

Inequalities on Networks

島根大学 山崎 稀嗣
(Maretsugu Yamasaki)

1 動機付け

よく知られている次の2つの不等式を紹介する.

Wirtinger's inequality

$n+1$ 個の実数 $u_0, u_1, \dots, u_n$; $u_0 = 0$ に対し

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 \leq W_n \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})^2, \quad 1/W_n = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

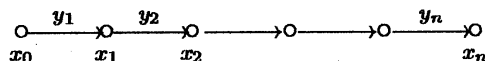
Hardy's inequality

$n+1$ 個の実数 $u_0, u_1, \dots, u_n$; $u_0 = 0$ に対し

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{u_k}{k}\right)^2 \leq H_n \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})^2, \quad 4 \leq H_n.$$

これらの名前の付いた離散型及び連続型不等式については様々な一般化があり最近でも Hardy の不等式というキーワードの付いた論文が発表されている (文献 [6], [8], [11]).

これらの不等式をネットワーク上の不等式として定式化するために, 下図の簡単なグラフ G を導入する:



グラフ G の点 (node) の集合 X , 線 (arc) の集合 Y , 結合行列 K (node-arc incidence matrix) は形式的には以下の通りである:

$$X := \{x_n; n = 0, 1, \dots, n\}, \quad Y := \{y_n; n = 1, 2, \dots, n\}$$

$$K(x_k, y_k) = 1, \quad K(x_{k-1}, y_k) = -1 \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$K(x, y) = 0 \text{ for any other pair.}$$

X 上の実数値関数 u について, $u_k := u(x_k)$ とおけば上述の2つの不等式の右辺は, Y 上で抵抗 $r = 1$ としたネットワーク $N = \{G, r\}$ 上での u のディリクレ和

を表している. また左辺は u の重み付き 2 乗和であることに着目すれば, これらの不等式をより一般的なネットワーク上で考察することが可能となる. 次の節で, 記号の説明と問題の定式化を行う.

2 問題の定式化

ネットワークの定義と記号の説明から始める.

X を点の高々可算集合, Y を線の高々可算集合, K を点と線の結合行列とするとき, $\mathcal{G} = \{X, Y, K\}$ を無限グラフという. 以下では, グラフ $\mathcal{G}$ は局所有限, 連結で自己閉ループを持たないと仮定する.

Y 上の正の実数値関数 r を抵抗関数とよび, $N = \{\mathcal{G}, r\}$ をネットワークという.

以下では次の記号を用いる:

$L(X)$: X 上の実数値関数の全体

$L_0(X)$: 台が有限集合である X 上の実数値関数の全体

$$du(y) := -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y)u(x) \quad (u \in L(X) \text{ の離散微分}),$$

$$D(u, v) := \sum_{y \in Y} r(y)[du(y)][dv(y)] \quad (u, v \in L(X) \text{ の相互ディリクレ和})$$

$$\Delta u(x) := \sum_{y \in Y} K(x, y)du(y) \quad (u \text{ の離散ラプラシアン})$$

特に, $D(u) := D(u, u)$ を $u \in L(X)$ のディリクレ和という.

また, X 上の正の実数値関数 m を重みとする $u_1, u_2 \in L(X)$ の内積を

$$((u_1, u_2))_m := \sum_{x \in X} m(x)u_1(x)u_2(x)$$

で定義し, $\|u\|_m := [((u, u))_m]^{1/2}$ とおく.

前節の簡単なグラフでは, Wirtinger の不等式と Hardy の不等式は

$$\|u\|_m^2 \leq cD(u) \quad \forall u \in L(X), u(x_0) = 0$$

が成立する定数 $c > 0$ の存在と c の最良値を求める問題となる. つまり, これらの不等式は, $L(X)$ 上の関数

$$\chi_m(u) := \frac{D(u)}{\|u\|_m^2}$$

をある制約条件の下で最小化するときの最適値を求める問題であるということが出来る. $A_0 (\neq X)$ を空でない X の有限部分集合として, 次の最小化問題を考える:

$$\begin{aligned} \lambda_m^{(1)} &:= \inf\{\chi_m(u); u \in L_0(X)\}, \\ \lambda_m^{(2)}(A_0) &:= \inf\{\chi_m(u); u \in L_0(X; A_0)\}, \end{aligned}$$

ただし, $L_0(X; A_0)$ は A_0 上で値 0 をとる $u \in L_0(X)$ の全体.

