dt \Rightarrow \delta(\Delta\omega) \quad (6)$$

のような置き換えとして現れる。ここで $\Delta\omega$ は振動数の共鳴条件からのずれを表し、例えば4波相互作用を考えているときには $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$ などとなる。この置き換える結果として、共鳴条件を満たす波動モード間にだけエネルギーのやり取りが起こり、共鳴条件を満たさないその他の相互作用はエネルギースペクトルの時間発展には寄与しないということになる。海洋波動場のエネルギーレベルにもよるが、現実的にはこのような明確な時間スケールの分離は必ずしも実現するとは考えられず、したがって非共鳴的な相互作用に対する定量的な評価もしておく必要があると思われる。

われわれは上記のような問題意識から、非常に多数の波動モードが共存する波動場の時間発展を水面波動を支配する基礎方程式に則ってほぼ厳密にシミュレートすることにより、エネルギースペクトルの時間変化率を数値的に求め、それをHasselmann理論の予測と比較することにより、Hasselmann理論に基づく非線形エネルギー輸送がはたしてどの程度信頼に足るものなのか、またもしそれが数値シミュレーションと異なる結果を与えるならば、いかなる補正を施すべきであるかなどについて批判的に検討したいと考えている。ここではこの目的を達成するための方法論と具体的な数値スキームについて述べることにする。

¹ここで $b(k)$ は各波動モードの「複素振幅関数」でその定義については次節参照。

2 水の波のハミルトン形式

水の波の発展を支配する基礎方程式系はハミルトン形式による定式化が可能である。次節で我々が数値シミュレーションの手法として採用するアルゴリズムがこのハミルトン形式を意識して開発されたものであるということ、またシミュレーションコードが与える時々刻々の水面変位と速度ポテンシャルの情報を、波動場の方向スペクトルなどに焼き直すためのテクニックがハミルトン系の正準変換に基づいて導入されたものであることなどから、ここでは水の波のハミルトン形式としての定式化について簡単に復習をしておく。

水は非粘性、非圧縮、またその運動は非回転で、したがって速度場はLaplace方程式を満たす速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ の勾配として表現されるものとする。また水深は無限大とする。この時よく知られているように水の波の運動を支配する基礎方程式は、 $\eta(\mathbf{x}, t)$ を自由表面の変位とすると

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, z, t) = 0, \quad -\infty < z \leq \eta(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

$$\phi_t + gz + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 = 0, \quad z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

$$\eta_t + \nabla_h \phi \cdot \nabla_h \eta = \phi_z, \quad z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (9)$$

である。ここで ∇_h は水平 (x - y) 面内での勾配演算子を表す。また鉛直方向の座標 (z) の原点は平均水位にあり、したがって $\eta(\mathbf{x}, t)$ の $\mathbf{x}$ についての平均はゼロとしておく。自由表面における速度ポテンシャルの値 $\psi(\mathbf{x}, t) (= \phi(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}, t), t))$ を用いると自由表面における境界条件(8),(9)はそれぞれ

$$\psi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla_h \psi)^2 - \frac{1}{2}W^2 \{1 + (\nabla_h \eta)^2\} = 0, \quad (10)$$

$$\eta_t + \nabla_h \psi \cdot \nabla_h \eta - W \{1 + (\nabla_h \eta)^2\} = 0 \quad (11)$$

$$(12)$$

と書くこともできる。ここで $W(\mathbf{x}, t)$ は自由表面における鉛直水粒子速度

$$W = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta(\mathbf{x}, t)} \quad (13)$$

を表す。

Zakharov(1968)によると、このような状況における水の運動はハミルトン系として定式化することができる。すなわち(7), (10),(11)で規定されるLaplace方程式の境界値問題は、全エネルギー

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz + \frac{1}{2}g \int \eta^2 d\mathbf{x} \quad (14)$$

をハミルトニアン、 $\eta(\mathbf{x}, t)$ と $\psi(\mathbf{x}, t)$ を正準変数として、正準方程式

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \psi(\mathbf{x}, t)}, \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \eta(\mathbf{x}, t)} \quad (15)$$

