

細長い物体を含む二つの物体のおそい運動

東大 生研 成瀬 文雄

§ 1 あらまし

細長い物体と 3 次元物体または二つの細長い物体が緩慢な運動をする場合の流れを、つぎのような仮定で研究する。1. 基礎方程式はストークス方程式である。2. 細長い物体の形は任意で、代表的長さを l^* とする。細長い軸に直角な断面は任意の形で、それが円への写像関数は既知であるとす、その代表的長さを b^* とする。また $b^*/l^* = \kappa \ll 1$ と仮定する。3. 細長い物体の速度 $U_B^*(s^*)$ は自由に与えられているとする。また物体が有るときその速度 $U^*(r^*)$ 、圧力 $P^*(r^*)$ はストークス方程式を満たす範囲内で自由に与えられているとする。ここで s^* は細長い物体の中心線に沿って基準点から測った長さであり、 r^* は位置ベクトルである。4. 3 次元物体が単独で直進運動あるいは回転運動をしているときのストークス近似の解は既知であるとする。3 次元物体の代表的大きさを a^* とし、

V_a^* で進むとき物体に働く力は $-6\pi\mu K V_a^* a^* \ell$ で、 ω_a^* で回転するとき物体に働くトルクは $-8\pi\mu K' \omega_a^* a^{*3} e$ で与えられるとする。ここで ℓ, e は単位ベクトルで、 K, K' は物体の形で定まる定数である。5. 3次元物体は細長い物体より十分離れておけるとする。すなわち3次元物体から細長い物体までの最短距離を ℓ^* とすると、 $a^*/\ell^* \ll 1$ とし、3次元物体の直進運動によって誘起される流れをストークス源による流れで、また回転運動によって誘起される流れを二重ストークス源による流れでおさかえる。

以上のような仮定のもとに、§2で流れの場を支配する積分方程式が与えられつなぎ法で導出される。この積分方程式は一般の場合には $\varepsilon = (\log \ell/b^*)^{-1}$ による展開の形で解かれるが、特別の場合には厳密解が存在し、その解は $O(\frac{b^*}{\ell^*} \text{ or } \frac{b^{*2}}{\ell^{*2}}; \frac{a^{*2}}{\ell^{*2}} \text{ or } \frac{a^{*3}}{\ell^{*3}})$ を無視する範囲内でストークス方程式の解と一致する。

つぎに §3 で、断面が一様なリングと対称な3次元物体が運動する四つの場合およびそれぞれの断面が一様な二つのリングが運動する四つの場合、合せて8個の場合について上記積分方程式の厳密解が求められる。さらに §4 では、§3 で求められた厳密解から $O(\varepsilon^2)$ または $O(\varepsilon^3)$ を省略した式を用いて、2物体の運動による干渉効果が調べられている。

さて今迄に行われた細長い物体を含む2物体の干渉問題の

研究は、 ε 展開によつて $O(\varepsilon^2)$ まで計算されたものに限られてゐる。まず球の背後に一樣な細長い直線棒（断面円）があるときの流れが N. J. Mehta 4 D. F. Katz¹⁾ によつて研究された。すなわち細長い直線棒のまわりの流れを解くための積分方程式とストークス流における球定理を用いて、この流れが ε による展開法で $O(\varepsilon^2)$ まで解析されてゐるが、解析計算の一部に誤りがあると思われる。また球状の頭部をもつ微小な生物（ういの精虫など）が、べん毛の平面波動運動によつて推進する場合が成瀬²⁾ によつて解析されてゐる。すなわち一枚の無限平板を壁としてもつ流体中を3次元物体及び細長い物体が運動する場合の流れを支配する積分方程式を ε による展開法で、 $O(\varepsilon^2)$ まで解析し、べん毛部分の断面の變形をも考慮したときの前進速度をささる式が導出されてゐる。

以上の研究と比較して本研究の特徴はつぎのような点にある。(i) 任意の断面をもつ細長い物体を含む2物体の干渉問題に対する積分方程式を導出すること、(ii) 今迄に解析されてない8種類の場合につりてこれら積分方程式の厳密解を求めること、(iii) 上記8種類の場合につりて、2物体が運動するときの干渉効果の定性的な様子を明らかにすることなどである。

§2. 流れの場の積分方程式

3次元物体の運動により誘起されるレイノルズ数 $R_1 (= \frac{V a^* a^*}{\nu})$ および細長い物体の運動により誘起されるレイノルズ数 R_2 (内部領域では $\frac{U_0 b^*}{\nu}$, 外部領域では $\varepsilon U_0 l^* / \nu$)、いずれもが小さいとしてストークス方程式を用いる。いま速度を q^* , 圧力を p^* , 代表的長さを l_0 , 代表的速度を U_0 とし, p, q, ψ を

$$q = q^* / U_0, \quad p = p^* l_0 / \mu U_0, \quad \psi = \psi^* / l_0 \quad (1)$$

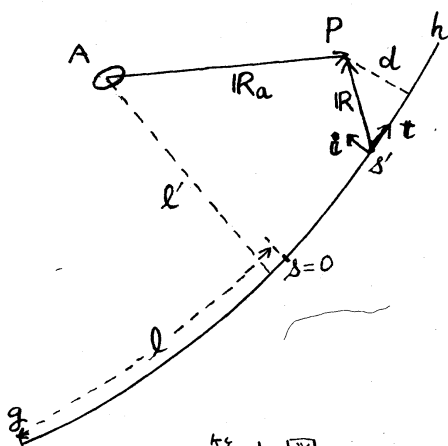
で定義するとき、基礎方程式は

$$\Delta q - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot q = 0 \quad (2)$$

のようになる。以下において物理量は $*$ をつけ、無次元量は $*$ をとって表わすことにする。

[I] 3次元物体と細長い物体の運動

3次元物体は中心位置を A とし、速度 U_a で直線運動をしているか、角速度 ω_a で回転しているとする。細長い物体の速



第1図

(今後図では $*$ は除く)

度は $U_s(s)$, 物体がないときの速度、圧力は $U(r)$, $P(r)$ とする。

いま考えている領域の一点を P とし、ベクトル lR , lR_a を第1図のように定める。また d は P と細長い物体とを結ぶ最短距離とする。このとき $R_a^* / a^* \sim O(1)$ を

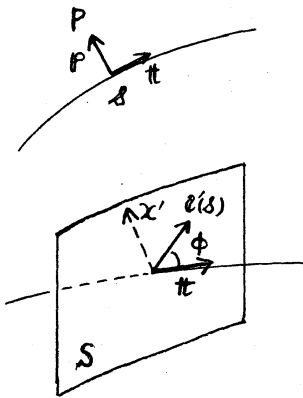
満たす点は3次元物体の内部領域にあり、 $d^*/b^* \sim O(1)$ を満たす点は細長い物体の内部領域にある。また $R_a^*/a^* \sim O(1/R_1)$ および $d^*/l^* \sim O(1)$ を満たす点が外部領域を構成する。内部領域における内部解は3次元物体または細長い物体がそれぞれ単独で運動しているときの内部解に等しいと考えてよく、2物体の干渉効果はまず外部解に現われる。外部変数は(1)の η , p , R をもつてくれればよい。ただし l_0 として l^* を、 U_0 として物体の代表的速度 V_0 (回転のときには $\omega_0 l^*$) を選ぶことにする。第1図で示される R , R_a を用いて、外部解の速度は

$$\eta = U(t) - \int_0^h C(s) \left\{ \frac{\hat{l}(s)}{R} + \frac{(R(s) \cdot R)}{R^3} R \right\} ds - K \hat{V} \left\{ \frac{a \hat{l}}{R_a} + \frac{a(\hat{l} \cdot R_a)}{R_a^3} R_a \right\} + \frac{K a^3 \hat{\omega}}{R_a^3} \text{ex} R_a \quad (3)$$

の形で表わされる。ここで第2項は強さ $C(s)$ 、方向 $\hat{l}(s)$ のストークス源が細長い物体の中心線上に分布したときに誘起される速度であり、第3項および第4項は3次元物体の直進および回転運動によって誘起されるストークス源および二重ストークス源に由来する速度を現わしている。ここで3次元物体の形として、回転運動をしたときに誘起される速度が(3)の第4項で表示されるような形であることを仮定した。これらの表示に現われるストークス源または二重ストークス源の強さおよび方向はいずれも未定であって、共通領域における外部解と内部解のマッチングから決定される。さてマッチン

グへと進むために、外部解および内部解が共通領域でどのような形をしているかを知らなければならない。以下にこれらの振舞いについて考察しよう。

(i) 共通領域の点 P が細長い物体の近傍にあるとき



第2図

まず外部解が共通領域でどのように表示されるかを考える。 P から最短距離にある細長い物体上の点 s とする。いま $\vec{r} = P$, π を s 点で物体の中心線に接する単位ベクトル、 $e_{x'}$ を x' 方向 (x' は $l(s)$ を π に直角な面 S に射影したときの方角) の単位ベクトル、 ϕ を l' と π のなす角とすると、速

度 q はこの領域で

$$q_b = U(s) + 4C(s) \cos \phi \left(\log \frac{P}{2} + \frac{1}{2} \right) \pi + 2C(s) \sin \phi \left\{ \left(\log \frac{P}{2} \right) e_{x'} - \frac{(P \cdot e_{x'})}{P^2} P \right\} + K(s) - K \hat{V} \left\{ \frac{a l}{R_a} + \frac{a(l \cdot R_a)}{R_a^3} R_a \right\}_s + K' a^3 \hat{\omega} \left(\frac{e_{x'} R_a}{R_a^3} \right)_s, \quad (4)$$

および

$$K(s) = \left\{ \int_s^{s-\varepsilon'} + \int_{s+\varepsilon'}^h \right\} \left[-C(s') \left\{ \frac{l(s')}{R} + \frac{(l(s') \cdot R)}{R^3} R \right\} \right] ds' - 4C(s) \log \varepsilon' \left(\pi \cos \phi + \frac{e_{x'} \sin \phi}{2} \right) \quad (5)$$

のように表わされる。^{3), 4)} ここで「サフィックス s は $R_a = \vec{As}$ を意味する。また (5) で、 ε' は $l \gg \varepsilon' \gg b$ を満足する微小量であり、 $R = \vec{s's}$ である。

つぎに内部解の共通領域における振舞いについて考えて見よ

う。内部解は細長い物体が単独で運動している時と同じであるから、共通領域でつぎのような形に存在することが知られている。

3), 4), 5) 内部変数 $\bar{P} = Pl^*/b^*$ とくって、 q_b は

$$q_b = (A \log \frac{\bar{P}}{a_1} + \omega_b(s))\pi + B \left[\left(\log \frac{\bar{P}}{a_1} - \bar{b}_1(l) + \frac{1}{2} \right) i - \frac{(l \cdot \bar{P})}{\bar{P}^2} \bar{P} - c_1(l) j \right] + \omega_0(s) + O\left(\frac{1}{\bar{P}}\right) \quad (6)$$