一般には, $0 \leq \lambda_m^{(1)} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0)$ が成り立つ. N が有限ネットワーク ならば

$$\lambda_m^{(1)} = 0 < \lambda_m^{(2)}(A_0)$$

である.

一般には最適値そのものは求まらないが, 本稿では最適値が正となるか否かの問題と最適値の評価の方法を検討する. $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ は離散ラプラシアンに関する固有値問題の最小固有値となっている. 離散ラプラシアンの固有値に関する研究としては文献 [2], [3], [4], [5], [7], [9], [14] 等がある.

3 有限ネットワークの場合

この節では N は有限ネットワークであること, すなわち G が有限グラフであること, を仮定する. このとき, $L_0(X) = L(X)$ となる.

最小化問題に対する最適解の存在とその特性付け:

定理 1.([13]) 最小化問題 $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ に対する最適解 $\tilde{u} \in L(X)$ が存在して, 次の性質をもつ:

- (1) $\tilde{u}(x) = 0$ on A_0 ;
- (2) $\lambda_m^{(2)}(A_0) = D(\tilde{u}), \|\tilde{u}\|_m = 1$;
- (3) $\tilde{u}(x) > 0$ on $X \setminus A_0$;
- (4) $\Delta \tilde{u}(x) = -\lambda_m^{(2)}(A_0)m(x)\tilde{u}(x)$ on $X \setminus A_0$.

更に, (1) と (4) を満たす関数は $\tilde{u}$ の定数倍しか存在しない.

$\lambda_m^{(2)}(A_0)$ は離散ラプラシアンに関する次の重み付き固有値問題の最小固有値であることが分かる:

固有値問題 次の条件を満たす関数 $u \neq 0$ と実数 λ を求める:

$$\Delta u(x) = -\lambda m(x)u(x) \text{ on } X \setminus A_0, \quad u = 0 \text{ on } A_0.$$

グラフの点の個数があまり大きくない有限ネットワークの場合には, Δ が正方行列で表されることから, この固有値問題は計算機を用いて解くことができる. しかしながら, グラフの点の個数が大きい場合や抵抗関数の与え方によっては, 通常の計算ソフトでの計算は不安定になる ([13] 参照). そこで, 固有値を直接に計算するのではなく, 最小固有値を評価する問題を考える.

$x \in X \setminus A_0$ に極をもつ N の離散倉持関数 $\tilde{g}_x$ は $L_0(X; A_0)$ の再生核として定義される ([10]). すなわち, $\tilde{g}_x$ は, すべての $u \in L_0(X; A_0)$ に対し $u(x) = D(u, \tilde{g}_x)$ を満たす一意的な $L_0(X; A_0)$ の関数である. $\tilde{g}_x$ は次の性質をもつ:

- (K.1) $\tilde{g}_x(z) = 0$ on A_0 .
- (K.2) $\Delta \tilde{g}_x(z) = -\varepsilon_x(z)$ on $X \setminus A_0$.
- (K.3) $\tilde{g}_x(z) = \tilde{g}_z(x) \leq \tilde{g}_x(x) \quad \forall x, z \in X \setminus A_0$.

非負関数 $f \in L(X)$ の倉持ポテンシャルを

$$\tilde{G}f(x) := \sum_{z \in X} \tilde{g}_z(x) f(z)$$

で定義する. 定理 1 の関数 $\tilde{u}$ の関係式 (4) の両辺に $\tilde{g}_z(x)$ を掛けて $z \in X$ について和を作ると, $\tilde{g}_z$ が再生核であることから次の関係式を得る:

補助定理 1. $\tilde{u}$ は定理 1 の関数とすると等式

$$\tilde{u}(z) = \lambda_m^{(2)}(A_0) \tilde{G}(m\tilde{u})(z)$$

が成立する.