と表現される。ここで δ は汎関数微分を表す。ある時刻に空間のすべての点に対して $\eta(\mathbf{x})$ と $\psi(\mathbf{x})$ が与えられると、その後すべての時刻における水の波の運動が確定することになる。

(7),(10),(11)に基づいて水の波を時間的に追跡する具体的な数値シミュレーションの方法については次節で述べるが、それらが与えるのは各時刻における $\eta(\mathbf{x}, t)$ と $\psi(\mathbf{x}, t)$ である。一方われ

われが知りたいのは、波数スペクトルや方向スペクトルの時間変化であり、そのためには $\eta(\mathbf{x}, t)$, $\psi(\mathbf{x}, t)$ で表現された水面の状況を、波の集合として解釈し直す必要がある。これには Zakharov により導入された以下のような複素振幅関数 $b(\mathbf{k}, t)$ が有用である。

$\eta(\mathbf{x}, t)$ と $\psi(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換 $\hat{\eta}(\mathbf{k}, t)$, $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ から

$$b(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2k}} \hat{\eta}(\mathbf{k}, t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega(\mathbf{k})}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t), \quad \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{gk}, \quad k = |\mathbf{k}| \quad (16)$$

によって $b(\mathbf{k}, t)$ を定義する。フーリエ変換および線形結合はともに正準変換であり、 $b(\mathbf{k}, t)$ およびその複素共役を正準変数として用いると、もともとの正準方程式(15)は

$$i \frac{\partial b(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H(b, b^*)}{\delta b^*(\mathbf{k}, t)} \quad (17)$$

およびその複素共役で表現される。ここで $*$ は複素共役を表す。(16) より、 $\eta(\mathbf{x})$ と $\psi(\mathbf{x})$ は $b(\mathbf{k})$ から

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{k}{2\omega}} \{b(\mathbf{k}) + b^*(-\mathbf{k})\} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (18)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{-i}{2\pi} \int \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \{b(\mathbf{k}) - b^*(-\mathbf{k})\} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \quad (19)$$

のように求めることができる。

ハミルトニアン H を $b(\mathbf{k})$ のべき級数として表現するとその最低次 H_2 は $O(b^2)$ のオーダーで

$$H_2 = \int \omega(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (20)$$

のように対角化される。² このことから $|b(\mathbf{k})|^2$ はアクションの密度になっていることが分かる。 $b(\mathbf{k})$ が十分小さくてすべての高次項が無視できるならば、対応する正準方程式は

$$i \frac{\partial b(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \omega(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}, t) \quad (21)$$

となり、この意味で $b(\mathbf{k}, t)$ は線形波動場の固有モードとなっている。線形波動場と $b(\mathbf{k}, t)$ の関係をより明確にするために、 $b(\mathbf{k}, t)$ がある特定の波数 $\mathbf{k}_0$ においてのみゼロでない値を持つ場合を考えよう。

$$b(\mathbf{k}, t) = b_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0), \quad b_0: \text{実定数} \quad (22)$$

このとき対応する $\eta(\mathbf{x}, t)$ および $\psi(\mathbf{x}, t)$ は

$$\eta(\mathbf{x}, t) = a_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t), \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_0}{2\omega_0}} b_0, \quad (23)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\omega_0}{k_0} \right) a_0 \sin(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t) \quad (24)$$

で与えられる。すなわち、それぞれの $\mathbf{k}$ における $b(\mathbf{k})$ は、波数ベクトル $\mathbf{k}$ の単色な線形自由波を表現していることが分かる。³ したがって数値シミュレーションが与える各時刻の $\eta(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$

²むしろこう対角化されるように $b(\mathbf{k})$ の定義の中の $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ と $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ の係数の比を決めたというべきである。

³ $b(\mathbf{k})$ と $b(-\mathbf{k})$ は完全に独立であるという点に注意する。これは $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ や $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ が実関数のフーリエ変換であるという要請から $-\mathbf{k}$ における値と $\mathbf{k}$ における値が互いに複素共役の関係になければならないという事実と対照的である。この意味で $b(\mathbf{k})$ の $\mathbf{k}$ と $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ や $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ の $\mathbf{k}$ とはその「値打ち」に違いがある。

