

高次元トーリック・ファノ多様体の分類に向けて

佐藤 拓 (東北大・理)

序

反標準因子 $-K_X$ が豊富である非特異完備トーリック多様体 X を非特異トーリック・ファノ多様体と呼ぶ. 次元を固定したときに非特異トーリック・ファノ多様体の同型類全体の集合は有限集合であり, 現在のところ4次元まで分類されている (Batyrev [3], Oda [5], Sato [7], Watanabe-Watanabe [9]).

本稿の目的は, 高次元の非特異トーリック・ファノ多様体の分類問題を考える事であり, 特にここで述べる概念を用いる事により, 4次元までの分類が再考できる事を述べる. その結果 Batyrev による4次元の分類には, 一つ4次元非特異トーリック・ファノ多様体が不足している事がわかった.

最後にこの研究に関して, お忙しいなかご指導して下さいました小田忠雄先生と, 貴重なご意見を頂いた梶原健先生, 中川泰宏先生と東北大学代数幾何学セミナーの方々に感謝する.

1 F 同値関係と非特異トーリック・ファノ多様体の分類

d 次元非特異トーリック・ファノ多様体の同型類全体の成す集合を $\mathcal{F}_d$ で表す事にする. すなわち

$$\mathcal{F}_d = \{\text{nonsingular toric Fano } d\text{-folds}\} / \cong.$$

このとき Batyrev [1] により, $\#\mathcal{F}_d < +\infty$ である.

非特異トーリック・ファノ多様体の分類を見通し良く考察するために, 集合 $\mathcal{F}_d$ 上に次のような同値関係を導入する.

定義 1.1 (Sato [7]) $\mathcal{F}_d$ の二つの元 X_1, X_2 が F 同値であるとは, X_1 と X_2 とが $\mathcal{F}_d$ の元を経由した同変ブロー・アップ, 同変ブロー・ダウンの合成で結ばれる事である. X_1, X_2 が F 同値であるとき $X_1 \sim X_2$ と書く. “ $\sim$ ” は $\mathcal{F}_d$ 上の同値関係である.

ここでは, 機械的な計算により, 与えられた $\mathcal{F}_d$ の元が属する F 同値類を求める事ができる事を述べる. その際, 非特異完備扇を表現する方法として重要なのは, Batyrev [2] によって導入された次の概念である.

定義 1.2 (Batyrev [2], [3]) Σ を非特異完備扇とし, Σ の 1 次元多面錐の原始的生成元全体の集合を $G(\Sigma)$ で表す事にする. このとき Σ の真部分集合 P が Σ の原始的コレクション (primitive collection) であるとは P が次の二つの条件を満たす事である.

- (1) P は Σ の多面錐を生成しない.
- (2) P の任意の真部分集合は Σ の多面錐を生成する.

Σ の原始的コレクション全体の成す集合を $PC(\Sigma)$ で表す.

更に $P = \{x_1, \dots, x_l\}$ を原始的コレクションとしたとき, Σ の完備性より, Σ の多面錐 $\sigma(P)$ が唯一存在して, $x_1 + \dots + x_l$ を相対内部に含む. よって

$$x_1 + \dots + x_l = a_1 y_1 + \dots + a_m y_m \quad (G(\sigma) = \{y_1, \dots, y_m\}, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_{>0})$$

なる等式を得る. ただしここで, $G(\sigma) := \sigma \cap G(\Sigma)$ である. この等式を P の原始的関係 (primitive relation) と呼ぶ. このとき P の次数を

$$\deg P := l - (a_1 + \dots + a_m)$$

と定義する.

非特異完備扇の原始的関係全体から, 元の扇の形状が完全に決定できる事が容易にわかる (Batyrev [3], Sato [7]). よって原始的関係を全て与える事により, 非特異完備扇を表現する事ができる. 更に以下に述べるように, この表現法を用いると, ファノ性の判定, 同変ブローアップ, 同変ブローダウンといった概念が比較的容易に扱える事がわかる.

命題 1.3 (Batyrev [3]) $X = T_{\text{Nemb}}(\Sigma)$ を非特異完備トーリック多様体とする. このとき X が非特異トーリック・ファノ多様体であるための必要十分条件は, Σ の任意の原始的コレクション P に対して $\deg P > 0$ が成り立つ事である.