のように表わされる。ここで A, B は未定の定数、 i, j は互いに直交し、かつ π にも直交する未定の単位ベクトル、 $a_1, \bar{b}_1(l), c_1(l)$ は物体の断面の形によってきまる断面係数で、断面の形の円への写像関数がきまるとき、後述の (23) で決定される。また $\omega_0(s) = \omega_b \pi + \omega_0(s)$ とおいた。

(ii) 共通領域の点 P が 3 次元物体の周辺にあるとき

まず外部解について考へるとき、速度 q は共通領域で

$$q = \omega(A) - \int_0^h C(s') \left\{ \frac{l(s')}{R} + \frac{(l'(s') \cdot R)}{R^3} R \right\}_A ds' - K \hat{V} \left\{ \frac{a l}{R_a} + \frac{a(l \cdot R_a)}{R_a^3} R_a \right\} + K' a^3 \hat{\omega} \left(\frac{e \times R_a}{R_a^3} \right) \quad (7)$$

となる。ここでサイックス A は $R = \vec{s}A$ を意味する。つぎに

内部解については内部変数 $\bar{R}_a = R_a \cdot \frac{l^*}{a^*}$, $\bar{a} = a \cdot \frac{l^*}{a^*} = 1$ とくるとき、

速度 q は

$$q = \omega - K \hat{V} \left\{ \frac{\hat{l}}{R_a} + \frac{(\hat{l} \cdot \bar{R}_a)}{R_a^3} \bar{R}_a \right\} + \frac{K' \hat{\omega}}{R_a^3} \hat{e} \times \bar{R}_a \cdot \frac{a^*}{l^*}, \quad (8)$$

$$\hat{V} = V_a - V, \quad \hat{\omega} = \omega_a - \omega \quad (9)$$

のようにつきる。ここで V および ω は物体が有りときの A

点の速度および渦度に細長い物体の運動により A 点に誘起される速度および渦度を加えたものである。また $\hat{e}$, $\hat{e}$ は $\hat{v}$, $\hat{\omega}$ および物体の形によって決定される単位ベクトルである。

さて共通領域における外部解および内部解の振舞が分ったから、マッチングを行い積分方程式を導出することができ。まず細長い物体の周辺でのマッチングを (4), (5), (6) を用いて行う。つぎに

$$C(s) \mathbf{e}'(s) = \frac{A(s)}{4} \pi + \frac{I(s)}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{J(s)}{2} \mathbf{e}_2, \quad (10)$$

と置く。ここで $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は互いに直交しかつ π に直行する単位ベクトルで、この範囲で解析に都合のよい方向をとつてよい。このとき $A(s), I(s), J(s)$ を未知関数、 $\hat{v}, \hat{\omega}$ を未知変数とするつぎの積分方程式が得られる。

$$K(s) + \pi = A(\lambda' - \frac{1}{2} - \log a_1) \pi + [(\lambda' + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(s_1) - \log a_1) I - C_1(s_1) J] \mathbf{e}_1 + [-C_1(s_1) I + (\lambda' + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(s_1) - \log a_1) J] \mathbf{e}_2 + W_0(s) - W(s), \quad (11)$$

$$\pi = -K \hat{v} \left\{ \frac{a \mathbf{e}}{R_a} + \frac{a(\mathbf{e} \cdot R_a)}{R_a^3} R_a \right\} + \frac{K' \alpha^3 \hat{\omega}}{R_a^3} \mathbf{e} \times R_a, \quad (12)$$

$$K(s) = \left\{ \int_{\mathcal{S}}^{s-\varepsilon'} + \int_{s+\varepsilon'}^h \right\} \left[-\frac{\frac{A}{4} \pi + \frac{1}{2}(I \mathbf{e}_1 + J \mathbf{e}_2)}{R} - \frac{[\frac{A}{4}(R \cdot \pi) + \frac{1}{2}\{I(R \cdot \mathbf{e}_1) + J(R \cdot \mathbf{e}_2)\}]}{R^3} R \right] ds' - (A \pi + I \mathbf{e}_1 + J \mathbf{e}_2) \log \varepsilon', \quad (13)$$

ここで $\lambda' = \log 2\ell^*/b^*$, $R = \vec{s}s$, $R_a = \vec{A}s$ である。

つぎに 3 次元物体近傍でのマッチングを (7), (8) を用いて行うとき

$$\left. \begin{aligned} W &= U(A) - \int_a^h C(s') \left\{ \frac{R(s')}{R} + \frac{(R(s') \cdot R)}{R^3} R \right\}_A ds' \\ \omega &= \frac{1}{2} \text{rot } U(A) - \frac{1}{2} \text{rot} \left[\int_a^h C(s') \left\{ \frac{R(s')}{R} + \frac{(R(s') \cdot R)}{R^3} R \right\}_A ds' \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

および

$$R = \hat{R}, \quad e = \hat{e} \quad (15)$$

が得られるから、(9) を用いて

$$\hat{W} = W_a - U(A) + \int_a^h C(s') \left\{ \frac{R(s')}{R} + \frac{(R(s') \cdot R)}{R^3} R \right\}_A ds' \quad (16)$$

$$\hat{\omega} = \omega_a - \frac{1}{2} \text{rot } U(A) + \frac{1}{2} \text{rot} \left[\int_a^h C(s') \left\{ \frac{R(s')}{R} + \frac{(R(s') \cdot R)}{R^3} R \right\}_A ds' \right] \quad (17)$$

となる。ここで $\hat{R}, \hat{e}$ は $\hat{W}, \hat{\omega}$ および物体の形の関数と考
えるとき、(11) ~ (13), (15) ~ (17) の連立方程式系を解くこと
によって、 $A(s), I(s), J(s)$ および $\hat{W}, \hat{\omega}$ が決定できる。

いま細長い物体の ds 部分に働く力を $f \cdot ds$ とするとき

$$f = 2\pi\mu V_0 \{ A e + 2(I R_1 + J \hat{e}_1) \} \quad (18)$$

であるから、細長い物体に働く力 F およびトルク G は

$$F = l^* \int_a^h f \, ds \quad (19)$$

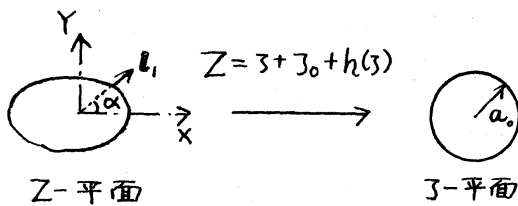
$$G = l^{*2} \int_a^h r \times f \, ds \quad (20)$$

で与えられる。また 3次元物体に働く力 F_a , トルク G_a は

$$F_a = -8\pi\mu V_0 a^* k \hat{V} \hat{e} \quad (21)$$

$$G_{Ta} = -8\pi\mu\omega_0 a^{*3} K' \hat{\omega} \hat{e} \quad (22)$$

とする。(18) ~ (22) の力とトルクの式には $A, I, J, \hat{v}, \hat{\omega}$ が含まれるから、前述の断面係数 $a_1, \bar{b}_1(l_1), C(l_1)$ が現われるが、これらは細長い物体の断面の形によって変化する。いま物体



第3図

の断面形を Z 平面上で与え、この断面形が字像関数 $Z = z + z_0 + h(z)$ によって z 平面上の半径 a_0 の円に字像

されるとき、 $a_1, \bar{b}_1(l_1), C(l_1)$ は以下の形をとる。(3), (5)

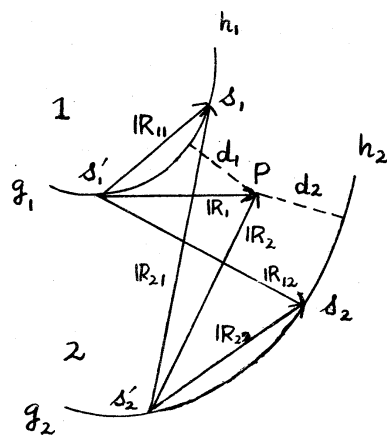
$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{b}, \quad \bar{b}_1(l_1) = -\frac{\delta}{2} \cos(\beta + 2\alpha), \quad C(l_1) = \frac{\delta}{2} \sin(\beta + 2\alpha) \\ \delta e^{i\beta} &= \frac{1}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} \frac{h(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta} \{1 + h'(ae^{i\theta})\}} d\theta = \frac{1}{2\pi a} \oint_C \frac{\bar{Z}}{iJ^2 \frac{dZ}{d\bar{Z}}} d\bar{Z} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これらの断面係数は2次元物体のまわりの流れの時に現われるものと全く同一で、2次元物体のまわりの流れで計算したものがそのまま使用でき、楕円、矩形、円弧形、正 n 角形 (正 n 多角形を含む)、種種のレンズ形、二等辺三角形、菱形、二枚の平板の作る楔形などに対し、厚み比をいろいろ変えて計算されている。

またこれら積分方程式の厳密解は、ストークス方程式から $O(\frac{\delta}{L} \ln \frac{L}{a_0})$; $(\frac{a_0}{L})^2$ 或 $(\frac{a_0}{L})^3$ を省略した程度の精度をもつ。

(II) ニつの細長い物体の運動

細長い物体についての記号は今迄細長い物体に対して用いられた記号をそのまま用いるが、サフィックス 1, 2 をつけて細長い物体 1 および 2 を区別する。また物体が有る時の速



第4図

度、圧力は前と同様に $W(\eta)$, $P(\eta)$

とする。いま空間中の一点を P と

し、 d_1^* , d_2^* を P から物体 1 また

は 2 までの最短距離とすると、

$d_1^*/b_1^* \sim O(1)$ の領域が物体 1 の内部領域、

$d_2^*/b_2^* \sim O(1)$ の領域が物体 2 の内部領域

となり、 $d_1^*/\ell_1^* \sim O(1)$ および $d_2^*/\ell_2^* \sim O(1)$

を満たす点が外部領域を構成する。

いま二つの細長い物体の最短距離を d^* とし、 $d^* \gg b_i^*$ ($i=1,2$) を仮定する。このとき内部解は物体 1 または 2 が単独で運動してゐるときの内部解と同一であるから、共通領域における内部解として (6) がそのまま使用できる。

また外部解の速度は、第4図のように IR_1 , IR_2 , IR_{11} , ... を定め、物体 1 および 2 の中心線上に $C_1(\delta_1)\ell_1'(\delta_1)$ および $C_2(\delta_2)\ell_2'(\delta_2)$ のストークス源を分布するとき、

$$q = W(\eta) - \int_{g_1}^{h_1} C_1(\delta_1) \left\{ \frac{\ell_1'(\delta_1)}{R_1} + \frac{(\ell_1'(\delta_1) \cdot IR_1)}{R_1^3} IR_1 \right\} d\delta_1 - \int_{g_2}^{h_2} C_2(\delta_2) \left\{ \frac{\ell_2'(\delta_2)}{R_2} + \frac{(\ell_2'(\delta_2) \cdot IR_2)}{R_2^3} IR_2 \right\} d\delta_2 \quad (24)$$