を(18)、(19)の関係を用いて $b(\mathbf{k})$ に変換することにより、波動場を線形自由波の集合として表現することが可能となる。

われわれが数値シミュレーション手法として次節で採用する「高次スペクトル法」では、計算の対象となる海面は長方形領域 ($0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$) で、波動場はこの周期で両方向に周期的と仮定されるために、波数ベクトルは

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi k}{L_x}, \frac{2\pi l}{L_y} \right), \quad (k, l: \text{整数}) \quad (25)$$

のように離散化される。 $\eta(\mathbf{x})$ 、 $\psi(\mathbf{x})$ は離散フーリエ級数で

$$\eta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\eta}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (26)$$

のように近似され、対応する $b(\mathbf{k})$ も

$$b_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \hat{\eta}_{\mathbf{k}} + i \sqrt{\frac{k}{2\omega}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \quad (27)$$

と離散的な $\mathbf{k}$ に対してのみ定義されることになる。

最低次のエネルギー密度 E (すなわち単位水平面積当たりの自由波のエネルギー) は

$$E = \left(= \int \epsilon(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |b_{\mathbf{k}}|^2 \quad (28)$$

で与えられる。また線形分散関係 $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$ を用いると

$$d\mathbf{k} = k dk d\theta = \frac{\omega(\mathbf{k})^2}{g} \cdot \frac{2\omega(\mathbf{k}) d\omega}{g} d\theta = \frac{2\omega(\mathbf{k})^3}{g^2} d\omega d\theta \quad (29)$$

が成り立つので、 E は方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ を用いて

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Phi(\omega, \theta) d\omega d\theta = \int \frac{g^2}{2\omega(\mathbf{k})^3} \Phi(\omega, \theta) d\mathbf{k} \approx \sum_{\mathbf{k}} \frac{g^2}{2\omega(\mathbf{k})^3} \Phi(\omega, \theta) \Delta S_{\mathbf{k}} \quad (30)$$

のように表現することもできる。ここで

$$\Delta S_{\mathbf{k}} = \Delta k_x \times \Delta k_y = \left(\frac{2\pi}{L_x} \right) \left(\frac{2\pi}{L_y} \right) \quad (31)$$

は $\mathbf{k}$ 平面における1メッシュあたりの面積である。(28) と (30) より $b(\mathbf{k})$ の絶対値は $\epsilon(\mathbf{k})$ もしくは $\Phi(\omega, \theta)$ から

$$|b_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \epsilon(\mathbf{k}) \Delta S_{\mathbf{k}} = \frac{g^2}{2\omega(\mathbf{k})^4} \Phi(\omega, \theta) \Delta S_{\mathbf{k}} \quad (32)$$

と定まる。また例えば2次元非線形エネルギー輸送関数 $T_2(\omega, \theta)$ なら方向スペクトルの時間変化率として

$$T_2(\omega, \theta) \equiv \frac{\partial \Phi(\omega, \theta)}{\partial t} = \frac{4\omega(\mathbf{k})^4}{g^2 \Delta S_{\mathbf{k}}} \text{Re} \left\{ b_{\mathbf{k}}^* \frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right\} \quad (33)$$