命題 1.4 (Sato [7]) Σ, Σ^* を非特異完備扇として, σ を Σ の多面錐とする. このとき $X^* := T_{\text{Nemb}}(\Sigma^*) \rightarrow X := T_{\text{Nemb}}(\Sigma)$ を $\text{orb}(\sigma)$ の閉包を中心とする同変ブローアップとして, $G(\Sigma^*) = G(\Sigma) \cup \{x\}$ とすると次が成立する.

- (1) Σ^* の原始的コレクションは次で尽くされる.
 - (a) $G(\sigma)$.
 - (b) Σ の原始的コレクションであって, $G(\sigma)$ を含まないもの.
 - (c) $\{(P \setminus G(\sigma)) \cup \{x\} \mid P \in PC(\Sigma), P \cap G(\sigma) \neq \emptyset\}$ の元のうち, 包含関係に関して極小なもの.
- (2) Σ の原始的コレクションは次で尽くされる.
 - (a) $G(\sigma)$ でない Σ^* の原始的コレクションであって, x を含まないもの.

- (b) Σ^* の x を含む原始的コレクション P^* が, $G(\sigma)$ の任意の真部分集合 S に対して $(P^* \setminus \{x\}) \cup S$ が Σ^* の原始的コレクションでないとき, $(P^* \setminus \{x\}) \cup G(\sigma)$.

命題 1.5 (Sato [7]) Σ を非特異完備扇とする. このとき次は同値である.

- (1) $X := T_{\text{Nemb}}(\Sigma)$ は非特異完備トーリック多様体に同変ブロー・ダウンできる.
- (2) Σ の原始的コレクション $P = \{x_1, \dots, x_l\}$ が存在して対応する原始的關係が $x_1 + \dots + x_l = x$ となり, $P \cap P' \neq \emptyset$, $P' \neq P$ なる Σ の任意の原始的コレクション P' に対して, $(P' \setminus P) \cup \{x\}$ は Σ の原始的コレクションを含む.

注 1.6 命題 1.5 のように, 原始的關係 $x_1 + \dots + x_l = x$ が存在して同変ブロー・ダウンできるとき, 原始的關係 $x_1 + \dots + x_l = x$ に関する同変ブロー・ダウンと呼ぶ事にする.

命題 1.3, 1.4, 1.5 を用いる事により, 与えられた非特異トーリック・ファノ多様体に F 同値な非特異トーリック・ファノ多様体を全て求める事ができる. 計算例として, Batyrev [3] の分類に不足していた 4 次元非特異トーリック・ファノ多様体 W と, Oda [5] による非射影的な非特異完備トーリック多様体の例を構成する.

例 1.7 (Sato [7]) $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ に対応する非特異完備扇を Σ_0 とし, $G(\Sigma_0) = \{x_1, \dots, x_6\}$ とすると, Σ_0 の原始的關係全体は

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

となる. Σ_0 を $\{x_1, x_4\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_1 とし, $G(\Sigma_1) = G(\Sigma_0) \cup \{x_7\}$ とすると, Σ_0 の任意の原始的コレクションが $\{x_1, x_4\}$ を含まない事と,

$$\{x_2, x_3, x_7\}, \{x_5, x_6, x_7\}$$

がいずれも極小な事より, Σ_1 の原始的關係全体は

$$x_1 + x_4 = x_7, \quad x_2 + x_3 + x_7 = x_4, \quad x_5 + x_6 + x_7 = x_1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

となる. 命題 1.3 より $G_6 := T_{\text{Nemb}}(\Sigma_1)$ は非特異トーリック・ファノ多様体である (Batyrev [3]). 次に Σ_1 を $\{x_2, x_5\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_2 とし, $G(\Sigma_2) = G(\Sigma_1) \cup \{x_8\}$ とすると, Σ_1 の任意の原始的コレクションが $\{x_2, x_5\}$ を含まない事と,

$$\{x_3, x_7, x_8\}, \{x_6, x_7, x_8\}, \{x_1, x_3, x_8\}, \{x_4, x_6, x_8\}$$

がいずれも極小な事より, Σ_2 の原始的關係全体は

$$\begin{aligned} x_2 + x_5 = x_8, \quad x_3 + x_7 + x_8 = x_4 + x_5, \quad x_6 + x_7 + x_8 = x_1 + x_2, \quad x_1 + x_3 + x_8 = x_5, \\ x_4 + x_6 + x_8 = x_2, \quad x_1 + x_4 = x_7, \quad x_2 + x_3 + x_7 = x_4, \quad x_5 + x_6 + x_7 = x_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{aligned}$$

