

非線形楕円型境界値問題の 不安定解に対する有限要素近似*

学習院大学理学部 水谷 明

Mizutani Akira

次の非線形楕円型境界値問題を考える。

$$-\Delta u = f(u), \quad u \geq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (2)$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ は凸多角形領域とし、 $f(u)$ に関して、 $f \in C^1(\overline{\mathbf{R}}_+; \mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(+\infty) = f'(+\infty) = +\infty$, $\frac{d}{du}\{f(u)/u\} > 0$ ($u > 0$), $\lim_{u \rightarrow +\infty} \{\log f(u)/u^\alpha\} = 0$ ($1 < \exists \alpha < 2$), $F(u) \equiv \int_0^u f(s)ds \leq (\frac{1}{2} - \varepsilon)f(u)u$ ($0 < \exists \varepsilon < \frac{1}{2}$, $u \sim$ 十分大) を仮定する。

f の典型例としては、 $f(u) = u^p$ ($p > 1$)、 $f(u) = e^u - 1 - u$ がある。

境界値問題 (1) (2) は、安定な自明解 $u \equiv 0$ の他に、不安定な解 $\bar{u} > 0$ を持つことが知られている。エネルギー $J(v)$ を、

$J(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \int_\Omega F(v)dx$ ($v \in H_0^1(\Omega)$) により定める。集合 $\mathcal{N}$ を、 $\mathcal{N} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \|\nabla v\|^2 = (f(v), v), v \geq 0 \text{ in } \Omega\}$ とおくと、 $\mathcal{N}$ は (1) (2) の不安定解をすべて含み、安定解を含まない。

Nehari[1] による基本的な結果は次の通りである。

『 $\mathcal{N}$ の中で $J(v)$ を最小にする不安定解 $u \in \mathcal{N}$ が存在する： $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v)$ ($= d > 0$)』 (この解 u をエネルギー最小解という。)

以前、この事実に基づき、逆巾法による反復列を用いて、不安定解を構成した ([2,3])。本報告では、その有限要素近似について考える。

§ 有限要素近似

証明の都合上、上記仮定に加えて、

ある $p > 1$ があって、 $f(\lambda s) \geq \lambda^p f(s)$ ($\lambda \geq 1, 0 \leq s < +\infty$)

を仮定する。上で述べた典型的な具体例はこの仮定を満たしている。

* 鈴木貴氏 (愛媛大学理学部) との共同研究である。

Ω の 3 角形分割 $\{\tau_h\}_{h>0}$ は「正則な」3 角形分割で、“inverse assumption”を満たすものとする（用語については、例えば Ciarlet[4] を参照）。 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ を通常の区分的 1 次式からなる有限要素空間とし、 $\mathcal{N}_h = \mathcal{N} \cap V_h$ とおく。

まず各 $h > 0$ に対して近似解 $v_h \in \mathcal{N}_h$ を構成する。

アルゴリズム (IPM)

h によらぬ $v_0 = v_{0,h} \in \mathcal{N} \cap L^\infty(\Omega)$ から出発し、 $v_{j,h} \mapsto v_{j+1,h} \in \mathcal{N}_h$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める。

1. $(\nabla w_h, \nabla \chi_h) = (f(v_{j,h}), \chi_h)$ ($\forall \chi_h \in V_h$) の解を $w_h \in V_h$ とする。
2. w_h の定数倍で $\mathcal{N}_h$ の元が唯一つ存在するのでそれを $v_{j+1,h}$ とする。

反復列 $\{v_{j,h}\}_{j=1}^\infty$ のある適当な部分列はある元 $v_h \in \mathcal{N}_h$ に収束する。

この v_h を $h > 0$ に対する近似解とする。 $\square$

このようにして定めた $\{v_h\}_{h>0}$ に対して次が成り立つ。

定理 $\{v_h\}_{h>0}$ の任意の部分列は、適当な不安定解 v_0 に ($H^1(\Omega)$ と $L^\infty(\Omega)$ のノルムに関して) 収束する部分列 $\{v_{h_k}\}_{k=1}^\infty$ をもつ。
特に、 $J(v_{h_k}) \rightarrow d$ ならば、 v_0 はエネルギー最小解である。

注意 1 「 Ω が非凸多角形領域の場合、3 角形分割の仮定に “acute type” を追加すれば、上記定理がそのまま成立する」ことが最近分かった。

注意 2 [3] に数値計算の結果と考察を示してある。

実際の計算では丸め誤差が避けられないので、上の方法では、エネルギー最小解（の近似）以外の不安定解は捕らえられないようである。

定理の証明概略

☆ 記号と定義

$X = H_0^1(\Omega)$, $X_+ = \{v \in X \mid v \geq 0 \text{ in } \Omega\}$, $V_{h+} = \{u_h \in V_h \mid u_h \geq 0 \text{ in } \Omega\}$ とおく。