のように表現される。いま物体 i の共通領域内の一点を P とし、 P から最短距離にある物体 i 上の点を δ_i とするとき、 P 点での速度は (4)、(5) と類似してつぎのような形になる。

$$Q = U(\delta_i) + 4C_i(\delta_i) \cos \phi_i \left(\log \frac{P}{2} + \frac{1}{2} \right) \pi_i + 2C_i(\delta_i) \sin \phi_i \left\{ \left(\log \frac{P}{2} \right) \mathcal{E}_x' - \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathcal{E}_x')}{P^2} \mathbf{P} \right\} + K_{ii}(\delta_i) + K_{ji}(\delta_i), \quad (25)$$

$$K_{ii}(\delta_i) = \left\{ \int_{\delta_i - \varepsilon_i}^{\delta_i} + \int_{\delta_i}^{\delta_i + \varepsilon_i} \right\} \left\{ - \frac{\frac{A_i}{4} \pi_i + \frac{1}{2} (I_i \mathbf{e}_i + J_i \mathbf{g}_i)}{R_{ii}} - \frac{\frac{A_i}{4} (R_{ii} \cdot \pi_i) + \frac{1}{2} \{ I_i (R_{ii} \cdot \mathbf{e}_i) + J_i (R_{ii} \cdot \mathbf{g}_i) \}}{R_{ii}^3} R_{ii} \right\} d\delta_i' \\ - (A_i \pi_i + I_i \mathbf{e}_i + J_i \mathbf{g}_i) \log \varepsilon_i, \quad (26)$$

$$K_{ji}(\delta_i) = \int_{\delta_j}^{\delta_j + \varepsilon_j} \left\{ - \frac{\frac{A_j}{4} \pi_j + \frac{1}{2} (I_j \mathbf{e}_j + J_j \mathbf{g}_j)}{R_{ji}} - \frac{\frac{A_j}{4} (R_{ji} \cdot \pi_j) + \frac{1}{2} \{ I_j (R_{ji} \cdot \mathbf{e}_j) + J_j (R_{ji} \cdot \mathbf{g}_j) \}}{R_{ji}^3} R_{ji} \right\} d\delta_j'$$

ただし $i=1$ のとき $j=2$, $i=2$ のとき $j=1$ ととる。また $\mathbf{P} = \overrightarrow{\delta_i P}$ であり、 $\delta_i, \phi_i, \mathcal{E}_x', A_i, I_i, J_i, \pi_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{g}_i$ ($i=1, 2$) は (4) および (10) の $\delta, \phi, \mathcal{E}_x', A, I, J, \pi, \mathbf{e}, \mathbf{g}$ と全く同一の定義を物体 i に対して適用したものである。

物体 i の共通領域にあり内部解の表現は、(6) と全く同一の式を物体 i に対し構成すればよい。この式と外部解 (25)、(26) とのマッチングを行うとき、つぎのような積分方程式が得られる。

$$K_{ii} + K_{ji} = A_i \left(\lambda' - \frac{1}{2} - \log a_i \right) \pi_i + \left[\left(\lambda' + \frac{1}{2} - \bar{b}_i(\mathbf{e}_i) - \log a_i \right) I_i - C_i(\mathbf{e}_i) J_i \right] \mathbf{e}_i \\ + \left[-C_i(\mathbf{e}_i) I_i + \left(\lambda' + \frac{1}{2} + \bar{b}_i(\mathbf{e}_i) - \log a_i \right) J_i \right] \mathbf{g}_i + U_{is}(\delta_i) - U(\delta_i) \quad (27)$$

ここで再び $i=1$ に対し $j=2$, $i=2$ に対し $j=1$ ととる。また

$$\lambda' = \log \frac{2\ell_i^*}{b_i} \quad \text{であり、} K_{ii}, K_{ji} \text{ は (26) で与えられる、} a_i, \bar{b}_i(\mathbf{e}_i),$$

$C_i(l_i)$ は物体 i の断面係数で (23) で与えられる。

いま (27) の i を 1, 2 とおいて得られる積分方程式系を解いて、 A_i, I_i, J_i が決定されれば、物体 i の ds_i 部分に働く力 $f_i ds_i$ は

$$f_i = 2\pi\mu V_0 A_i f_i + 4\pi\mu V_0 (I_i l_i + J_i j_i) \quad (28)$$

で与えられ、物体 i に働く力 F_i およびトルク G_i は

$$F_i = l_i^* \int_{\theta_i}^{h_i} f_i ds_i, \quad G_i = l_i^{*2} \int_{\theta_i}^{h_i} r_i \times f_i ds_i \quad (29)$$

で決まる。なお上記積分方程式系の厳密解は、ストークス方程式の解から $O\left(\frac{b_i}{l_i} \text{ or } \left(\frac{b_i}{l_i}\right)^2; i=1, 2\right)$ と省略した程度の精度をもつ。

§3 積分方程式の厳密解

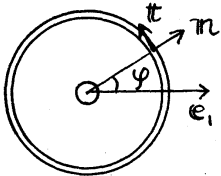
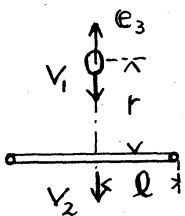
(I) 3次元物体と一様なリングの運動

3次元物体と一様な断面をもつリングが運動する場合の積分方程式系の厳密解を求めるため、つぎの仮定をする。(1) 3次元物体はリングの中心軸上にある。(2) 3次元物体の形として、対称な形を仮定する。すなわち3次元物体のみが単独で運動する場合において、前進運動のときには速度と力の方向が、また回転運動のときには角速度とトルクと方向がそれぞれ一致するような物体を考へる。(3) 一様な断面をもつ

リングに対し、 $\log a_1 = 0$ となるように物体の断面の代表的長さを選ぶ。(4) 長さ l はリングの半径 l^* で、速度は V_0 で無次元化する。とくに回転しているときには角速度を ω_0 で、速度を $l^*\omega_0$ で無次元化する。(5) 物体の速度や角速度は図の矢印の方向に、図で示された大きさで運動しているとする。(6) 二物体間の中心距離を l^* とする。

以上の仮定をして、つぎの四つの場合について厳密解を求める。その方法はそれぞれ A, I, J に対して問題により異なる適切な関数形を仮定し、これを用いて積分方程式に表わされる積分計算を実行、問題の積分方程式および境界条件を厳密に満たす解を求め、物体に働く力およびトルクを決定する。

Case 1. リング面に直角方向の運動



第5図

第5図のように3次元物体およびリングが $-e_3$ 方向に V_1^*, V_2^* で動いている。従って
 $W_a = -V_1 e_3$, $W_b(s) = -V_2 e_3$ である。いま

$\theta_1 = e_3$, $\theta_2 = \pi$ と選ぶ、対称性より $A = 0$,
 $I = \text{const.}$, $J = \text{const.}$ を仮定し、(12), (13),
 (16) を用いて $IK, \overline{II}, \hat{V}$ がつぎのよう計算
 できる。

$$IK(s) = -2 \log 2 I e_3 + (3 - \log 2) J \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Pi}(s) &= -k \hat{V} a \left[\frac{(1+2r^2)}{(1+r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_3 - \frac{r\pi}{(1+r^2)^{3/2}} \right] \\ \hat{V} &= V_1 - \pi \left\{ \frac{(1+2r^2)I}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{rJ}{(1+r^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

いま $s = \log 8\ell^*/b^*$, $\alpha = (1+2r^2)/(1+r^2)^{3/2}$, $\beta = r/(1+r^2)^{3/2}$ とおき、
上の結果を (11) に代入して

$$\left. \begin{aligned} I &= \left[V_2 \left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 - \beta^2 k a \pi \right) + k a V_1 \left\{ \beta C_1 - \alpha \left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 \right) \right\} \right] / \Delta \\ J &= \left[k a V_1 \left\{ \beta \left(s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 \right) - \alpha C_1 \right\} + V_2 \left(C_1 - \alpha \beta k a \pi \right) \right] / \Delta \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

の如く、 I, J が決定される。ここで

$$\Delta = s^2 - 2s - \frac{5}{4} + 3\bar{b}_1(z_1) - \bar{b}_1^2(z_1) - C_1^2(z_1) - k a \pi \left\{ \alpha^2 \left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 \right) + \beta^2 \left(s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 \right) - 2\alpha\beta \right\}$$

である。3次元物体が「ウィリントン」に働く力 $\overline{F}_1$ および $\overline{F}_2$ は、

(18), (19), (21), (30), (31) を用いて、つぎのように表される。

$$\left. \begin{aligned} \overline{F}_1 &= 8\pi\mu V_0 a^* k V_1 \left[\left\{ 1 + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{V_2 \pi}{V_1} \left\{ \beta C_1 - \alpha \left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 \right) \right\} + k a \pi \left\{ \alpha^2 \left(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 \right) \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \beta^2 \left(s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 \right) - 2\alpha\beta \right\} \right] \right\} \right] \mathbf{e}_3 \\ \overline{F}_2 &= 4\pi\mu V_0 L I \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで $L = 2\pi\ell$ である。とくに $r=0$ の時には

$$\left. \begin{aligned} \overline{F}_1 &= 8\pi\mu a^* k V_1^* \left[1 - \frac{(V_2/V_1 - k a) \pi}{s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - k a \pi - C_1^2/(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1)} \right] \mathbf{e}_3 \\ \overline{F}_2 &= \frac{4\pi\mu L V_2^* (1 - k a V_1/V_2)}{s + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - k a \pi - C_1^2/(s - \frac{5}{2} + \bar{b}_1)} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

のように簡単な解が得られる。

さて3次元物体が球の場合には、ストークス方程式の球定理を使って、球が小さくなり近似で、すなわち $0 < a^*/\ell^* < 1$ の範囲内で a^*/ℓ^* の省略をしながら解ける。 $r=0$ のときの解⁶⁾は

$$\left. \begin{aligned} \overline{F}_1 &= 6\pi\mu a^* V_1^* \left[1 - \frac{\pi \left\{ \frac{V_2}{V_1} - \frac{3}{4}a(1+q_3^2) \right\} (\delta - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 - C)}{(\delta + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - A)(\delta - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 - C) - C_1^2} \right] e_3 \\ \overline{F}_2 &= \frac{4\pi\mu V_2^* L \left\{ 1 - (3aV_1/4V_2)(1+q_3^2) \right\} (\delta - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 - C)}{(\delta + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - A)(\delta - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 - C) - C_1^2} e_3 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

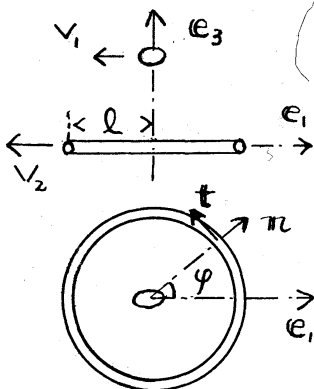
となるが、 A, C の詳しい形は文献⁶⁾を参照すれば分る。

とくに $a \ll 1$ のときの展開形は

$$A = a\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{7}{32}a^4 + \frac{15}{32}a^6 + \dots \right), \quad C = \frac{5}{4}\pi a^3 \left(1 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{27}{42}a^4 + \dots \right) \quad (35)$$

で与えられる。(33)で $k=3/4$, $C_1=0$ とおいた式と、(34)、(35)と比較して、ストークス源近似にする(33)は $a (= a^*/\ell^*)$ のたい範囲にわたって有効に使用できることが分る。