のように $b_{\mathbf{k}}$ の時間変化率から求められる。

以上をまとめると、直接数値シミュレーションによる Hasselmann モデルの検証方法としては以下のような筋書きが考えられる。

1. 波数スペクトル $\epsilon(\mathbf{k})$ もしくは方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ を適当に一つ与える。ここでは JON-SWAP や Pierson-Moskowitz といった海洋波の標準スペクトルを用いるのが妥当であろう。
2. (32) より $b(\mathbf{k})$ の絶対値を定め、スペクトルから決まらない $b(\mathbf{k})$ の位相部分は一様乱数で与える。こうして与えられたエネルギースペクトルを持つ $b(\mathbf{k})$ の場を一つ作り出す。
3. (18), (19) を用いてこれに対応する $\eta(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ の場を求める。
4. 水の波のシミュレーションコードを用いて、 $\eta(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ から $\frac{\partial \eta(\mathbf{x})}{\partial t}, \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial t}$ を求める。
5. (16) を用いて対応する $\frac{\partial b(\mathbf{k})}{\partial t}$ を求める。
6. (33) によりエネルギー輸送関数を求める。
7. 同一のエネルギースペクトル $\epsilon(\mathbf{k})$ を持ち、位相の取り方だけが異なる多数の $b(\mathbf{k})$ の実現に対して上記方法でエネルギー輸送関数を計算し、そのアンサンブル平均（相加平均）を求める。
8. こうして得られたエネルギー輸送関数を、同じスペクトルに対して Hasselmann 理論が与える S_{nl} と比較し検討する。

3 高次スペクトル法

水の波の時間発展は、そのハミルトン形式としての定式化からも分かるように、ある時刻における水面変位 $\eta(\mathbf{x})$ および表面における速度ポテンシャル $\psi(\mathbf{x})$ が与えられ、表面における境界条件からその時間変化率を求め、それによって $\eta(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ を次の時刻の値に更新するということが実行される。境界条件の中の $\mathbf{x}$ についての空間微分は $\eta(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ について陽に与えられているので特に困難はないが、鉛直水粒子速度 W を求めるためには各時刻で Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解かなければならない。この W の求め方には Green の定理を用いるもの、2次元問題に限られるが Cauchy の積分表示に基づくものなど種々あり、この W の求め方の数だけシミュレーションコードの種類があると言ってもいいであろう。そんな中でここでわれわれが採用する高次スペクトル法と呼ばれる手法について以下で簡単に説明する。

速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ に対して

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t), \quad (34)$$

なる展開形を仮定する。ここで $\phi^{(m)} \sim O(\epsilon^m)$ 、ただし ϵ は波の振幅の小ささを表わす微小パラメタ、また M は近似のオーダーであり、前節の Zakharov 方程式と同等の近似にするためには $M = 3$ と取ることになる。

それぞれの $\phi^{(m)}$ を $z = 0$ のまわりに Taylor 展開することにより、

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) \quad (35)$$

を得る。この式を展開して ϵ の各オーダーで揃えると

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \psi(\mathbf{x}, t), \\ \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^{(m-k)}(\mathbf{x}, 0, t) \quad (m = 2, 3, \dots, M)\end{aligned}\quad (36)$$

を得る。これらの境界条件と Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) = 0$ は $\phi^{(m)}$ に対する一連の Dirichlet 問題を与える。この手続きのポイントは、 $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ で与えられる複雑な境界を持つ領域での一つの Dirichlet 問題が、 $z = 0$ という単純な境界を持つ領域での $\phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) に対する M 個の Dirichlet 問題の組に変換されたことである。

特にここで仮定されているように波の場が水平座標 x, y についてそれぞれ周期 L_x, L_y で周期的な場合、 $\phi^{(m)}$ は 2 重 Fourier 級数で

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(m)}(t) e^{\kappa_{k,l} z} \exp\left(i \frac{2\pi k}{L_x} x\right) \exp\left(i \frac{2\pi l}{L_y} y\right), \quad (37)$$

$$\kappa_{k,l} = \sqrt{\left(\frac{2\pi k}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi l}{L_y}\right)^2} \quad (38)$$

と表現できる。 $\phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t)$ が (36) によって与えられた時、係数 $c_{k,l}^{(m)}$ は 1 回の 2 次元高速フーリエ変換 (FFT) の適用で求めることができ、したがって $\phi^{(m)}$ は容易に求めることができる。このような $\phi(\mathbf{x}, z)$ に対するディリクレ問題の解法は「高次スペクトル法」と呼ばれている。⁴

高次スペクトル法にはほぼ同時に発表された 2 つのバージョンがある、すなわち Dommermuth & Yue (1987) と、West et al. (1987) である。以上に述べたまでの手続きは両者に共通であるが、これから自由表面での鉛直速度 W を求める段階で両者には重要な違いがある。Dommermuth & Yue では上で求められた $\phi^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, M$) から

$$W(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) \quad (39)$$

によって W を計算する。一方 West et al. では W に対しても $\phi(\mathbf{x}, z)$ に対すると同様な ϵ についてのべき展開

$$W(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}, \quad W^{(m)} = \sum_{k=0}^m \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \phi^{(m-k)}(\mathbf{x}, 0, t) \quad (40)$$