作用素 $\tilde{T}: X_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{N}$ を次のように定める。

1. $v \in X_+ \setminus \{0\}$ に対して、
 $-\Delta w = f(v)$ in Ω , $w = 0$ on $\partial\Omega$ の解を $w \in X_+$ とする。
2. w の定数倍 λw で $\mathcal{N}$ に属するものが唯一つあるので、それを $\tilde{T}v$ とする。

作用素 $T: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ は $T = \tilde{T}|_{\mathcal{N}}$ により定める。

T の有限要素版を $T_h: \mathcal{N}_h \rightarrow \mathcal{N}_h$ とする。

従って、アルゴリズム (IPM) の反復列は、 $v_{j+1,h} = T_h v_{j,h}$ ($j \geq 1$) と書ける。

☆ 反復列 $\{v_{j,h}\}$ および近似解 $\{v_h\}$ の性質

命題 1 j と h に無関係な定数 $r > 0$ が存在して、

$$r \leq \|\nabla v_{j,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq r^{-1}$$

が成り立つ。

証明 [2] と同様な議論による。 □

命題 2 $\{v_{j,h}\}$ は一様有界である: $\exists M > 0, \quad \|v_{j,h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$

証明 アルゴリズム (IPM) より

$$(\nabla v_{j+1,h}, \nabla \chi_h) = \lambda_{j+1,h} (f(v_{j,h}), \chi_h) \quad (\forall \chi_h \in V_h)$$

となる正の数 $\lambda_{j+1,h}$ が一意的に存在する。

ここで特に $\chi_h = v_{j,h}$ とおくと

$$\lambda_{j+1,h} = \frac{(\nabla v_{j+1,h}, \nabla v_{j,h})}{\|\nabla v_{j,h}\|^2} \leq \frac{\|\nabla v_{j+1,h}\|}{\|\nabla v_{j,h}\|} \leq r^{-2}$$

従って $\{\lambda_{j,h}\}$ は一様有界である。

$v_{j+1,h} \in \mathcal{N}_h$ は

$$-\Delta u = \lambda_{j+1,h} f(v_{j,h}) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の有限要素解であるので

$$\exists C_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|v_{j+1,h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \lambda_{j+1,h} \|f(v_{j,h})\|_{L^2(\Omega)} \quad (3)$$

Trudinger の不等式より

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|u\|_{L_{\phi^*}(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\| \quad (\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)) \quad (4)$$

但し、 $\phi(s) \equiv \exp(s^2) - 1$, $\|u\|_{L_{\phi^*}(\Omega)} \equiv \inf\{k > 0; \int_{\Omega} \phi(\frac{u}{k}) dx \leq 1\}$ である。

命題 1 と (4) より

$$\|v_{j+1,h}\|_{L_{\phi^*}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{r}$$

$0 < \eta < \frac{r}{\gamma}$ を満たす η を固定すると $f(s)$ の仮定より

$$\exists C_{\eta} > 0 \quad \text{s.t.} \quad f(s)^2 \leq C_{\eta}(\exp(\eta s^2) - 1) \quad (0 \leq \forall s < \infty) \quad (5)$$

(3) と (5) より

$$\|v_{j+1,h}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C_1 \cdot r^{-2} \cdot \sqrt{C_{\eta}}$$

が成り立つ。 □

$$-\Delta w = f(v_h) \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (6)$$

の解を $w = w^{(h)} \in X_+$ とする。その有限要素解が $v_h \in \mathcal{N}_h$ である。通常の評価と命題 2 より

$$\exists C_2 > 0 \quad \|w - v_h\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(w - v_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^2$$

が成り立つ。

命題 3 (6) の解 $w^{(h)}$ に対して、 $\lambda^{(h)} \in \mathcal{N}$ を満たす唯一の正の数 λ を $\lambda^{(h)}$ と書くと

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda^{(h)} = 1$$

が成り立つ。

証明 $w^{(h)}$ を簡単のため w と書く。

$\lambda^{(h)} w \in \mathcal{N}$ は

$$\int_{\Omega} \frac{f(\lambda^{(h)} w)}{\lambda^{(h)} w} w^2 dx = \|\nabla w\|^2 \quad (7)$$

と同等である。

(7) を満たす $\lambda^{(h)} > 0$ の一意存在は知られている ([2]) ので

$$\llbracket \forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < h < h_0 \text{ and } |\lambda - 1| \geq \varepsilon \implies \int_{\Omega} \frac{f(\lambda w)}{\lambda w} w^2 dx \neq \|\nabla w\|^2 \rrbracket$$