Case 2. リンク面に平行方向の運動



第6図

第6図のように、3次元物体およびリンクが $-e_1$ 方向に V_1 および V_2 で動いている。従って $V_a = -V_1 e_1$, $U_0(s) = -V_2 e_1$ である。いま $\hat{e}_1 = n$, $\hat{e}_3 = e_3$ にとり、

$$A = -\sin\varphi \bar{A}, \quad I = \cos\varphi \bar{I}, \quad J = \cos\varphi \bar{J}, \quad \bar{A} = \text{const},$$

$$\bar{I} = \text{const}, \quad \bar{J} = \text{const} \text{ を仮定して、(12)、(13)、}$$

(16) に代入し、

$$\begin{aligned}
 |K| &= -\sin\varphi \pi \left[\bar{A} \left(\frac{3}{2} - 2\log 2 \right) - 2\bar{I} \right] + \cos\varphi \pi \left[\bar{I} (1 - 2\log 2) - \bar{A} \right] + \cos\varphi \epsilon_3 (2 - 2\log 2) \bar{J} \\
 \bar{T} &= -ka\hat{V} \left\{ \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{1+r^2}} \pi + \frac{(2+r^2)\cos\varphi \pi}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{r\cos\varphi \epsilon_3}{(1+r^2)^{3/2}} \right\} \\
 \hat{V} &= V_1 - \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\bar{A}}{2\sqrt{1+r^2}} + \frac{(2+r^2)\bar{I}}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{r\bar{J}}{(1+r^2)^{3/2}} \right\}
 \end{aligned} \quad (36)$$

が得られる。さらに (36) を (11) に代入すると、 $\bar{A}, \bar{I}, \bar{J}$ は「 π 」の如く決定される。

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= A_{11}(V_2 - v\alpha) + A_{12}(V_2 - v\beta) + A_{13}vr \\
 \bar{I} &= A_{21}(V_2 - v\alpha) + A_{22}(V_2 - v\beta) + A_{23}vr \\
 \bar{J} &= A_{31}(V_2 - v\alpha) + A_{32}(V_2 - v\beta) + A_{33}vr
 \end{aligned} \quad (37)$$

ここで α, β, r, v, k は

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \beta = \frac{2+r^2}{(1+r^2)^{3/2}}, \quad r = \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}}, \quad v = kaV_1, \quad k = ka\pi \quad (38)$$

のFに定義されており、 A_{ij} は以下に示されるFにマトリックスTの逆マトリックスである。

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} 8 - 2 - \frac{k}{4}\alpha^2 & 2 - \frac{k}{2}\alpha\beta & \frac{k}{2}\alpha r \\ 1 - \frac{k}{4}\beta\alpha & 8 - \frac{1}{2} - b_1 - \frac{k}{2}\beta^2 & -c_1 + \frac{k}{2}\beta r \\ \frac{k}{4}\alpha r & -c_1 + \frac{k}{2}\beta r & 8 - \frac{3}{2} + b_1 - \frac{k}{2}r^2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

A, I, J に対する仮定おFび (18) ~ (22), (36) を用いて、3次元物体おびリソクに働く力 F_1, F_2 , トルク G_1, G_2 は

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 8\pi\mu V_0 a^* K \left[V_1 - \frac{\pi}{2\sqrt{1+r^2}} \left\{ \frac{\bar{A}}{2} + \frac{(2+r^2)}{(1+r^2)} \bar{I} - \frac{r\bar{J}}{(1+r^2)} \right\} \right] e_1 \\ F_2 &= \pi\mu V_0 L (\bar{A} + 2\bar{I}) e_1 \end{aligned} \right\} (40)$$

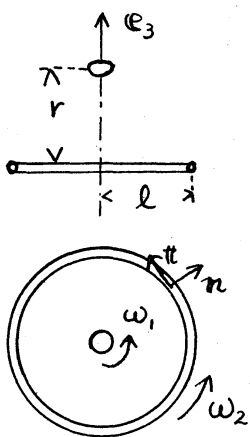
$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{4\pi^2\mu K' a^3}{(1+r^2)^{3/2}} \left\{ r \left(\frac{\bar{A}}{2} + \bar{I} \right) + \frac{\bar{J}}{2} \right\} e_2 \\ G_2 &= -\mu V_0 L^2 \bar{J} e_2 \end{aligned} \right\} (41)$$

の様になるから、(37)~(39) を用いて $F_1, \dots, G_2$ を決定することができる。とくに $r=0$ 、 $C_i(l_1)=0$ のときには (40) は

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 8\pi\mu V_1^* a^* K \left[1 - \frac{(\pi V_2/V_1)(5\delta - \frac{29}{2} - \bar{b}_1) - k(9\delta - \frac{49}{2} - \bar{b}_1)}{4 \left\{ (\delta - 2 - \frac{k}{4})(\delta - \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - 2k) - (1 - \frac{k}{2})(2 - k) \right\}} \right] e_1 \\ F_2 &= \mu L V_2^* \frac{\pi(3\delta - \frac{17}{2} - \bar{b}_1 - \frac{k}{2}) - (k V_1/V_2)(5\delta - \frac{29}{2} - \bar{b}_1)}{(\delta - 2 - \frac{k}{4})(\delta - \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - 2k) - (1 - \frac{k}{2})(2 - k)} e_1 \end{aligned} \right\} (42)$$

のように簡単になる。

Case 3. リンク面に直角な軸のまわりの回転



第7図のように3次元物体およびリンクが、

リンクの中心軸のまわりには、それぞれ ω_1 、

ω_2 の角速度で回転している。従って $\omega_a =$

$\omega_1 e_3$ 、 $\omega_b = \omega_2 n$ である。いま $l_1 = n$ 、 $g_1 = e_3$

ととり、 $A = \text{const}$ 、 $I = J = 0$ を仮定して (12)、

(13) を計算することによって

$$K = A \left(\frac{3}{2} - 2 \log 2 \right) \pi, \quad T = \frac{K' a^3 \hat{\omega}}{(1+r^2)^{3/2}} \pi \quad (43)$$

第7図

が得られる。(43) を (11), (17) に代入し、(10) を用いて

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\omega_2}{8-2} \left\{ 1 - \frac{\hat{\omega}}{\omega_2} \frac{K'a^3}{(1+r^2)^{3/2}} \right\} \\ \hat{\omega} &= \omega_1 + A\pi/2(1+r^2)^{3/2} \end{aligned} \right\} (44)$$

のような関係式が求められ、上式から A , $\hat{\omega}$ が

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\omega_2 \left\{ 1 - \omega_1 K'a^3 / \omega_2 (1+r^2)^{3/2} \right\}}{8-2 - K'\pi a^3 / 2(1+r^2)^3} \\ \hat{\omega} &= \omega_1 - \frac{\pi \omega_2 \left\{ 1 - K'a^3 \omega_1 / \omega_2 (1+r^2)^{3/2} \right\}}{2(1+r^2)^{3/2} \left\{ 8-2 - K'\pi a^3 / 2(1+r^2)^3 \right\}} \end{aligned} \right\} (45)$$

のよう に決定される。3次元物体およびリングに働くトルク

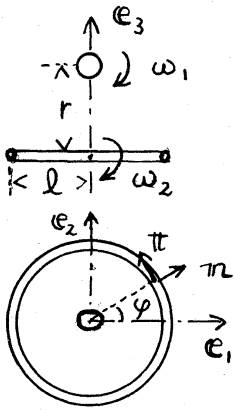
G_1 , G_2 に対する式は、(18), (20), (22) と上式より

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= -\frac{4\pi^2 \mu \ell^3 \omega_0 \omega_2 \left\{ 1 - K'a^3 \omega_1 / \omega_2 (1+r^2)^{3/2} \right\}}{\left\{ 8-2 - K'\pi a^3 / 2(1+r^2)^3 \right\}} e_3 \\ G_1 &= -8\pi \mu K'a^3 \omega_0 \left\{ \omega_1 e_3 + G_2 / 8\pi \mu \ell^3 \omega_0 (1+r^2)^{3/2} \right\} \end{aligned} \right\} (46)$$

の如く表えられる。ここで K' は3次元物体の形によって変わる定数で、球のときには $K'=1$ 、半径 a の円板のときには $K' = 4/3\pi$ ととればよい。

Case 4. リング面に平行な軸のまわりの回転

第8図のように3次元物体およびリングが、リング面に平行な軸のまわりに、 ω_1 , ω_2 の角速度で回転している。従っ



第 8 図

て $\omega_a = \omega_1 e_2$, $\omega_b = -\cos \varphi e_3$ である。いま

$n_1 = e_3$, $f_1 = n$ ととり、 $A = -\sin \varphi \bar{A}$,

$I = \cos \varphi \bar{I}$, $J = \cos \varphi \bar{J}$ とおき、 $\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$

は定数であることと仮定して、(12) ~ (17)

を (17) にて

$$IK(s) = -\sin \varphi \left\{ \bar{A} \left(\frac{3}{2} - \log 2 \right) - 2\bar{J} \right\} \pi + \cos \varphi \left\{ \bar{J} (1 - 2 \log 2) - \bar{A} \right\} \pi + \cos \varphi (2 - 2 \log 2) \bar{I} e_3$$

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \frac{k' a^3 \hat{\omega}}{(1+r^2)^{3/2}} (r \sin \varphi \pi - r \cos \varphi n - \cos \varphi e_3) \\ \hat{\omega} &= \omega_1 - \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{r \bar{A}}{2(1+r^2)^{3/2}} + \frac{r \bar{J}}{(1+r^2)^{3/2}} + \frac{\bar{I}}{(1+r^2)^{3/2}} \right\} \\ \bar{v} &= -\pi \left\{ \frac{\bar{A}}{4(1+r^2)^{3/2}} + \frac{(2+r^2)\bar{J}}{2(1+r^2)^{3/2}} - \frac{r \bar{I}}{2(1+r^2)^{3/2}} \right\} e_1 \end{aligned} \quad (47)$$

が得られる。これらを (11) に代入して、 $\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ が「べき」のよう

に決定される。

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -r \alpha \omega_1 (A_{11} + A_{12}) + (\omega_2 - \alpha \omega_1) A_{13} \\ \bar{J} &= -r \alpha \omega_1 (A_{21} + A_{22}) + (\omega_2 - \alpha \omega_1) A_{23} \\ \bar{I} &= -r \alpha \omega_1 (A_{31} + A_{32}) + (\omega_2 - \alpha \omega_1) A_{33} \end{aligned} \quad (48)$$

ただし A_{ij} は以下に示されるようにマトリックス T の逆マトリックスであり、

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} \delta - 2 - \delta \beta & 2 - r \delta & -r \delta \\ 1 - r \beta & \delta - \frac{1}{2} + \bar{b}_1 - r \delta & -c_1 - r \delta \\ -\beta & -c_1 - \delta & \delta - \frac{3}{2} - \bar{b}_1 - \delta \end{pmatrix} \quad (49)$$