を仮定し、境界条件の中の W を含む項については、例えば

$$W[1 + (\nabla_h \eta)^2] \Rightarrow \left(\sum_{m=1}^M W^{(m)} \right) + \left(\sum_{m=1}^{M-2} W^{(m)} \right) \times (\nabla_h \eta)^2. \quad (41)$$

のように ϵ について、したがってまた正準変数 $\eta(\mathbf{x})$ と $\psi(\mathbf{x})$ についてコンシステントなオーダーリングを保つように扱われる。これはハミルトニアンを $b(\mathbf{k})$ について $(M+1)$ 次の項までで打ち切り、それから正準方程式により導出される系を解いていることに対応する。このために West et al.

⁴ 「高次スペクトル法」という名前は Dommermuth & Yue (1987) らの命名によるものであるが、ここでは West et al. (1987) も含めてこの名前と呼ぶことにする。

の方法は近似の次数 M をどのように取ろうとも、もともとの方程式が持っているハミルトン性を保持している。ここでは水の波のハミルトン形式に基づいて導入された「複素振幅関数」 $b(\mathbf{k}, t)$ の発展に興味があるので、自然な選択として West et al. の方法を採用することにする。

高次スペクトル法は非線形項の計算を物理空間で行ういわゆる擬スペクトル法の一つであり、したがって何らかの方法でエイリアジング誤差を取り除く必要がある。ここでは述べないがこのエイリアジング誤差の除去方法にも両者には大きな違いがある。

4 Zakharov 方程式による高次スペクトル法のチェック

Zakharov(1968) (Krasitskii, 1994 も参照) によると (14) で定義されるハミルトニアン H は、非線形性が弱いという仮定のもとで $O(b^5)$ より高次の項をすべて省略すると

$$\begin{aligned}
 H(b, b^*) = & \int \omega_0 b_0 b_0^* d\mathbf{k}_0 + \int V_{0,1,2}^{(1)} (b_0^* b_1 b_2 + b_0 b_1^* b_2^*) \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{012} \\
 & + \frac{1}{3} \int V_{0,1,2}^{(3)} (b_0 b_1 b_2 + b_0^* b_1^* b_2^*) \delta_{0+1+2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{012} \\
 & + \int W_{0,1,2,3}^{(1)} (b_0^* b_1 b_2 b_3 + b_0 b_1^* b_2^* b_3^*) \delta_{0-1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{0123} \\
 & + \frac{1}{2} \int W_{0,1,2,3}^{(2)} b_0^* b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{0123} \\
 & + \frac{1}{4} \int W_{0,1,2,3}^{(4)} (b_0 b_1 b_2 b_3 + b_0^* b_1^* b_2^* b_3^*) \delta_{0+1+2+3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{0123}
 \end{aligned} \quad (42)$$

のようにべき級数で表現でき、これに対する正準方程式(17)は

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial b(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = & \omega(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}, t) + \int V_{0,1,2}^{(1)} b_1 b_2 \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} \\
 & + 2 \int V_{2,1,0}^{(1)} b_1^* b_2 \delta_{0+1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} + \int V_{0,1,2}^{(3)} b_1^* b_2^* \delta_{0+1+2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} \\
 & + \int W_{0,1,2,3}^{(1)} b_1 b_2 b_3 \delta_{0-1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} \\
 & + \int W_{0,1,2,3}^{(2)} b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} \\
 & + 3 \int W_{3,2,1,0}^{(1)} b_1^* b_2^* b_3 \delta_{0+1+2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} \\
 & + \int W_{0,1,2,3}^{(4)} b_1^* b_2^* b_3^* \delta_{0+1+2+3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123}
 \end{aligned} \quad (43)$$