このことを用いて, 次の評価式を得る:

定理 2. $\mu^* := \max\{\tilde{G}m(x); x \in X \setminus A_0\}$, $\mu_* := \min\{\tilde{G}m(x); x \in X \setminus A_0\}$ とおけば,

$$\frac{1}{\mu^*} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0) \leq \frac{1}{\mu_*}.$$

定理 3. $\gamma^* := \max\{\tilde{g}_x(x); x \in X \setminus A_0\}$, $\gamma_* = \min\{\tilde{g}_x(x); x \in X \setminus A_0\}$, $m(x)$ の $X \setminus A_0$ 上での和を $m(X \setminus A_0)$ とおけば,

$$\frac{1}{m(X \setminus A_0)\gamma^*} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0) \leq \frac{1}{m(X \setminus A_0)\gamma_*}.$$

最初の簡単なグラフについて, $A_0 = \{x_0\}$ として, n, r 及び m を変化させた場合の数値実験については文献 [13] を参照されたい.

最近の Urakawa[14] のアイデアを活用すると, 次の形の結果を得る:

補助定理 2. もし関数 $f \in L_0(X; A_0)$ が $X \setminus A_0$ で正の値をとれば, つぎの評価式が成立する:

$$\inf\left\{\frac{-\Delta f(x)}{m(x)f(x)}; x \in X \setminus A_0\right\} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0) \leq \sup\left\{\frac{-\Delta f(x)}{m(x)f(x)}; x \in X \setminus A_0\right\}.$$

証明: 定理 1 の関数 $\tilde{u}$ を用いて, $x \in X \setminus A_0$ に対し

$$\begin{aligned} \lambda_m^{(2)}(A_0) &= \frac{-\Delta \tilde{u}(x)}{m(x)\tilde{u}(x)} = \frac{-\Delta f(x)}{m(x)f(x)} - \frac{\Delta \tilde{u}(x)}{m(x)\tilde{u}(x)} + \frac{\Delta f(x)}{m(x)f(x)} \\ &= \frac{-\Delta f(x)}{m(x)f(x)} + \frac{\psi(x)}{m(x)\tilde{u}(x)f(x)} \end{aligned}$$

ただし, $\psi(x) := \tilde{u}(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta \tilde{u}(x)$. A_0 上で $\psi(x) = 0$ である. N は有限ネットワークだから, グリーンの公式により

$$\sum_{x \in X \setminus A_0} \psi(x) = \sum_{x \in X} \psi(x) = D(\tilde{u}, f) - D(f, \tilde{u}) = 0.$$

従って, $\psi(x)$ は恒等的に 0 (このとき $X \setminus A_0$ 上で $\lambda_m^{(2)}(A_0) = -\Delta f(x)/(m(x)f(x))$ となる) か或いは $\psi(a) > 0$, $\psi(b) < 0$ となる $a, b \in X \setminus A_0$ が存在する. すなわち

$$\inf\left\{\frac{-\Delta f(x)}{m(x)f(x)}; x \in X \setminus A_0\right\} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0) \leq \sup\left\{\frac{-\Delta f(x)}{m(x)f(x)}; x \in X \setminus A_0\right\}.$$

この補助定理を $f(x) = \tilde{G}m(x)$ に用いる. $X \setminus A_0$ 上で $\Delta f(x) = -m(x)$ だから

$$\inf\left\{\frac{1}{\tilde{G}m(x)}; x \in X \setminus A_0\right\} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0) \leq \sup\left\{\frac{1}{\tilde{G}m(x)}; x \in X \setminus A_0\right\}$$

が成立する. すなわち, 定理 2 の別証明を得る.

4 無限ネットワークの場合

以下では, N は無限ネットワークであると仮定する.

$m = 1$, $r = 1$ の場合に, $\lambda_m^{(1)} > 0$ が成立すること, すなわち, つぎの不等式

$$\sum_{x \in X} u(x)^2 \leq cD(u)$$

がすべての $u \in L_0(X)$ に対して成立するような正の定数 c が存在するとき, N においてポアンカレ・ソボレフの不等式が成り立つという.