となる. 命題1.3より $Z_1 := T_{\text{Nemb}}(\Sigma_2)$ は非特異トーリック・ファノ多様体である (Batyrev [3]). 最後に Σ_2 を $\{x_3, x_6\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_3 とし, $G(\Sigma_3) = G(\Sigma_2) \cup \{x_9\}$ とすると, Σ_2 の任意の原始的コレクションが $\{x_3, x_6\}$ を含まない事と,

$$\{x_7, x_8, x_9\}, \{x_1, x_8, x_9\}, \{x_4, x_8, x_9\}, \{x_2, x_7, x_9\}, \{x_5, x_7, x_9\}, \{x_1, x_2, x_9\}, \{x_4, x_5, x_9\}$$

がいずれも極小な事より, Σ_3 の原始的関係全体は

$$\begin{aligned} x_3 + x_6 &= x_9, \quad x_7 + x_8 + x_9 = 0, \quad x_1 + x_8 + x_9 = x_5 + x_6, \quad x_4 + x_8 + x_9 = x_2 + x_3, \\ x_2 + x_7 + x_9 &= x_4 + x_6, \quad x_5 + x_7 + x_9 = x_1 + x_3, \quad x_1 + x_2 + x_9 = x_6, \\ x_4 + x_5 + x_9 &= x_3, \quad x_2 + x_5 = x_8, \quad x_3 + x_7 + x_8 = x_4 + x_5, \quad x_6 + x_7 + x_8 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_3 + x_8 &= x_5, \quad x_4 + x_6 + x_8 = x_2, \quad x_1 + x_4 = x_7, \quad x_2 + x_3 + x_7 = x_4, \\ x_5 + x_6 + x_7 &= x_1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{aligned}$$

となる. 命題1.3より $W := T_{\text{Nemb}}(\Sigma_3)$ は非特異トーリック・ファノ多様体であり Batyrev [3] の分類に不足している (Sato [7]). 特に $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, G_6 , Z_1 , W は互いに F 同値である.

例 1.8 (Oda [5]) $\mathbf{P}^3$ に対応する非特異完備扇を Σ_0 とし, $G(\Sigma_0) = \{x_1, \dots, x_4\}$ とすると, Σ_0 の原始的関係全体は

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

となる. 例1.7と同様に, 命題1.4を用いて $\mathbf{P}^3$ を以下のように4回同変ブロー・アップする. Σ_0 を $\{x_3, x_4\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_1 とし, $G(\Sigma_1) = G(\Sigma_0) \cup \{x_5\}$ とすると, Σ_1 の原始的関係全体は

$$x_3 + x_4 = x_5, \quad x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

となる. Σ_1 を $\{x_1, x_4\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_2 とし, $G(\Sigma_2) = G(\Sigma_1) \cup \{x_6\}$ とすると, Σ_2 の原始的関係全体は

$$x_1 + x_4 = x_6, \quad x_3 + x_4 = x_5, \quad x_3 + x_6 = x_1 + x_5, \quad x_2 + x_5 + x_6 = x_4, \quad x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

となる. Σ_2 を $\{x_2, x_4\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_3 とし, $G(\Sigma_3) = G(\Sigma_2) \cup \{x_7\}$ とすると, Σ_3 の原始的関係全体は

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= x_6, \quad x_2 + x_4 = x_7, \quad x_3 + x_4 = x_5, \quad x_1 + x_7 = x_2 + x_6, \quad x_3 + x_7 = x_2 + x_5, \\ x_3 + x_6 &= x_1 + x_5, \quad x_2 + x_5 + x_6 = x_4, \quad x_1 + x_2 + x_5 = 0, \quad x_5 + x_6 + x_7 = 2x_4 \end{aligned}$$

となる. Σ_3 を $\{x_2, x_5\}$ を中心として星状細分した非特異完備扇を Σ_4 とし, $G(\Sigma_4) = G(\Sigma_3) \cup \{x_8\}$ とすると, Σ_4 の原始的関係全体は

$$\begin{aligned} x_2 + x_5 = x_8, \quad x_1 + x_8 = 0, \quad x_4 + x_8 = x_5 + x_7, \quad x_6 + x_8 = x_4, \quad x_1 + x_4 = x_6, \\ x_2 + x_4 = x_7, \quad x_3 + x_4 = x_5, \quad x_1 + x_7 = x_2 + x_6, \quad x_3 + x_7 = x_8, \\ x_3 + x_6 = x_1 + x_5, \quad x_5 + x_6 + x_7 = 2x_4 \end{aligned}$$