のようになる。ここで $V_{0,1,2} = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, $W_{0,1,2,3} = W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$, $b_1 = b(\mathbf{k}_1, t)$, $\delta_{0-1-2} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, $d\mathbf{k}_{123} = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3$ などの簡便な記法を用いた。また $V_{0,1,2}$, $W_{0,1,2,3}$ などに対する具体的な表式については Zakharov(1968), Krasitskii(1994), Lake & Yuen (1982) などを参照されたい。通常この式からさらに共鳴に近い4波相互作用のみを抽出してより簡便な形に帰着させたものを Zakharov 方程式と呼ぶことも多いが、ここでは上記の式を単に Zakharov 方程式と呼ぶことにする。なお数値計算のために (43) を離散化する際には

$$\begin{aligned}
 \int \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_{12} & \longrightarrow \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{l}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{l}_2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{l}, \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2} \\
 V^{(i)} & \longrightarrow (2\pi)^i V^{(i)}, \quad W^{(i)} \longrightarrow (2\pi)^2 W^{(i)}
 \end{aligned} \quad (44)$$

などのいくつかの自明な書き換えをほどこす必要がある。ここで $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタを表す。

前節で述べたように、高次スペクトル法のうち、West et al. のバージョンは正準変数である $\eta(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ についてコンシステントなオーダリングを行っており、したがって $(M+1)$ 次のオーダーで打ち切ったハミルトニアンから正準方程式として導出される発展方程式を表現しているはずである。このことから $M=3$ とした場合の West et al. の高次スペクトル法と上記の Zakharov 方程式はまったく同値のはずである。Zakharov 方程式に基づいて $\partial b(\mathbf{k}, t)/\partial t$ を計算するプログラムは、6重DOループを含み、しかもその中に $\delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$ などに対応する多くのIF文を含むために、シミュレーション向き的高速なプログラムの開発にはかなりの困難が予想されるが、その反面、プログラム的高速化をまったく意図せず(43)をそのまま忠実にプログラム言語に翻訳するだけであれば、プログラムの構造自身は非常に単純で、ミスを犯す可能性はきわめて低い。この意味で Zakharov 方程式は高次スペクトル法に基づくプログラムに対する完全に独立な検証の手段を与える。ここではまったく同一の $b(\mathbf{k})$ に対して、高次スペクトル法ならびに Zakharov 方程式に基づく独立なふたつのプログラムで $\partial b(\mathbf{k}, t)/\partial t$ を計算し、その同一性を確認することにする。

方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ は Pierson-Moskowitz スペクトルで与えられるものとする。主な伝播方向を x とし、その直角方向に y 軸を取る。また高次スペクトル法の M は Zakharov 方程式に合わせて $M=3$ と取る。「無エイリアジング誤差条件」と M の値から、 x 方向、 y 方向の最大波数のモード番号 $k_{\max}$, $l_{\max}$ をそれぞれ $k_{\max} = N_x/4$, $l_{\max} = N_y/4$ と決める。ここで N_x , N_y はそれぞれ x 方向、 y 方向のメッシュ数。またスペクトルピークのモード番号 k_p は、その4倍高調波 $4k_p$ が含まれるように $k_p = k_{\max}/4 = N_x/16$ としておく。ピークのモード番号 k_p は周期 L_x に含まれる主波の数を表している。方向依存性を $\cos^2 \theta$ とするとき、エネルギー密度の重みをつけた x -方向、 y -方向の平均波数の比は2:1になることから、ここでは $L_x = L_y$, $N_x = 2N_y$ とする。なお数値計算では時間と空間は、重力加速度 g とスペクトルのピークに対応する波数(及び振動数)がともに1になるように規格化されている。この規格化のもとでは $L_x = 2\pi k_p$ となる。例えば、 $N_x = 2^{12} = 4096$ のとき、 $N_y = 2^{11} = 2048$, $k_{\max} = 1024$, $l_{\max} = 512$, $k_p = 256$ 、したがって数値計算の対象となる物理空間での海面の広さは $512\pi \times 512\pi$ などとなる。