また $\alpha, \beta, \delta, \delta$ はつぎのように定義されている。

$$\alpha = \frac{k'a^3}{(1+r^2)^{3/2}}, \quad \beta = \frac{\pi r k'a^3}{4(1+r^2)^3}, \quad \delta = \frac{\pi r k'a^3}{2(1+r^2)^3}, \quad \delta = \frac{\pi k'a^3}{2(1+r^2)^3} \quad (50)$$

3次元物体およびリンクに働くトルク G_1, G_2 および力 F_1, F_2 は、 A, I, J に対する仮定および (18) ~ (22), (47) から

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -8\pi k' \mu a^3 \left\{ \omega_1 - \frac{\pi}{2(1+r^2)^{3/2}} \left(\frac{r\bar{A}}{2} + r\bar{J} + \bar{I} \right) \right\} e_2 \\ G_2 &= -4\pi^2 \mu l^{*3} \omega_0 \bar{I} e_2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{8\pi^2 \mu a^3 l^* \omega_0}{2(1+r^2)^{3/2}} \left\{ r\bar{I} - (2+r^2)\bar{J} - \frac{(1+r^2)}{2} \bar{A} \right\} e_1 \\ F_2 &= 2\pi^2 \mu l^{*2} \omega_0 (\bar{A} + 2\bar{J}) e_1 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

のようになるから、(48) ~ (50) を用いて、 $G_1, \dots, F_2$ を決定することができ、とくに $r=0, C_1=0$ のときには、つぎのような簡単な厳密解が得られる。

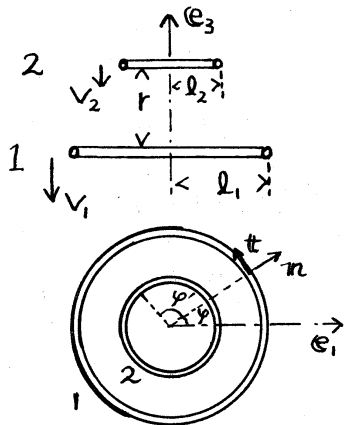
$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -8\pi k' \mu a^3 \left\{ \omega_1 - \frac{\pi(\omega_2 - \omega_1 k'a^3)}{2(\delta - \frac{3}{2} - \bar{b}_1(l_1) - \pi k'a^3/2)} \right\} e_2 \\ G_2 &= -\frac{4\pi^2 \mu l^{*3} \omega_0 (\omega_2 - \omega_1 k'a^3)}{\delta - \frac{3}{2} - \bar{b}_1(l_1) - \pi k'a^3/2} e_2 \\ F_1 &= F_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

(II) ニつの一様なリンクの運動

それぞれの断面が一様であるニつのリンクの運動に対する厳密解を求めるため、(I)の場合と同じような仮定とする。
すなわち (i) ニつのリンクはリンク面に直角な同一の中心軸

をもつ。(2) リンク 1 および 2 を区別するため、リンク i ($i=1, 2$) の物理量にサフィックス i をつける。この他 (I) の仮定 (4) については、 l^* を l_i^* で置きかえ、仮定 (3)、(5)、(6) はそのまま成立するものとする。以上の仮定をして、(I) の場合と同様な方法を用いて、以下の四つの場合について厳密解を求める。

Case 5. リンク面に直角方向の運動



第 9 図

第 9 図の如く、リンク 1、2 がリンクの中心軸方向に V_1, V_2 で運動している。

従って $U_{1B} = -V_1 e_3$, $U_{2B} = -V_2 e_3$ である。

いま $i_i = e_3$, $j_i = n$ ($i=1, 2$), $\log a_i = 0$,

$\log a_2 = \log a_2^*/b_1^* = \text{const}$ とおき、さらに

$A_i = 0$, $I_i = \text{const}$, $J_i = \text{const}$ ($i=1, 2$) を

仮定して、(26) に代入し

$$\left. \begin{aligned} |K_{11}(\delta) &= -2 \log 2 I_1 e_3 + (3 - \log 2) J_1 n \\ |K_{22}(\delta) &= -2 \log 2 I_2 e_3 + (3 - \log 2) J_2 n - (I_2 e_3 + J_2 n) \log(l_2^*/l_1^*) \\ |K_{21}(\delta) &= (d_1 I_2 + d_2 J_2) e_3 + (d_3 I_2 + d_4 J_2) n \\ |K_{12}(\delta) &= (e_1 I_1 + e_2 J_1) e_3 + (e_3 I_1 + e_4 J_1) n \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

が得られる。ここで $d_1, \dots, d_4, e_1, \dots, e_4$ は

$$\left. \begin{aligned} d_1 = l_2 e_1 &= -\frac{2l_2}{R_1} \left\{ K(k) + \frac{r^2 E(k)}{R_2^2} \right\}, \quad d_2 = l_2 e_3 = -\frac{r}{R_1} \left\{ K(k) - \frac{(1+r^2-l_2^2)}{R_2^2} E(k) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$d_3 = l_2 e_2 = \frac{l_2 r}{R_1} \left\{ K(k) + \frac{1-r^2-l_2^2}{R_2^2} E(k) \right\}, \quad d_4 = l_2 e_4 = -\frac{r^2}{R_1} \left\{ K(k) - \frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2} E(k) \right\} \quad (55)$$

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (1+l_2)^2}, \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (1-l_2)^2}, \quad k^2 = 4l_2/R_1^2$$

で定義され、 $K(k)$, $E(k)$ は第1種および第2種の完全楕円積分である。いま (54)、(55) を (27) に代入するとき、 I_1, I_2 はつきのように決定される。

$$I_1 = \frac{\delta_2 V_1 - \delta_1 V_2}{\beta_1 \delta_2 - \beta_2 \delta_1} \Delta', \quad I_2 = \frac{\beta_1 V_2 - \beta_2 V_1}{\beta_1 \delta_2 - \beta_2 \delta_1} \Delta' \quad (56)$$

ここで $\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \Delta'$ は

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \Delta' - c_1(l_1) (c_1(l_1) \alpha_4 + e_3 d_4) - d_2 (c_1(l_1) e_4 + e_3 \alpha_2) \\ \beta_2 &= -e_1 \Delta' - e_2 (c_1(l_1) \alpha_4 + e_3 d_4) - c_2(l_2) (c_1(l_1) e_4 + e_3 \alpha_2) \\ \delta_1 &= -c_1(l_1) (d_3 \alpha_4 + c_2(l_2) d_4) - d_1 \Delta' - d_2 (d_3 e_4 + c_2(l_2) \alpha_2) \\ \delta_2 &= -e_2 (d_3 \alpha_4 + c_2(l_2) d_4) + \alpha_3 \Delta' - c_2(l_2) (d_3 e_4 + c_2(l_2) \alpha_2) \\ \Delta' &= \alpha_2 \alpha_4 - e_4 d_4 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

で定義され、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \delta_1 + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(l_1), \quad \alpha_2 = \delta_1 - \frac{5}{2} + \bar{b}_1(l_1), \quad \alpha_3 = \delta_2 + \frac{1}{2} - \bar{b}_2(l_2), \\ \alpha_4 &= \delta_2 - \frac{5}{2} + \bar{b}_2(l_2), \quad \delta_1 = \log 8l_1^*/b_1^*, \quad \delta_2 = \log 8l_2^*/b_2^* \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

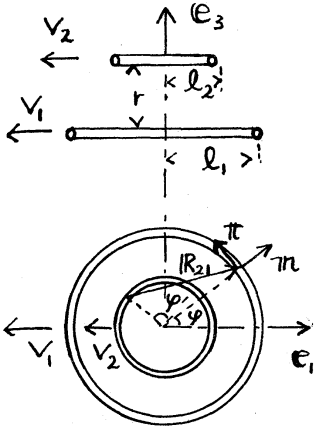
またリンク面に働く力 F_i は A_i, I_i, J_i に対する仮定および

(28), (29) より

$$F_i = 4\pi\mu V_0 L_i I_i e_3 \quad (i=1, 2) \quad (59)$$

となるから、(55) ~ (58) を用いて F_i を決定できる。

Case 6. リンク面に平行方向の運動



第 10 図

第 10 図の如く、リング 1, 2 がリング面に平行に V_1, V_2 で運動している。従つて $U_{10} = -V_1 E_1$, $U_{20} = -V_2 E_1$ である。いま $\bar{t}_i = \pi$, $\bar{j}_i = E_3$ ($i = 1, 2$), $\log a_1 = 0$, $\log a_2 = \text{const}$ とおき、 $A_i = -\sin \varphi \bar{A}_i$, $I_i = \cos \varphi \bar{I}_i$, $J_i = \cos \varphi \bar{J}_i$ および $\bar{A}_i, \bar{I}_i, \bar{J}_i$ はそれぞれ定数と仮定し、(26) に代入して

$$\begin{aligned} |k_{11}(s) &= -\sin \varphi \pi \left\{ \bar{A}_i \left(\frac{3}{2} - 2 \log 2 \right) - 2 \bar{I}_i \right\} + \cos \varphi \pi \left\{ \bar{I}_i (1 - 2 \log 2) - \bar{A}_i \right\} + \cos \varphi E_3 (2 - 2 \log 2) \bar{J}_i \\ &\quad + \{ \sin \varphi \bar{A} \pi - \cos \varphi (\bar{I} \pi + \bar{J} E_3) \} \log(\bar{l}_i / l_i^*) \\ |k_{21}(s) &= -\sin \varphi \pi (d_{11} \bar{A}_2 + d_{12} \bar{I}_2 + d_{13} \bar{J}_2) + \cos \varphi \pi (d_{21} \bar{A}_2 + d_{22} \bar{I}_2 + d_{23} \bar{J}_2) + \cos \varphi E_3 (d_{31} \bar{A}_2 + d_{32} \bar{I}_2 + d_{33} \bar{J}_2) \\ |k_{12}(s) &= -\sin \varphi \pi (e_{11} \bar{A}_1 + e_{12} \bar{I}_1 + e_{13} \bar{J}_1) + \cos \varphi \pi (e_{21} \bar{A}_1 + e_{22} \bar{I}_1 + e_{23} \bar{J}_1) + \cos \varphi E_3 (e_{31} \bar{A}_1 + e_{32} \bar{I}_1 + e_{33} \bar{J}_1) \end{aligned} \quad (60)$$