となる. 特に命題 1.3 より, $T_{\text{Nemb}}(\Sigma_1)$ はファノ多様体であるが, $T_{\text{Nemb}}(\Sigma_2)$, $T_{\text{Nemb}}(\Sigma_3)$, $T_{\text{Nemb}}(\Sigma_4)$ はファノ多様体ではない. Σ_4 について, 原始的関係 $x_3 + x_7 = x_8$ に着目すると, $\{x_3, x_7\}$ と共通部分を持つ Σ_4 の原始的コレクションは

$$\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_7\}, \{x_3, x_6\}, \{x_5, x_6, x_7\}$$

であり,

$$\{x_4, x_8\}, \{x_1, x_8\}, \{x_6, x_8\}, \{x_5, x_6, x_8\}$$

はそれぞれ Σ_4 の原始的コレクションを含むから, 命題 1.5 より, $T_{\text{Nemb}}(\Sigma_4)$ は原始的関係 $x_3 + x_7 = x_8$ に関して同変ブロー・ダウンできる. $T_{\text{Nemb}}(\Sigma_4)$ を原始的関係 $x_3 + x_7 = x_8$ に関して同変ブロー・ダウンしたものを $Y = T_{\text{Nemb}}(\Sigma_5)$ とすると $G(\Sigma_5) = G(\Sigma_4) \setminus \{x_8\} = G(\Sigma_3)$ である. x_8 を含む Σ_4 の原始的コレクションは

$$\{x_1, x_8\}, \{x_4, x_8\}, \{x_6, x_8\}$$

であり,

$$\{x_1, x_7\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_6\}$$

はそれぞれ Σ_4 の原始的コレクションであるから, 命題 1.4 (2) より, Σ_5 の原始的関係全体は

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 = x_6, \quad x_2 + x_4 = x_7, \quad x_3 + x_4 = x_5, \quad x_1 + x_7 = x_2 + x_6, \quad x_2 + x_5 = x_3 + x_7, \\ x_3 + x_6 = x_1 + x_5, \quad x_5 + x_6 + x_7 = 2x_4 \end{aligned}$$

となる. Σ_5 の原始的関係であって右辺が 0 であるものが存在しないから, 次の結果より, Y は非射影的である. Y は非射影的な非特異完備代数多様体の最も簡単な例である.

命題 1.9 (Batyrev [2]) Σ を非特異完備扇として $X := T_{\text{Nemb}}(\Sigma)$ とする. このとき X が射影的ならば

$$x_1 + \cdots + x_l = 0 \quad (x_1, \dots, x_l \in G(\Sigma))$$

なる型の原始的関係が存在する.

2 F 同値関係に関する予想

第1節で述べたことから, d 次元非特異トーリック・ファノ多様体の分類を完成するためには, $\mathcal{F}_d$ の F 同値に関する完全代表系を求めれば良い事がわかる. この事に関する予想を述べるために次の特殊な種類の非特異トーリック・ファノ多様体を定義する.

定義 2.1 (Ewald [4]) $X = T_{\text{Nemb}}(\Sigma)$ を非特異トーリック・ファノ多様体とする. X が擬対称トーリック・ファノ多様体 (pseudo-symmetric toric Fano variety) であるとは, Σ の極大多面錐 σ_1, σ_2 が存在して $\sigma_1 = -\sigma_2$ となる事である.

次が $(\mathcal{F}_d, \sim^{\mathbb{F}})$ の完全代表系に関する予想である.

予想 2.2 (Sato [7]) d 次元非特異トーリック・ファノ多様体は擬対称トーリック・ファノ多様体であるか, または d 次元射影空間 $\mathbf{P}^d$ に F 同値である.

次の命題により擬対称トーリック・ファノ多様体の構造は明らかになっているので, 予想 2.2 が正しければ $(\mathcal{F}_d, \sim^{\mathbb{F}})$ の完全代表系が得られる事になる.