Zakharov 方程式に基づくプログラムで最も計算時間を消費するのは4波相互作用を表している多重積分(多重和)の計算であり、したがってCPU時間は総メッシュ点数 $N (=N_x^2/2)$ の増加に伴い N^3 (or N_x^6) のように増大していくものと期待される。一方高次スペクトル法に基づくプログラムではCPU時間の大部分は頻繁に呼び出されるFFTルーチンおよび N に比例する四則演算に費やされるために、CPU時間はせいぜい $N \ln N$ (or $N_x^2 \ln N_x$) 程度で増大するものと思われる。図1は岐阜大学情報処理センターのベクトル計算機(Fujitsu VX1: 2.2GFLOPS)およびスカラー計算機(Fujitsu S-7/7000: SPECfp92=351)でのCPU時間をプロットしたものである。図中で west_s, west_v, zakh_s はそれぞれ、高次スペクトル法に基づくプログラムをスカラー計算機で走らせた場合、同プログラムをベクトル計算機で走らせた場合、Zakharov 方程式に基づくプログラムをスカラー計算機で走らせた場合のCPU時間を表わしている。後者のプログラムをベクトル計算機上で走らせたものは図示していないが、プログラムの大部分がベクトル化できないためにスカラー計算機で走らせたものに比べてかなり遅くなる。上で述べた予想どおり Zakharov 方程式に基づくプログラムではCPU時間が N_x の6乗、高次スペクトル法に基づくプログラムでは大きな N_x に対してはほぼ2乗で増えているのが見える。

