

Einstein Kähler metric に関する Momentum map
と Aubin の方程式

阪大 教養部 満洲 俊樹

§ 1. Momentum map

X を $c_1(X) > 0$ を満たす n 次元非特異射影代数多様体/ $\mathbb{C}$ と

し、

$$\mathcal{K} := \left\{ \omega : \text{Kähler form on } X \text{ s.t. } \frac{\omega}{2\pi} \text{ represents } c_1(X) \right\}$$

とおく。ここで $c_1(X) > 0$ より $\mathcal{K} \neq \emptyset$ であるので、 $\mathcal{K}$ の元 ω_0 を何でもよいからひとつ固定しておく。これを local coordinate を使って

$$\omega_0 = \sqrt{-1} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

と書く。更に $F \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ を

$$\bar{\partial} \partial \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \partial \bar{\partial} F$$

で定義する。次に、任意の $\varphi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ に対し

$$\omega(\varphi) := \omega_0 + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi = \sqrt{-1} \sum (g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

とおき $\mathcal{H} := \{ \varphi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X) \mid \omega(\varphi) \in \mathcal{K} \}$ とおく。 $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}})$

の inverse matrix を $(g_\varphi^{\bar{\beta}\alpha})$ で表わし、更に Ricci tensor を

$$\sum R_{\varphi\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta \quad \text{と書く。}$$

$$\sum R_{\varphi\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta = \bar{\partial} \partial \log \det (g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}})$$

が成り立つ。そこで、

$$\begin{aligned} \sigma(\omega(\varphi)) &:= \text{scalar curvature of } \omega(\varphi) \\ &= \sum g_{\varphi}^{\bar{\beta}\alpha} R_{\varphi\alpha\bar{\beta}} \end{aligned}$$

とおく。まず、自然な写像

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$$

$$\varphi \longmapsto \omega(\varphi)$$

は surjective であり、しかも各 fibre は (定数だけ translate することにより生ずる) $\mathbb{C}$ に同型となることに注意する。

さて、任意の $\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}} \in \mathcal{H}$ に対し、

$$\begin{aligned} M(\omega(\tilde{\varphi}), \omega(\tilde{\tilde{\varphi}})) &:= \int_{t=a}^{t=b} \left(\int_X -\dot{\varphi}_t (\sigma(\omega(\varphi_t)) - n) \omega(\varphi_t)^n \right) dt \\ L(\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) &:= \frac{\int_{t=a}^{t=b} \left(\int_X \dot{\varphi}_t \omega(\varphi_t)^n \right) dt}{\int_X \omega_0^n} \end{aligned}$$

とおく。但し $\{\varphi_t\}_{a \leq t \leq b}$ は任意の piecewise-smooth path in $\mathcal{H}$ s.t. $\varphi_a = \tilde{\varphi}$ and $\varphi_b = \tilde{\tilde{\varphi}}$ とする。大切なことは、これらの $M(\omega(\tilde{\varphi}), \omega(\tilde{\tilde{\varphi}}))$, $L(\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}})$ が path $\{\varphi_t\}_{a \leq t \leq b}$ の選び方によらず (更に $M(\omega(\tilde{\varphi}), \omega(\tilde{\tilde{\varphi}}))$ の場合は $\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}$ の選び方によらず) well-defined ということである。さて $M(,)$ 及び $L(,)$ の基本的な性質を以下列挙する。

(I) $M(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot)$ は cocycle condition を満たす。即ち、

$$\begin{cases} M(\omega_1, \omega_2) + M(\omega_2, \omega_3) + M(\omega_3, \omega_1) = 0 \\ M(\omega_1, \omega_2) + M(\omega_2, \omega_1) = 0 \end{cases} \quad (\forall \omega_1, \forall \omega_2, \forall \omega_3 \in K)$$

$$\begin{cases} L(\varphi_1, \varphi_2) + L(\varphi_2, \varphi_3) + L(\varphi_3, \varphi_1) = 0 \\ L(\varphi_1, \varphi_2) + L(\varphi_2, \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (\forall \varphi_1, \forall \varphi_2, \forall \varphi_3 \in \mathcal{H})$$

$$(II) \quad L(\varphi_1, \varphi_2 + C) = L(\varphi_1, \varphi_2) + C \quad (\forall \varphi_1, \forall \varphi_2 \in \mathcal{H}, \forall C \in \mathbb{R})$$

(III) $M(\cdot, \cdot)$ は Futaki invariant と密接な関係を持つ。即ち、 $\forall Y \in \Gamma(X, \mathcal{O}(T_X))$ に対して

$$Y_R := Y + \bar{Y}$$

$$g_t := \exp t Y_R \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。このとき、次式が成立する。

$$\frac{d}{dt} M(\tilde{\omega}, g_t^* \tilde{\omega}) = \int_X (Y_R F) \omega_0^n \quad (\forall \tilde{\omega}, \forall \tilde{\omega} \in K)$$

但し、ここで右辺 $\int_X (Y_R F) \omega_0^n$ が $\forall Y \in \Gamma(X, \mathcal{O}(T_X))$ に対して 0 に等しいとき "Futaki invariant of X が消える" と言い、また、 X が Einstein Kähler metric を admit すれば常に "Futaki invariant of X が消える" のであった (二本の基本定理)。

(IV) Functional $\mu_X: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \mu_X(\omega) := M(\omega_0, \omega)$$

で定義すると、次は同値となる。

ω が μ_X の critical point $\iff \omega$: Einstein Kähler form

しかも、 μ_X の勝手な critical point ω をひとつとってきた時
 $\{\omega_t\}_{a-\varepsilon \leq t \leq a+\varepsilon}$ を $\omega_a = \omega$ をみたす $\mathcal{K}$ の任意の smooth
path とあると、