命題 2.3 (Ewald [4], Voskresenskij-Klyachko [8]) 任意の擬対称トーリック・ファノ多様体 X に対し, $s, m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_n \in \mathbf{Z}_{> 0}$ が存在して

$$X \cong (\mathbf{P}^1)^s \times V^{2k_1} \times \dots \times V^{2k_m} \times \tilde{V}^{2l_1} \times \dots \times \tilde{V}^{2l_n}$$

となる. ただしここで V^{2k} は $2k$ 次元 del Pezzo 多様体であり, $\tilde{V}^{2l}$ は $2l$ 次元擬 del Pezzo 多様体である. $\mathbf{Z}^{2k} \subset \mathbf{R}^{2k}$ の $\mathbf{Z}$ 基底を $\{e_1, \dots, e_{2k}\}$ とすると, $2k$ 次元擬 del Pezzo 多様体は

$$\{\pm e_1, \dots, \pm e_{2k}, e_1 + \dots + e_{2k}\}$$

の凸閉包をファノ多面体とする $2k$ 次元非特異トーリック・ファノ多様体であり, $2k$ 次元 del Pezzo 多様体は

$$\{\pm e_1, \dots, \pm e_{2k}, \pm(e_1 + \dots + e_{2k})\}$$

の凸閉包をファノ多面体とする $2k$ 次元非特異トーリック・ファノ多様体である.

例 2.4 (Batyrev [3], Sato [7]) $\tilde{V}^4 = T_{\text{Nemb}}(\tilde{\Sigma})$ とし, $G(\tilde{\Sigma}) = \{x_0, \dots, x_8\}$ とすると, $\tilde{\Sigma}$ の原始的関係は次で尽くされる.

$$\begin{aligned} x_0 + x_4 &= 0, \quad x_1 + x_5 = 0, \quad x_2 + x_6 = 0, \quad x_3 + x_7 = 0, \quad x_0 + x_1 + x_2 = x_7 + x_8, \\ x_0 + x_1 + x_3 &= x_6 + x_8, \quad x_0 + x_2 + x_3 = x_5 + x_8, \quad x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_8, \\ x_4 + x_5 + x_8 &= x_2 + x_3, \quad x_4 + x_6 + x_8 = x_1 + x_3, \quad x_4 + x_7 + x_8 = x_1 + x_2, \\ x_5 + x_6 + x_8 &= x_0 + x_3, \quad x_5 + x_7 + x_8 = x_0 + x_2, \quad x_6 + x_7 + x_8 = x_0 + x_1. \end{aligned}$$

同様に $V^4 = T_{\text{Nemb}}(\Sigma)$ とし, $G(\Sigma) = \{x_0, \dots, x_9\}$ とすると, Σ の原始的關係は次で尽くされる.

$$\begin{aligned}
& x_0 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_5 = 0, \quad x_2 + x_6 = 0, \quad x_3 + x_7 = 0, \quad x_8 + x_9 = 0, \\
& x_0 + x_1 + x_2 = x_7 + x_8, \quad x_0 + x_1 + x_3 = x_6 + x_8, \quad x_0 + x_2 + x_3 = x_5 + x_8, \\
& x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_8, \quad x_0 + x_1 + x_9 = x_6 + x_7, \quad x_0 + x_2 + x_9 = x_5 + x_7, \\
& x_0 + x_3 + x_9 = x_5 + x_6, \quad x_1 + x_2 + x_9 = x_4 + x_7, \quad x_1 + x_3 + x_9 = x_4 + x_6, \\
& x_2 + x_3 + x_9 = x_4 + x_5, \quad x_4 + x_5 + x_6 = x_3 + x_9, \quad x_4 + x_5 + x_7 = x_2 + x_9, \\
& x_4 + x_6 + x_7 = x_1 + x_9, \quad x_5 + x_6 + x_7 = x_0 + x_9, \quad x_4 + x_5 + x_8 = x_2 + x_3, \\
& x_4 + x_6 + x_8 = x_1 + x_3, \quad x_4 + x_7 + x_8 = x_1 + x_2, \quad x_5 + x_6 + x_8 = x_0 + x_3, \\
& x_5 + x_7 + x_8 = x_0 + x_2, \quad x_6 + x_7 + x_8 = x_0 + x_1.
\end{aligned}$$

特に命題 1.3, 1.4, 1.5 より, V^4 と $\tilde{V}^4$ は, 非特異トーリック・ファノ多様体に同変ブロー・アップする事も同変ブロー・ダウンする事もできない事がわかる. よって V^4 と $\tilde{V}^4$ は 4 次元射影空間に F 同値ではない.

$d \leq 4$ ならば予想 2.2 は正しい事が分類を用いずに証明できる. すなわち次の定理が成立し, 4 次元までの非特異トーリック・ファノ多様体の新しい分類法が得られる.