が得られる。ここに $d_{11}, \dots, d_{33}, e_{11}, \dots, e_{33}$ は

$$\begin{aligned} d_{11} &= -\frac{R_1}{2l_2} \left\{ -(1+r^2+l_2^2) E(k) + (R_2^2 + \frac{4l_2^2}{R_1^2}) K(k) \right\}, \quad d_{12} = -\frac{R_1}{l_2} \left\{ (1+r^2) E(k) - \left\{ R_2^2 + \frac{l_2^2(1-r^2+l_2^2)}{R_1^2} \right\} K(k) \right\} \\ d_{13} &= r R_1 \left\{ E(k) - \frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2} K(k) \right\}, \quad d_{21} = \frac{R_1}{2l_2} \left\{ -(r^2+l_2^2) E(k) + (R_2^2 - \frac{1+r^2-l_2^2}{R_1^2}) K(k) \right\} \\ d_{22} &= -\left\{ \frac{6l_2}{R_1} + \frac{R_1 R_2^2}{l_2} - \frac{(1+l_2^2)(1+r^2+l_2^2)}{l_2 R_1} \right\} K(k) + \left\{ -\frac{R_1(1+r^2+l_2^2)}{l_2} - \frac{2r^2 l_2}{R_1 R_2^2} + \frac{(1+l_2^2) R_1}{l_2} \right\} E(k) \\ d_{23} &= r \left\{ \frac{(r^2+l_2^2)}{R_1} K(k) + \left(\frac{1+r^2-l_2^2}{R_1 R_2^2} - R_1 \right) E(k) \right\}, \quad d_{31} = \frac{r R_1}{2l_2} \left\{ \frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2} K(k) - E(k) \right\} \\ d_{32} &= \frac{r R_1}{l_2} \left\{ \left\{ 1 + \frac{l_2^2(1-r^2+l_2^2)}{R_1^2 R_2^2} \right\} E(k) - \frac{1+r^2}{R_1^2} K(k) \right\}, \quad d_{33} = \left\{ 1 - \frac{r^2(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2 R_2^2} \right\} E(k) - \frac{1+l_2^2}{R_1^2} K(k) \\ e_{11} &= \frac{d_{11}}{l_2}, \quad e_{12} = \frac{d_{12}}{l_2} + \frac{(1-l_2^2) R_1}{l_2^2} \left\{ E(k) - \frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2} K(k) \right\}, \quad e_{13} = -\frac{d_{13}}{l_2}, \quad e_{21} = \frac{d_{21}}{l_2} + \frac{R_1(l_2^2-1)}{2l_2^2} \left\{ E(k) - \frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_1^2} K(k) \right\} \\ e_{22} &= \frac{d_{22}}{l_2}, \quad e_{23} = -d_{23} + \frac{r(1-l_2^2)}{2} \left\{ \left(\frac{4}{R_1 R_2^2} + \frac{2R_1}{l_2^2} \right) E(k) - \frac{2R_1(1+r^2+l_2^2)}{l_2^2 R_2^2} K(k) \right\} \\ e_{31} &= -d_{31}, \quad e_{32} = -d_{32} + \frac{r(1-l_2^2)}{l_2 R_1} \left\{ -K(k) + \frac{(1+r^2+l_2^2)}{R_2^2} E(k) \right\}, \quad e_{33} = d_{33}/l_2 \end{aligned} \quad (61)$$

で与えられる。(60), (61) を (27) に代入するとき、 $\bar{A}_i, \bar{I}_i, \bar{J}_i$ はつぎのよう に決定される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_i &= V_1 (A_{j1} + A_{j2}) + V_2 (A_{j4} + A_{j5}) \\ \bar{I}_i &= V_1 (A_{1+j1} + A_{1+j2}) + V_2 (A_{1+j4} + A_{1+j5}) \\ \bar{J}_i &= V_1 (A_{2+j1} + A_{2+j2}) + V_2 (A_{2+j4} + A_{2+j5}) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

ただし $i=1$ のとき $j=1$, $i=2$ のとき $j=4$ にとる。また A_{ij} は以下に示されるようにマトリックス T の逆マトリックスである。

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} s_1 - 2 & 2 & 0 & -d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\ 1 & s_1 - \frac{1}{2} - \bar{b}_1 & -c_1 & -d_{21} & -d_{22} & -d_{23} \\ 0 & -c_1 & s_1 - \frac{3}{2} + \bar{b}_1 & -d_{31} & -d_{32} & -d_{33} \\ -e_{11} & -e_{12} & -e_{13} & s_2 - 2 & 2 & 0 \\ -e_{21} & -e_{22} & -e_{23} & 1 & s_2 - \frac{1}{2} - \bar{b}_2 & -c_2 \\ -e_{31} & -e_{32} & -e_{33} & 0 & -c_1 & s_2 - \frac{3}{2} + \bar{b}_2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

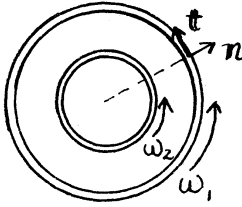
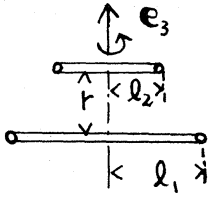
また リンク i に働く力 F_i および トルク G_i は A_i, I_i, J_i に対する仮定および (28), (29) を用いて

$$F_i = \pi \mu V_0 L_i (\bar{A}_i + 2 \bar{I}_i) e_1, \quad G_i = -\mu V_0 L_i^2 \bar{J}_i e_2 \quad (64)$$

で与えられるから、(61) ~ (63) を (64) に代入して、 F_i, G_i を決定することができる。

Case 7. リンク面に直角な軸のまわりの回転

第11図のように、リンク 1, 2 がリンクの中心軸のまわり
に、それぞれ ω_1, ω_2 の角速度で回転している。従って



第 11 図

$\omega_{10} = \omega_1 \pi$, $\omega_{20} = \omega_2 l_2 \pi$ である。いま

$i_i = \pi$, $j_i = e_3$ ($i=1, 2$), $\log a_1 = 0$, $\log a_2$
 $= \text{const}$ ととり、さらに $A_i = \text{const}$,

$I_i = J_i = 0$ を仮定、(26) に代入して、

$|k_{ij}|$ ($i, j=1, 2$) が「べき」の形に与る。

$$\left. \begin{aligned} |k_{ii}| &= A_i \pi \left(\frac{3}{2} - 2 \log 2 \right) - A_i \pi \log l_i^* / l_i^* \quad (i=1, 2) \\ |k_{21}| &= d'_1 A_2 \pi, \quad |k_{12}| = e'_1 A_1 \pi \end{aligned} \right\} (65)$$

ここで d'_1 , e'_1 は

$$d'_1 = R_1 E(k) - \{ (1+r^2+l_2^2)/R_1 \} K(k), \quad e'_1 = d'_1 / l_2 \quad (66)$$

であり、 R_1 , k , $E(k)$, $K(k)$ は (55) で与えられている。上式と

(27) より A_1 , A_2 が

$$A_1 = - \frac{\omega_1 \{ \delta_2 - 2 + \omega_2 l_2 d'_1 / \omega_1 \}}{(\delta_1 - 2)(\delta_2 - 2) - d_1'^2 / l_2}, \quad A_2 = - \frac{l_2 \omega_2 (\delta_1 - 2 + \omega_1 d'_1 / \omega_2 l_2^2)}{(\delta_1 - 2)(\delta_2 - 2) - d_1'^2 / l_2} \quad (67)$$

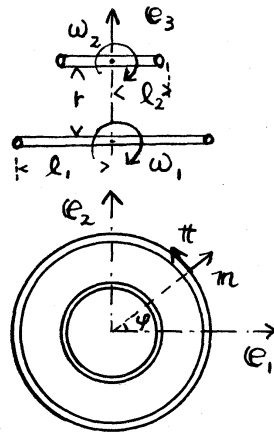
のように決定される。またリンク 1 および 2 に働くトルク

G_1 , G_2 は (28), (29) を用いて「べき」の形に与る。

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= - \frac{4\pi^2 \mu l_1^{*3} \omega_0 \{ \omega_1 + \omega_2 l_2 d'_1 / (\delta_2 - 2) \}}{\delta_1 - 2 - d_1'^2 / l_2 (\delta_2 - 2)} \pi \\ G_2 &= - \frac{4\pi^2 \mu l_2^{*3} \omega_0 \{ \omega_2 + \omega_1 d'_1 / l_2^2 (\delta_1 - 2) \}}{\delta_2 - 2 - d_1'^2 / l_2 (\delta_1 - 2)} \pi \end{aligned} \right\} (68)$$

Case 8. リンク面に平行な軸のまわりの回転

第 12 図のようにリンク 1, 2 がリンク面に平行な軸のま



第12図

かりに、それぞれ ω_1, ω_2 の角速度で回
 転してゐる。従つて $\omega_{1B} = -\cos\varphi \omega_1 e_3$,
 $\omega_{2B} = -\cos\varphi l_2 \omega_2 e_3$ である。いま $l_i = e_3$,
 $\theta_i = n$, $\log a_1 = 0$, $\log a_2 = \text{const}$ ととり、
 さらに $A_i = -\sin\varphi \bar{A}_i$, $I_i = \cos\varphi \bar{I}_i$, $J_i = \cos\varphi \bar{J}_i$
 および $\bar{A}_i, \bar{I}_i, \bar{J}_i$ は定数と仮定して、
 (26) より $|K_{ij}|$ ($i, j = 1, 2$) がつぎのよう

求められる。

$$\begin{aligned}
 |K_{11}(s)| &= -\sin\varphi \pi \left\{ \bar{A}_i \left(\frac{3}{2} - 2\log 2 \right) - 2\bar{J}_i \right\} + \cos\varphi n \left\{ \bar{J}_i (1 - 2\log 2) - \bar{A}_i \right\} + \cos\varphi e_3 \bar{I}_i (2 - 2\log 2) \\
 &\quad + \left\{ \sin\varphi \bar{A}_i \pi - \cos\varphi (\bar{I}_i e_3 + \bar{J}_i n) \right\} \log(l_i^*/l_i^*) \\
 |K_{21}(s)| &= -\sin\varphi \pi (d_{11}\bar{A}_2 + d_{12}\bar{J}_2 + d_{13}\bar{I}_2) + \cos\varphi n (d_{21}\bar{A}_2 + d_{22}\bar{J}_2 + d_{23}\bar{I}_2) + \cos\varphi e_3 (d_{31}\bar{A}_2 + d_{32}\bar{J}_2 + d_{33}\bar{I}_2) \\
 |K_{12}(s)| &= -\sin\varphi \pi (e_{11}\bar{A}_1 + e_{12}\bar{J}_1 + e_{13}\bar{I}_1) + \cos\varphi n (e_{21}\bar{A}_1 + e_{22}\bar{J}_1 + e_{23}\bar{I}_1) + \cos\varphi e_3 (e_{31}\bar{A}_1 + e_{32}\bar{J}_1 + e_{33}\bar{I}_1)
 \end{aligned} \tag{69}$$

こゝで $d_{11}, \dots, d_{33}, e_{11}, \dots, e_{33}$ は (61) で決まる値である。

(61), (69) を (27) に代入して、 $\bar{A}_i, \bar{I}_i, \bar{J}_i$ はつぎの如く決定される。

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_i &= -A_{j3} \omega_1 - A_{j6} l_2 \omega_2 \\
 \bar{J}_i &= -A_{1+j3} \omega_1 - A_{1+j6} l_2 \omega_2 \\
 \bar{I}_i &= -A_{2+j3} \omega_1 - A_{2+j6} l_2 \omega_2
 \end{aligned} \tag{70}$$