を示せばよい。

$\lambda \geq 1 + \varepsilon$ のとき

$$\frac{f(\lambda s)}{\lambda s} \geq \frac{\lambda^p f(s)}{\lambda s} \geq (1 + \frac{p-1}{2}\varepsilon) \frac{f(s)}{s}$$

従って

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{f(\lambda w)}{\lambda w} w^2 dx - \|\nabla w\|^2 \\ & \geq (1 + \frac{p-1}{2}\varepsilon) (f(w), w) - \|\nabla w\|^2 \\ & = (1 + \frac{p-1}{2}\varepsilon) \{ (f(w), w) - (f(v_h), v_h) \} + \frac{p-1}{2}\varepsilon (f(v_h), v_h) + (\|\nabla v_h\|^2 - \|\nabla w\|^2) \\ & \geq -(1 + \frac{p-1}{2}\varepsilon) |(f(w), w) - (f(v_h), v_h)| + \frac{p-1}{2}\varepsilon \|\nabla v_h\|^2 - |\|\nabla w\|^2 - \|\nabla v_h\|^2| \\ & \geq \frac{p-1}{2}\varepsilon r^2 - \text{const.} h \end{aligned}$$

ゆえに

$$\exists h_0 = h_0(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < h < h_0 \text{ and } \lambda \geq 1 + \varepsilon \implies \int_{\Omega} \frac{f(\lambda w)}{\lambda w} w^2 dx > \|\nabla w\|^2$$

$\lambda \leq 1 - \varepsilon$ のときも同様。 $\square$

命題 4 $\lim_{h \rightarrow 0} \|Tv_h - T_h v_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$

証明 命題 1、3 と等式

$$Tv_h - T_h v_h = \lambda^{(h)}(w^{(h)} - v_h) + (\lambda^{(h)} - 1)v_h$$

より成り立つ。 $\square$

定理の証明にはいる。

命題 1 から $\{v_h\}_{h>0}$ の任意の部分列に対して、 $H_0^1(\Omega)$ で弱収束する部分列 $\{v_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がとれる：

$$v_{h_k} \rightharpoonup w \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega) \quad (8)$$

Rellich の定理から

$$v_{h_k} \rightarrow w \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (9)$$

(9) と命題 2 から

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \quad (10)$$

従って

$$f(v_{h_k}) \rightarrow f(w) \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (11)$$

$$F(v_{h_k}) \rightarrow F(w) \quad \text{in } L^1(\Omega) \quad (12)$$

が成り立つ。

$$B(v) \equiv \frac{1}{2}(f(v), v) - \int_{\Omega} F(v) dx \quad (v \in X_+)$$

とおくと、(11)(12) より

$$d \leq J(v_{h_k}) = B(v_{h_k}) = \frac{1}{2}(f(v_{h_k}), v_{h_k}) - \int_{\Omega} F(v_{h_k}) dx \rightarrow B(w)$$

ゆえに $w \neq 0$ である。

命題 5 $v_0 = \tilde{T}w$ とおくと、 v_0 は (1)(2) の不安定解で

$$v_{h_k} \rightarrow v_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

が成り立つ。

証明 $\tilde{T}$ が完全連続である ([2]) ことと命題 4 および等式

$$v_{h_k} - v_0 = (T_{h_k} v_{h_k} - T v_{h_k}) + (T v_{h_k} - \tilde{T}w)$$

より $v_{h_k} \rightarrow v_0$ in $H_0^1(\Omega)$ が成り立つ。

また、

$$T v_0 - v_0 = (T v_0 - T v_{h_k}) + (T v_{h_k} - \tilde{T}w) \xrightarrow{0} 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

より $T v_0 = v_0 \in \mathcal{N}$ 、従って v_0 は不安定解である。 $\square$

命題 6 $\|v_{h_k} - v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$ が成り立つ。

証明

$$-\Delta u = f(v_0) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の解が $v_0 \in \mathcal{N}$ である。その有限要素解を $w_{h_k} \in \mathcal{N}_{h_k}$ とすると、例えば [4]p.172 より

$$\begin{aligned} \|v_{h_k} - v_0\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|v_{h_k} - w_{h_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w_{h_k} - v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C \|f(v_{h_k}) - f(v_0)\|_{L^2(\Omega)} + \|w_{h_k} - v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$\square$

参考文献

- [1] Nehari, Z., *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans.Amer.Math.Soc. 95 (1960), 101-123.
- [2] Mizutani, A., and Suzuki, T., *On the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic equations*, (to appear)
- [3] 水谷 明, *On the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic boundary value problems*, 数理解析研究所講究録 834 (1993), 1-12.
- [4] Ciarlet, Ph.G., "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland (1978)