ポアンカレ・ソボレフの不等式において, X の有限部分集合 A の特性関数 ε_A を u とすると次の強等周不等式 (SI) が得られる:

(SI) すべての有限集合 $A \subset X$ に対して,

$$|A| \leq \alpha |\partial A|$$

を満たす定数 $\alpha > 0$ が存在する. ただし, ∂A は A と $X \setminus A$ を直接に結ぶ線の全体, 記号 $|A|, |\partial A|$ は, 集合 $A, \partial A$ の要素の個数を表す

グラフ G の各点の次数が有界ならば, ポアンカレ・ソボレフの不等式と強等周不等式は同値であることが知られている ([1], [3], [7]). 特に重み関数 m を

$$m(x) = \nu(x) := \sum_{y \in Y} |K(x, y)| r(y)^{-1}$$

と選び一般的な抵抗関数 r を用いて, ポアンカレ・ソボレフの不等式を

$$\sum_{x \in X} m(x) u(x)^2 \leq cD(u)$$

と一般化したものは, 次の条件と同値である ([12]):

(GSI) すべての有限集合 $A \subset X$ に対して,

$$\sum_{x \in A} m(x) \leq \alpha \sum_{y \in \partial A} r(y)^{-1}$$

を満たす定数 $\alpha > 0$ が存在する.

無限ネットワークにおける用語を導入する. N が放物型であるとは, X のある有限部分集合 A に対して, 次の極値問題の値 (N の無限遠点の容量) が 0 となることである:

$$d_0(A, \infty) := \inf\{D(u); u \in L_0(X), u = 1 \text{ on } A\}.$$

N が放物型でないとき, N は双曲型であるという ([15], [16] 参照). この分類はランダムウォークの理論における recurrent と transient への分類と同様である. ディリクレ和有限な関数の全体

$$D(N) := \{u \in L(X); D(u) < \infty\}$$

はノルム $\|u\|_D := [D(u) + |u(x_0)|^2]^{1/2} (x_0 \in X)$ に関してヒルベルト空間になる. この空間における $L_0(X)$ の閉包を $D_0(N)$ で表す. N においてポアンカレ・ソボレフの不等式が成立すれば, N は双曲型である.

次の結果が得られる:

定理 4. N を双曲型とすると, $\lambda_m^{(2)}(A_0) > 0$ ならば $\lambda_m^{(1)} > 0$.

定理 5. N が放物型のとき, X 上で $m(x) \geq 1$ ならば $\lambda_m^{(2)}(A_0) = 0$.

ノルム $\|\cdot\|_m$ 有限な X 上の関数族:

$$L_2(X; m) := \{u \in L(X); \|u\|_m < \infty\}$$

について, 次の結果を得る:

定理 6. $\lambda_m^{(1)} > 0$ ならば $D_0(N) \subset L_2(X; m)$.

定理 7. 関数 $\nu(x)/m(x)$ が上に有界のとき, 条件 (C.1; m) が満たされるならば $D_0(N) = L_2(X; m)$.

5 有限ネットワークからの近似

ネットワーク N の近似列 $\{N_n\} (N_n = \langle X_n, Y_n \rangle)$ で $A_0 \subset X_1$ を満たすものを考える. 各有限ネットワーク N_n に対し, 次の最小化問題を考える:

$$\begin{aligned} \lambda_m^{(1)}(N_n) &:= \min\left\{\frac{D(u)}{\|u\|_m^2}; u \in L(X), u = 0 \text{ on } X \setminus X_n\right\} > 0, \\ \lambda_m^{(2)}(N_n; A_0) &:= \min\left\{\frac{D(u)}{\|u\|_m^2}; u \in D(N_n; A_0)\right\} > 0, \end{aligned}$$

ただし,

$$D(N_n; A_0) := \{u \in L(X); u = 0 \text{ on } (X \setminus X_n) \cup A_0\}.$$

これらの最小化問題に対する最適解の存在とその性質は、有限ネットワークの場合と同様に得られる：

補助定理 3. $\lambda_m^{(1)}(N_n)$ に対する最適解 u_n が存在して

- (1) $u_n(x) = 0$ on $X \setminus X_n$, $u_n(x) > 0$ on X_n .
- (2) $\Delta u_n(x) = -\lambda_m^{(1)}(N_n)m(x)u_n(x)$ on X_n .