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=a} \mu_X(\omega_t) \geq 0.$$

かくして、Donaldson が algebraic surface 上の stable
vector bundle に Einstein Hermitian metric を構成したとき
に、重要な役割を果たした Momentum map と同様の性質を、
上の μ_X は持っている事が了解される。実は、 $c_1(X) > 0$ で
あるような非特異射影代数多様体 $X/\mathbb{C}$ 上に Einstein Kähler
metric が存在するか否か、という問題を考える場合に、上
の μ_X は大層重要な役割を果たすということが、わかってきた。

§2. Aubin の方程式

広島での話の後、東北大学の坂東君から色々の comment が
あり、その後、色々と話が進展した。以下、§3 も含めて、

坂東君と共同で得られた結果である。さてまず Aubin の方程式が何であることを説明しよう。

Aubin は $c_1(X) < 0$, Yau は $c_1(X) = 0$ のときに X 上に Einstein Kähler metric が存在することを示し、Calabi の予想を肯定的に解決した。しかしながら $c_1(X) > 0$ のときは、どういうときに、 X 上に Einstein Kähler metric が存在するか、いくつかの必要条件がわかっているだけである。例えば

- 1) $\text{Aut}^0(X)$ が reductive になる (松島 の定理),
- 2) X の Futaki invariant が消える (二本),

等である。さて、Aubin は、continuity method を使って、Yau の成功した方程式を巧妙に改良して、 $c_1(X) > 0$ の場合も扱おうとした。即ち $\varphi \in C^\infty(X)$ に関する方程式

$$(*) \quad \frac{\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}})}{\det(g_{\alpha\bar{\beta}})} = e^{-t\varphi + F} \quad 0 \leq t \leq 1$$

を解くことによって、 $c_1(X) > 0$ なる X の上の Einstein Kähler metric の存在を調べようとした。この方程式 (*) で $t=0$ の場合は、Yau が解くことに成功した場合で、解があることが知られている。そして、 $t=0$ から出発して、 $t=1$ のところまで解こうというわけである。

さて、我々は、この Aubin の方程式を少し modify した形の方程式を考えることにする。§1 の仮定と記号の下に、

$$(**) \quad \frac{\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}})}{\det(g_{\alpha\bar{\beta}})} = e^{-t\varphi - L(0, \varphi) + F} \quad 0 \leq t \leq 1$$

を考える。まず、

(イ) 方程式 (**) は $t=0$ で unique solution を持つ。更に $t=0$ から $t=1$ まで連続的に解が接続されれば、 $t=1$ の解は unique に定まる。

(ロ) 次に X 上に Einstein Kähler metric が存在したと仮定する。そういう metric を勝手にひとつとってきて、その Kähler form を $\omega(\widehat{\varphi}_1)$ と書く。このとき §1 の最初の所で定めた Kähler form ω_0 をちょっとだけ動かし、 ω_0 を十分一般な Kähler form にとり直してやれば、

$$\begin{aligned} & \exists g \in \text{Aut}^0(X), \quad \exists \varphi_1 \in \mathcal{H} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \textcircled{1} & g^*(\omega(\widehat{\varphi}_1)) = \omega(\varphi_1) \\ \textcircled{2} & \varphi = \varphi_1 \text{ satisfies } (**) \text{ at } t=1 \\ \textcircled{3} & t=1 \text{ における } (**) \text{ の解 } \varphi = \varphi_1 \text{ は } t=1 \text{ から連続的に } t=0 \text{ の解にまで接続される。} \end{cases} \end{aligned}$$

さて、(イ)、(ロ)を組みあわせると、 X 上に Einstein Kähler forms $\omega(\widehat{\varphi}_1)$, $\omega(\widetilde{\varphi}_1)$ があつたとすると、

$$\begin{aligned} & \exists g_1, \exists g_2 \in \text{Aut}^0(X) \\ \text{s.t.} \quad & g_1^*(\omega(\widehat{\varphi}_1)) = g_2^*(\omega(\widetilde{\varphi}_1)). \end{aligned}$$

よって、 X 上の Einstein Kähler form は up to group action of $\text{Aut}^0(X)$ で unique となる。

Remark: 上の (ロ) では方程式 $(**)$ を $t=1$ から $t=0$ の方向に解いていったのであるが、ここで $(**)$ の時間 t における解を φ_t と書くことにすると $\frac{d}{dt} \mu_X(\varphi_t) \leq 0$ が常に成り立つので、 $t=1$ での solution φ_1 が、比較的容易に $t=0$ での solution にまで接続されたわけである。ところが逆に、方程式 $(*)$ や $(**)$ を $t=0$ から $t=1$ の方向に解いて行く場合は、momentum map μ_X が bounded below ということ仮定して初めて、 $(*)$ 及び $(**)$ が $0 \leq t < 1$ で (即ち $t=1$ の直前まで) 解けることがわかる。

以上のことを考え合わせると、次の結果を得る。

§ 3. Results.

Theorem 1: X を非特異射影代数多様体/ $\mathbb{C}$ でかつ $c_1(X) > 0$ とする。更に、 X 上に Einstein Kähler forms $\omega_1, \omega_2 \in K$ が存在したとする。このとき $\exists g \in \text{Aut}^0(X)$ s.t. $g^*(\omega_1) = \omega_2$.

Theorem 2: X を非特異射影代数多様体/ $\mathbb{C}$ でかつ $c_1(X) > 0$ とする。更に X 上に Einstein Kähler form $\omega_1 \in K$ が

存在したとする。このとき M_X は bounded below。更に、もっと強く、 $M_X(\omega_1, \omega) \geq 0$, $\forall \omega \in K$ 。

(以上、この Note では X は常に既約と仮定した。)