我々はエネルギースペクトル、エネルギー輸送関数といった統計量に興味があるので、計算

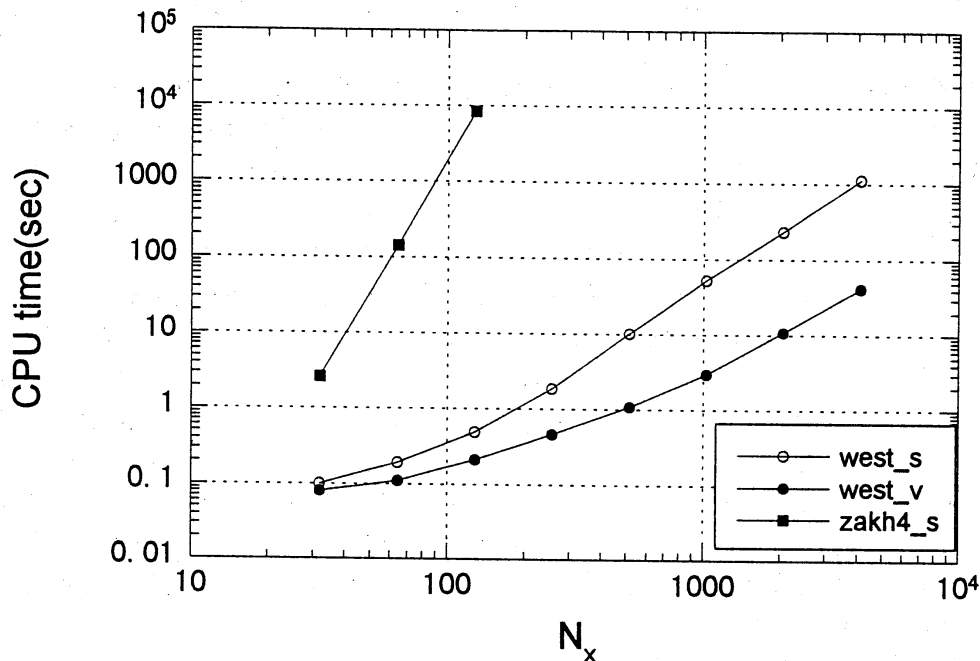


図1: 高次スペクトル法とZakharov方程式の演算スピードの比較

領域に含まれる波の数はできるだけ多い方が好ましい。図1に示された結果によると、例えば $N_x = 1024$ (すなわち $L_x = L_y = 64\lambda_p$) のケースを Zakharov 方程式に基づいて扱おうとすると、一つの波動場の瞬時的な時間変化率を計算するだけに50年以上もかかる計算になる。一方同じケースでも高次スペクトル法を用いれば、スカラー計算機なら52秒、ベクトル計算機ではたった3秒で計算ができる。ただしここで一つ注意しておきたいのは、この比較は高次スペクトル法と Zakharov 方程式の公正な比較にはなっていないという点である。高次スペクトルに基づくプログラムでは、今後の大規模計算に用いるために、ベクトル計算機向き的高速なFFTルーチンを用いるなど高速化に配慮している一方で、Zakharov 方程式に基づくプログラムは高速化の工夫などプログラムを煩雑にする要素は極力排除して、とにかくミスがなく正しい結果を与えることだけを目的に作られたものであるという点である。したがってここで紹介した計算速度に関する結果はあくまでも参考程度として理解すべきもので、工夫いかんによっては Zakharov 方程式に基づきながらも格段に高速なプログラムの開発が可能であるかもしれない。

計算速度以上に重要な点は、高次スペクトル法が与える $\partial b(\mathbf{k})/\partial t$ がはたして Zakharov 方程式が与えるそれと一致するかという点であるが、それに対する答えは文句なしにYESである。上に示したように Zakharov 方程式に基づくプログラムはきわめて多くのCPU時間を消費するので、比較的小さな N_x に対してのみ比較を行った。 $N_x = 128$ の場合と $N_x = 256$ の場合、そしてエネルギー密度 $E = 0.01$ の場合に両者が与える $|\partial b(\mathbf{k})/\partial t|$ を比較した結果、 $-k_{\max} < k < k_{\max}$, $-l_{\max} < l < l_{\max}$ の範囲のすべてのモードに対してその違いは 2.5×10^{-17} を超えることはなかった。すべての計算が倍精度で行われていることを考えると、この相違の小ささは両者が完全に同値であることを意味している。理論的研究の基礎とされる Zakharov 方程式タイプの定式化と、もっぱら非定常水面波動の数値シミュレーションを目指して開発された高次スペクトル法のような定

式化、このまったく異なる2つの定式化を直接比較してその完全な同等性、また後者の計算効率の良さを、このような形で明確に示した計算は筆者の知る限りこれがはじめてではないかと思われる。

以上で高次スペクトル法はZakharov方程式とまったく同じ $\partial b(k)/\partial t$ をずっと短いCPU時間で与えてくれることが分かった。この高次スペクトル法の優位性は高次理論に進もうとするときにより鮮明になる。Hasselmannのエネルギー輸送関数 S_{nl} は3次のZakharov方程式から乱雑位相近似などの手続きを経て導出することができる。「イントロダクション」でも述べたように、それが与えるのはあくまでもエネルギー輸送の最低次の効果であり、したがってその有効範囲を定量的に検討するためには、より高次項の効果を考慮しなければならないであろう。このような問題をZakharov方程式に則した路線で取り扱おうとすると、まず第一により高次の項を含むZakharov方程式を扱う必要がある。これはすでにKrasitskii(1994)によって導出されているが、その係数はいかにも複雑で導出をフォローしてその正しさを確認することすら並大抵のことではない。それに対して、高次スペクトル法においては、より高次理論に進むことは単に非線形の次数 M の値を増やすだけのことであり、FORTRANプログラムに数行の修正を加えることですべてが終わる。高次スペクトル法のCPU時間は M に比例して増加すると言われており、また「無エイリアジング誤差条件」から要求される配列のサイズの増大を考慮しても、何らかの本質的な困難が発生するとは考えられない。

以上で説明した方法論ならびに数値スキームを用いたHasselmann理論の検証の試みについてはまた別の機会に報告する。

参考文献

- [1] Hasselmann, K: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. J. Fluid Mech., 12 (1962), 481-500.
- [2] Zakharov, V.E.: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Transl.), 2 (1968), 190-194.
- [3] Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.P.: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. J. Fluid Mech., 184 (1987), 267-288.
- [4] West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, M. and Milton, R.L.: A new numerical method for surface hydrodynamics. J. Geophys. Res., 92 (1987), 11,803-11,824.
- [5] Krasitskii, V.P.: On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. J. Fluid Mech., 272 (1994), 1-20.