定理 2.5 (Sato [7]) $d \leq 4$ ならば, d 次元トーリック・ファノ多様体は擬対称トーリック・ファノ多様体であるか, または d 次元射影空間 $\mathbf{P}^d$ に F 同値である. 特に $d \leq 3$ ならば, d 次元トーリック・ファノ多様体は d 次元射影空間 $\mathbf{P}^d$ に F 同値である.

注 2.6 (Batyrev [3], Sato [7]) $(\mathcal{F}_4, \sim)$ の完全代表系として $\{\mathbf{P}^4, V^4, \tilde{V}^4\}$ が取れる. 特に例 2.4 で述べたように

$$\#\mathcal{F}_4 = 124, \quad \#[\mathbf{P}^4] = 122, \quad \#[V^4] = 1, \quad \#[\tilde{V}^4] = 1$$

である. ただしここで $[\mathbf{P}^4]$, $[V^4]$, $[\tilde{V}^4]$ はそれぞれ, $\mathbf{P}^4$, V^4 , $\tilde{V}^4$ の属する $\mathcal{F}_4$ の F 同値類である.

定理 2.5 の証明の概要は以下の通りである.

(1) ピカール数が次元より真に大きいとき

$x_1 + x_2 = x$ なる型の原始的關係が存在する場合, Reid [6] によるトーリック版森理論より, $x_1 + x_2 = x$ に関して同変ブロー・ダウンできる事がわかり, 更に同変ブロー・ダウンしたものが再び非特異トーリック・ファノ多様体になるように原始的關係を選べる事がわ

かる. よってこの場合はピカール数がより小さいものに帰着できる. $x_1 + x_2 = x$ なる型の原始的関係が存在しない場合は擬対称トーリック・ファノ多様体になる事がわかる. これらの議論は高次元の場合にも自然に拡張される事が期待される.

(2) ピカール数が次元以下のとき

この場合, (1) の場合のような統一的な理論はなく, 一般次元で考察する事は難しいように思われる. 証明の核となる理論は, (1) で述べたトーリック版森理論, Batyrev [2] によるピカール数が3以下の非特異射影的トーリック多様体の分類理論と以下の補題である.

補題 2.7 (Sato [7]) $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ として $d = a_1 + \dots + a_r$ とする. このとき

$$\mathbb{P}^{a_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{a_r} \xrightarrow{F} \mathbb{P}^d$$

である.

補題 2.8 (Sato [7]) X を非特異トーリック・ファノ多様体とし, X に対応する扇を Σ とする. このとき X のピカール数が3以下であり, Σ が分解扇ならば, X は射影空間と F 同値である. ただし非特異完備扇 Σ が分解扇 (splitting fan) であるとは, 任意の相異なる原始的コレクション $P_1, P_2 \in PC(\Sigma)$ に対して, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ が成り立つ事である.

最後に, (1) で述べたように, 予想 2.2 より幾分信憑性が高い次の予想を提示しておく.

予想 2.9 ピカール数が次元より真に大きい非特異トーリック・ファノ多様体は, 擬対称トーリック・ファノ多様体であるか, または非特異トーリック・ファノ多様体に同変ブロー・ダウンできる.

参考文献

- [1] V. V. Batyrev, Boundedness of the degree of higher-dimensional toric Fano varieties, Moscow Univ. Math. Bull. 37 (1982), 28–33.
- [2] V. V. Batyrev, On the classification of smooth projective toric varieties, Tohoku Math. J. 43 (1991), 569–585.
- [3] V. V. Batyrev, On the classification of toric Fano 4-folds, math.AG/9801107.
- [4] G. Ewald, On the classification of toric Fano varieties, Discrete Comput. Geom. 3 (1988), 49–54.

- [5] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry—An introduction to the theory of toric varieties, *Ergebnisse Math. Grenzgeb. (3)*, Vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.
- [6] M. Reid, Decomposition of toric morphisms, in *Arithmetic and Geometry*, papers dedicated to I. R. Shafarevich on the occasion of his 60th birthday (M. Artin and J. Tate, eds.), vol. II, *Geometry*, *Progress in Math.* 36, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1983, 395–418.
- [7] H. Sato, Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties, preprint, November 1998, Tohoku Univ.
- [8] V. E. Voskresenskij and A. A. Klyachko, Toroidal Fano varieties and root systems, *Math. USSR-Izv.* 24 (1985), 221–244.
- [9] K. Watanabe and M. Watanabe, The classification of Fano 3-folds with torus embeddings, *Tokyo J. Math.* 5 (1982), 37–48.

E-mail address: 96m16@math.tohoku.ac.jp