ただし $i=1$ のとき $j=1$, $i=2$ のとき $j=4$ にとる。また

A_{ij} はつぎに示されるようにマトリックスの逆マトリックスである。

$$A_{ij} = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} \delta_1 - 2 & 2 & 0 & -d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\ 1 & \delta_1 - \frac{1}{2} + \bar{b}_1 & -c_1 & -d_{21} & -d_{22} & -d_{23} \\ 0 & -c_1 & \delta_1 - \frac{3}{2} - \bar{b}_1 & -d_{31} & -d_{32} & -d_{33} \\ -e_{11} & -e_{12} & -e_{13} & \delta_2 - 2 & 2 & 0 \\ -e_{21} & -e_{22} & -e_{23} & 1 & \delta_2 - \frac{1}{2} + \bar{b}_2 & -c_2 \\ -e_{31} & -e_{32} & -e_{33} & 0 & -c_2 & \delta_2 - \frac{3}{2} - \bar{b}_2 \end{pmatrix} \quad (71)$$

またリンク i に働く力およびトルク T_i および G_i は、 A_i, I_i, J_i に対する係数および(28)、(29)より

$$\left. \begin{aligned} G_i &= -4\pi^2 \mu l_i^* l_i^{*2} \omega_0 \bar{I}_i e_2 \\ T_i &= 2\pi^2 \mu l_i^* l_i^* \omega_0 (\bar{A}_i + 2\bar{J}_i) e_1 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

となるから、(70)、(71)を(72)に代入することによって、 G_i, T_i は決定できる。

§4. 2物体の運動による干渉効果

(I) 3次元物体とリンクの運動による干渉効果

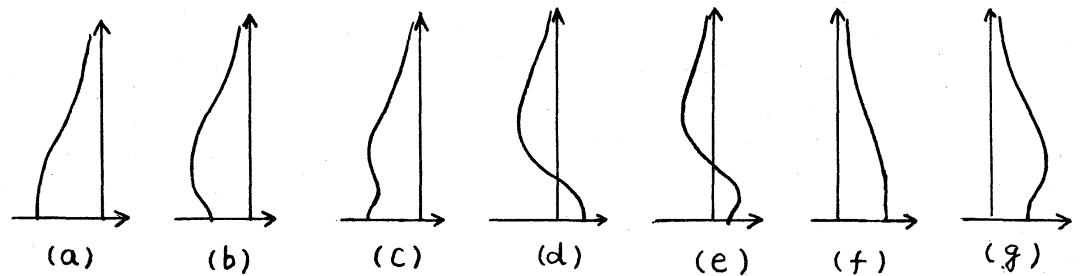
X_i で3次元物体($i=1$)とリンク($i=2$)に働く力またはトルクを、 X_{i0} で各物体が単独に運動しているときに働く力またはトルクを表わして、

$$X_i = X_{i0} (1 + \Delta_i) \quad (73)$$

と書いて、 Δ_i または $X_{i0} \Delta_i$ で2物体の干渉効果を表わすことができる。

本節では§3の厳密解から $O(1/\delta^2)$ を省略した式を用いて、

§3 の Case 1 ~ Case 4 について Δ_i の特性の概要を調べる。
 このとき r の変化に対する Δ_i の変化の様子は定性的に第
 13 図 (a) ~ (g) に図示されるパターンを示す。ここで横軸は Δ_i
 を縦軸は r を示す。



第13図 (横軸は Δ_i 、縦軸は r を示す)

Case 1. : $\mathbf{x}_i$ を $\mathbf{e}_3$ 方向に働く力 F_i にとり、 $\delta = k\alpha V_1/V_2$ とするとき

$$\Delta_1 = -\frac{\pi V_2}{\delta V_1} \left\{ \frac{1+2r^2}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{\delta(1+4r^2)}{(1+r^2)^2} \right\}, \quad \Delta_2 = -\delta \frac{(1+2r^2)}{(1+r^2)^{3/2}} \quad (74)$$

が得られる。 r の変化に対する Δ_1, Δ_2 の変化が第13図のどの
 パターンに属するかをとりここと、 Δ_1, Δ_2 が極値をとる r の
 値が表1に示されている。ただし表1には、 $V_1 = 0$ または

表 1

	$\Delta_1 / \frac{\pi V_2}{\delta V_1}$			Δ_2 / δ
δ	$< \frac{1}{4}$	$> \frac{1}{4}, < 1$	> 1	任意
第13図 の型	(b)	(c)	(e)	(b)
極値をと る r の値	$0, \frac{1}{\sqrt{2}}$	$0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{(4\delta)^2 - 1}$		$0, \frac{1}{\sqrt{2}}$

$V_2 = 0$ のときは含まれな
 い。 $V_1 = 0, V_2 > 0$ のとき
 には、 $\mathbf{x}_i, \Delta_i$ が3次元物
 体に対する干渉効果を表
 わし、パターンは(b)型
 である。またこのとき

$\Delta_2 = 0$ となり、リングの干渉効果は $O(1/\delta)$ で現われるく
 $O(1/\delta^2)$ で現われることが分る。 $V_2 = 0, V_1 > 0$ のときには、
 $X_{20} \Delta_2$ がリングに対する干渉効果を表わし、パターンは (b)
 型で、また一方 Δ_1 のパターンは (g) 型である。以上の場合い
 ずれも極値をとる r の値は 0 および $1/\sqrt{2}$ である。 V_1 または
 V_2 が符号を変えたときには干渉効果も符号を変えると考えられ
 ばよい。

Case 2. : X_i を E_1 方向に働く力 TF_i により、 $\delta = kaV_1/V_2$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{\pi}{3} \frac{V_2}{V_1} \left\{ \frac{1}{4} \frac{(5+3r^2)}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{3}{4} \frac{\delta(3+r^2)}{(1+r^2)^2} \right\}, \\ \Delta_2 &= -\frac{\delta}{3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{3+2r^2}{(1+r^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。 r の変化に対する Δ_1, Δ_2 の変化の様子および Δ_1, Δ_2

表 2

	$\Delta_1 / \frac{\pi V_2}{\delta V_1}$			Δ_2 / δ
δ	< 0.3	$> 0.3, < \frac{5}{9}$	$> \frac{5}{9}$	任意
第13図 の型	(a)	(b)	(d)	(a)
極値をと る r の値	0	0, $\frac{(3+r^2)(1+r^2)^{1/2}}{(5+r^2)} = \frac{2\delta}{9}$		0

が極値をとる r の値を

表 2 に示す。 $V_1 = 0$ また

は $V_2 = 0$ の場合は、

Case 1 のときと同様のコ

メントが成立する。たが

し Case 1. での (b) 型、(g)

型もそれぞれ (a) 型、(f) 型でおきかえられはよい。

つぎに E_2 方向のトルク G_1, G_2 について考えて見よう。

(38) の G_1, G_2 は $O(1/\delta^2)$ を省略して

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{6\pi^2 \mu K' V_2^* a^3 r}{\delta (1+r^2)^{3/2}} (1-M) e_2, \quad M = \frac{ka V_1 (4+3r^2)}{3V_2 (1+r^2)^{3/2}} \\ G_2 &= - \frac{\mu K V_1^* a^3 L^2 r}{\delta (1+r^2)^{3/2}} e_2 \end{aligned} \right\} (76)$$

となる。もし2軸方向のトルクが正のとき+、負のとき-で表示すれば、3次元物体およびリンクに働くトルクの方法は(76)より表すのようになる。とくに $V_2 \rightarrow 0$, $V_1 > 0$ のときの

表 3

3次元物体に働くトルクの方法						リンクに働くトルクの方法	
$V_2^* > 0$		$V_2^* = 0$		$V_2^* < 0$		$V_1^* > 0$	$V_1^* < 0$
$M < 1$	$M > 1$	$V_1 < 0$	$V_1 > 0$	$M < 1$	$M > 1$	-	+
+	-	+	-	-	+		

トルクの方法は、-となるから、一枚の無限平板の壁に平行に球が進むときに受けるトルクの方法と一致することを確認しておく。

Case 1. と Case 2. するやちリンク面に垂直に動くときと平行に動くときを比較して、①リンク面に平行に動く場合の方が変化が単調である、② $r=0$ での干渉効果は一般に平行に動くときの方が大である、③ $r \gg 1$ での干渉効果はリンク面に直角に動くときの方が大であることが分る。

Case 3. : X_i を e_3 方向のトルク G_i にとり、 $\delta = K'a^3 \omega_1 / \omega_2$ とするとき

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2} \frac{\pi \omega_2}{\delta \omega_1} \left\{ \frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{\delta}{(1+r^2)^3} \right\}, \quad \Delta_2 = -\frac{\delta}{(1+r^2)^{3/2}} \quad (77)$$

が得られる。r の変化に対する Δ_1 , Δ_2 の変化の様子および Δ_1 ,

表 4

	$\Delta_1 / \frac{\pi \omega_2}{\delta \omega_1}$			Δ_2 / δ
δ	$< \frac{1}{2}$	$> \frac{1}{2}, < 1$	> 1	任意
第13図の型	(a)	(b)	(d)	(a)
極値をとる r の値	0	$0, \sqrt{(2\delta)^{2/3} - 1}$		0

Δ_2 が極値をとる r の値

を表 4 に示す。 $\omega_1 = 0$ ま

たは $\omega_2 = 0$ の場合は、

Case 2 の $V_1 = 0$ または

$V_2 = 0$ のときと同様のコ

メントが成立する。

Case 4. : X_i を E_2 方向のトルク G_i にとり、 δ を Case 3. の

ように定義して

$$\Delta_1 = -\frac{\pi \omega_2}{2\delta \omega_1} \left\{ \frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} - \frac{\delta(2+3r^2)}{2(1+r^2)^3} \right\}, \quad \Delta_2 = -\frac{\delta}{(1+r^2)^{3/2}} \quad (78)$$

が成立する。r の変化に対する Δ_1 , Δ_2 の変化の様子および

表 5

	$\Delta_1 / \frac{\pi \omega_2}{\delta \omega_1}$			Δ_2 / δ
δ	< 0.919	$> 0.919, < 1$	> 1	任意
第13図の型	(a)	(c)	(d)	(a)
極値をとる r の値	0	$0, \frac{(1+r^2)^{3/2}}{(1+2r^2)} = \delta$		0

Δ_1 , Δ_2 が極値をとる r

の値を表 5 に示す。 ω_1

$= 0$ または $\omega_2 = 0$ の場合

は Case 3 と同じコメント

が成立する。

つぎに E_1 方向に働く力

H_1 , H_2 の振舞いを見よう。(48)の H_1 , H_2 は $O(1/\delta^2)$ を省略して

$$F_1 = \frac{8\pi^2 \mu a^* \ell^* \omega_2^* r}{28(1+r^2)^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{3\delta}{2(1+r^2)^{1/2}} \right\} e_1, \quad F_2 = -\frac{3\pi \mu L \omega_1^* k' a^3}{8} \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} e_1 \quad (79)$$

となり、これらの力の方向は(79)を用いて、容易に分る。

直進および回転の場合と比較して、一般に回転運動の方が干渉効果は小さい。とくに $r \gg 1$ の場合、直進運動では力は $1/r$ で、トルクは $1/r^2$ で減衰するが、回転ではトルクは $1/r^3$ 、力は $1/r^2$ で減衰する。

(II) 二つのリンクの運動による干渉効果

(i) 直進運動 (Case 5, 6) の場合

干渉効果を見るため、(73)の代りに、リンク1, 2に働く力 F_1, F_2 を

$$F_1 = F_{10} \{ 1 + (V_2/8V_1) \Delta_1 \}, \quad F_2 = F_{20} \{ 1 + (V_1/8V_2) \Delta_2 \} \quad (80)$$

の如く表わし、同効果の概要を知るため $O(1/8^3)$ を省略して考へる。このとき

$$\Delta_1 \ell_1^* = \Delta_2 \ell_2^* \quad (81)$$

が成立する。 Δ_1 はリンク面に直角な運動に対し、

$$\Delta_1 = -(2\ell_2/R_1) \{ k(R) + r^2 E(R)/R_2^2 \} \quad (82)$$

で与えられ、リンク面に平行な運動に対しては、

$$\Delta_1 = \frac{1}{6\ell_2} \left\{ \left[\frac{8\ell_2^2 r^2}{R_1 R_2^2} + (r^2 - 1 - \ell_2^2) R_1 \right] E(R) - \left\{ R_1 R_2^2 - \frac{2(1 - 8\ell_2^2 + \ell_2^4) + 2r^2(1 + \ell_2^2)}{R_1} \right\} k(R) \right\} \quad (83)$$

で与えられる。ただし R_1, R_2, R は (55) で与えられている。

r の変化に対する Δ_1 の変化は (82) が Fig. 13 Fig. (b) 型に、(83)

が (a) 型に属し、極値をとる r の値は、前者では $r=0$ おまゝ
 $\{2r^2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}) - 1\} E(k) - (\frac{r^2}{R_1^2}) K(k) = 0$ をみたす値、後者では $r=0$
 である。

つぎに (64) で表示された $\mathbb{C}_2$ 方向のトルク G_1, G_2 は $O(1/8)$ を
 省略して、

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -\mu V_2^* L_1^2 \frac{r(1+r^2-l_2^2)}{2\delta_1 \delta_2 l_2 R_1} \left\{ \frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2} E(k) - K(k) \right\} \mathbb{C}_2 \\ G_2 &= -\mu V_1^* L_2^2 \frac{r(1-r^2-l_2^2)}{2\delta_1 \delta_2 l_2 R_1} \left\{ \frac{1+r^2+l_2^2}{R_2^2} E(k) - K(k) \right\} \mathbb{C}_2 \end{aligned} \right\} (84)$$

のまゝに得られる。いま $l_2 \leq 1$ を仮定しても一般性を失わな
 いから、 $l_2 \leq 1$ を仮定する。このときトルク G の方向が $\mathbb{C}_2$ 方向
 のときは +、 $-\mathbb{C}_2$ 方向のときは - で表示すれば、 G_1, G_2 の方
 向に對して表 6 の関係が得られる。

表 6

G_1 の方向	$V_2^* > 0$		$V_2^* < 0$	
	-		+	
G_2 の方向	$V_1^* > 0$		$V_1^* < 0$	
	$r < \sqrt{1-l_2^2}$	$r > \sqrt{1-l_2^2}$	$r < \sqrt{1-l_2^2}$	$r > \sqrt{1-l_2^2}$
	-	+	+	-

さらに §4.

(I) の Case 2.

の所で、Case 1.

と Case 2. を比

較して述べら

れたコメント ① ~ ③ は、Case 5, 6 を比較した場合も同様に
 成立する。また干渉の様子は二つのリングの干渉の方が、3
 次元物体とリングの干渉よりも単純である。

(ii) 回転運動 (Case 7, 8) の場合

(80) の代りに、リング 1 おまゝ 2 に働くトルク G_1, G_2 を

$$G_1 = G_{10} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega_2}{s_2 \omega_1} \right) \Delta_1 \right\}, \quad G_2 = G_{20} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega_1}{s_2 \omega_2} \right) \Delta_2 \right\} \quad (85)$$

の如く表示して、(i)の場合と同様に $O(1/s^3)$ を省略して干渉現象を調べる。このとき

$$\Delta_1 l_1^{*3} = \Delta_2 l_2^{*3} \quad (86)$$

が成立する。 Δ_1 は リンク 面 に 直角 を 軸 の まわりの 回転 では

$$\Delta_1 = l_2 \left[R_1 E(k) - \left\{ (1+r^2+l_2^2)/R_1 \right\} K(k) \right] \quad (87)$$

で与えられる。リンク 面 に 平行 を 軸 の まわりの 回転 では

$$\Delta_1 = l_2 \left[\left\{ R_1 - r^2(1+r^2+l_2^2)/R_1 R_2^2 \right\} E(k) - \left\{ (1+l_2^2)/R_1 \right\} K(k) \right] \quad (88)$$

で与えられる。 r の変化に対する Δ_1 の変化は (87) が 第 13 図

の (a) 型に、(88) が 同 図 の (b) 型 に 属 する。 Δ_1 の 極 値 を とる

r の 値 は、(87) の とき は $r=0$ で、(88) の とき は $r=0$ および

$$\left\{ r^2 + (1-l_2^2)^2/(1+l_2^2) \right\} K(k) - \left\{ r^4 + 2r^2(1-6l_2^2+l_2^4)/(1+l_2^2) + (1-l_2^2)^2 \right\} \left(E(k)/R_2^2 \right) = 0$$

をみたす r の 値 である。

つぎに (72) で表示された $\mathcal{C}_1$ 方向に働く力 F_1 , F_2 は $O(1/s^3)$ を省略して

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{2\pi^2 \mu l_1^* l_2^* \omega_2^*}{s_1 s_2} \left[r \left\{ \frac{2(1+r^2-l_2^2)}{R_1 R_2^2} - R_1 \right\} E(k) + \frac{r(l_2^2-1)}{R_1} K(k) \right] \mathcal{C}_1 \\ F_2 &= \frac{2\pi^2 \mu l_1^* l_2^* \omega_1^*}{s_1 s_2} \left[r \left\{ \frac{R_1}{l_2^2} + \frac{2(1-r^2-l_2^2)}{R_1 R_2^2} \right\} E(k) - \frac{r(1+r^2-l_2^2)}{l_2^2 R_1} K(k) \right] \mathcal{C}_1 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

のようになる。さて r の変化に対する (89) の大括弧内の変化

は、 $l_2=0.5$ の場合、 F_1 では 第 13 図 (c) 型に、 F_2 では (f) 型

に属する。ただし $r=0$ のときには $F_1 = F_2 = 0$ となる。

§5. まとめ

§1. で述べられた仮定 1. ~ 5. のもとに、§2. で 3 次元物体と細長い物体または二つの細長い物体が運動しているときの流れを支配する積分方程式が導出された。上記の仮定では、二つの細長い物体が運動する場合には二物体が十分接近していても、両者の間隔 l^* が細長い物体の断面の代表的大きさ b に比べて十分大きければよかった。しかし 3 次元物体と細長い物体が運動する場合には、両者の間隔 l^* が 3 次元物体の代表的大きさ a と比較して十分大きいと仮定し、3 次元物体によって生ずる流れをストークス源による流れでおきかえた。

従って 3 次元物体と細長い物体が接近するとき、この様な方法で解かれた解にどのような誤差が含まれるかが問題になる。§3 で述べられているように球がリング面に直角に運動するような特別の場合には、このような誤差をチェックすることが出来る。この様なチェックによれば §2. で導出された積分方程式の解は、両者が可成り近づいたときでも有効であることが期待できる。

2 物体間の相互位置関係については上記の仮定を除いて別に制限はないことおよび物体の形に対する仮定が少いことなをも考慮して、これらの積分方程式は広範囲の問題に対し有用であると考えられる。いま 2 物体相互間の位置関係が一般的

である場合には、通常これら積分方程式は $\varepsilon \left(= \left[\log \frac{1}{\varepsilon} \right]^{-1} \right)$ による展開法で解かれることになる。しかし2物体相互間の位置関係が特別な場合には、§3. で示されているようにこれら積分方程式の厳密解が容易に求まり、精度のよい解が得られる。

物体がこの様な位置関係にあるときには、一般に n 個 ($n \geq 2$) の物体が運動しているときにも厳密解の存在が予想される。

またこのような解がどの程度の複雑さになるかについては、§3. の方法を拡張して考えれば容易に判断される。

§3. で得られた厳密解から二つの物体の干渉効果を調べることができるが、この厳密解は比較的簡単な解 (Case 3, Case 7 など) から相当複雑な解 (Case 6, Case 8 など) まで含まれているから、厳密解をそのまま用いて干渉効果を調べることは可成り繁雑である。従ってこれら干渉効果の特性の概要を比較的簡単に見るために、厳密解から ε についての高次の項を省略した式を使用する。すなわち §4. では、3次元物体とリンクの運動では $O(\varepsilon^2)$ を、また二つのリンク運動では $O(\varepsilon^3)$ を厳密解から省略した式を用いて干渉効果が調べられた。その特性をまとめるとつぎのようになる。

(i) リンク面に平行に動く場合とリンク面に直角に動く場合の干渉効果を比較するとき、3次元物体とリンクがあるいは二つのリンクいずれの場合も、両物体が接近しているときの干

渉効果はリング面に平行に動くときの方が大で、また両物体が離れているときの干渉効果はリング面に直角に動くときの方が大きい。

(ii) 回転運動の場合の干渉効果では、リング面に直角な軸のまわりを回転するか、あるいはリング面に平行な軸のまわりを回転するかによって生ずる相違はあまり現われない。

(iii) 干渉の様子は、直進運動および回転運動を通じる次元物体とリングの干渉の方が、二つのリングの干渉よりも複雑である。

(iv) 物体間の距離が十分離れているときの干渉効果にはつぎのような特徴がある。直進運動の場合には、3次元物体およびリングまたは二つのリングの中心にそれぞれ一つのストークス源があるとして計算したときの干渉効果と同一となる。

しかし回転運動の場合には、やや複雑である。すなわちリング面に直角な軸のまわりを回転する場合には、それぞれの物体の中心に一つの二重ストークス源（球の回転のときに現われる二重ストークス源）があるとして取扱った場合と同等であるが、リング面に平行な軸のまわりを回転する場合には両者は同等でない。

(v) 直進運動と回転運動を比較して、干渉効果は回転運動の方が小さい。とくに物体間の距離が十分離れているときには、

つぎのような特徴がある。直進運動の場合の物体に働く力に対する干渉効果は $1/r$ で減少するが、一方回転運動の場合の物体に働くトルクに対する干渉効果は $1/r^3$ で減少する。

文 献

- (1) N. J. Menstre + D. F. Katz : J. Fluid Mech. 64 (1974), 817
- (2) 成瀬文雄 : 物理学会第32回年会予稿集 4, 3 (1977)
- (3) 成瀬文雄 : 京都大学数理解析研究所講究録 302 (1977), 58
- (4) 成瀬文雄 : 京都大学数理解析研究所講究録 335 (1978), 42
- (5) 成瀬文雄 : 京都大学数理解析研究所講究録 234 (1975), 4
- (6) 成瀬文雄 : 物理学会秋の分科会講演予稿集 4, 21 (1978)