補助定理 4. $\lambda_m^{(2)}(N_n; A_0)$ に対する最適解 u_n が存在して

- (1) $u_n(x) = 0$ on $A_0 \cup (X \setminus X_n)$, $u_n(x) > 0$ on $X_n \setminus A_0$.
- (2) $\Delta u_n(x) = -\lambda_m^{(2)}(N_n; A_0)m(x)u_n(x)$ on $X_n \setminus A_0$.

次の結果は容易に分かる：

定理 8. $\{\lambda_m^{(1)}(N_n)\}$ は $\lambda_m^{(1)}$ に収束する.

定理 9. $\{\lambda_m^{(2)}(N_n; A_0)\}$ は $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ に収束する.

$D(N_n; A_0)$ はヒルベルト空間なのでその再生核 $\tilde{g}_x^{*(n)} \in D(N_n; A_0)$:

$$u(x) = D(u, \tilde{g}_x^{*(n)}) \quad \text{for all } u \in D(N_n; A_0), x \in X_n \setminus A_0$$

が存在して、次の性質をもつ：

- (1) $\Delta \tilde{g}_x^{*(n)} = -\varepsilon_x$ on $X_n \setminus A_0$,
- (2) $0 < \tilde{g}_x^{*(n)}(z) = \tilde{g}_z^{*(n)}(x) \leq \tilde{g}_x^{*(n)}(x) \quad \forall x, z \in X_n \setminus A_0$.

更に、関数空間 $D(N; A_0) := \{u \in D(N); u = 0 \text{ on } A_0\}$ はノルム $[D(u)]^{1/2}$ に関してヒルベルト空間になる. この空間における $L_0(X; A_0)$ の閉包を $D_0(N; A_0)$ とする. $D_0(N; A_0)$ の再生核 $\tilde{g}_x^*$:

$$u(x) = D(u, \tilde{g}_x^*) \quad \forall u \in D_0(N; A_0).$$

が存在して、次の性質をもつ：

- (1) $0 < \tilde{g}_x^*(z) = \tilde{g}_z^*(x) \leq \tilde{g}_x^*(x) \quad \forall x, z \in X \setminus A_0$.
- (2) $\Delta \tilde{g}_x^*(z) = -\varepsilon_x(z)$ on $X \setminus A_0$.

優調和関数に関する最小値の原理により

$$\tilde{g}_x^{*(n)}(z) \leq \tilde{g}_x^{*(n+1)}(z) \leq \tilde{g}_x^*(z) \quad \text{on } X$$

が導かれる. 更に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_x^{*(n)}(z) = \tilde{g}_x^*(z)$$

が成立する.

$\tilde{g}_x^{*(n)}$, $\tilde{g}_x^*$ を核とする m のポテンシャル

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{*(n)}m(x) &:= \sum_{z \in X} \tilde{g}_x^{*(n)}(z)m(z) \\ \tilde{G}^*m(x) &:= \sum_{z \in X} \tilde{g}_x^*(z)m(z) \end{aligned}$$

に着目する. 補助定理 2 及び定理 2 と同様にして

$$\lambda_m^{(2)}(N_n; A_0) \geq \inf \left\{ \frac{1}{\tilde{G}^{*(n)}m(x)}; x \in X_n \setminus A_0 \right\}$$

が成立することが分かる. $\tilde{g}_x^{*(n)} \leq \tilde{g}_x^*$ だから $\tilde{G}^{*(n)}m(x) \leq \tilde{G}^*m(x)$ に注意すると次の結果を得る.

定理 10. ポテンシャル $\tilde{G}^*m(x)$ が有界ならば

$$\lambda_m^{(2)}(A_0) \geq [\sup\{\tilde{G}^*m(x); x \in X\}]^{-1} > 0.$$

定理 11. $\{\tilde{g}_x^*(x); x \in X\}$ が有界ならば

$$\lambda_m^{(2)}(A_0) \geq [m(X \setminus A_0) \sup\{\tilde{g}_x^*(x); x \in X\}]^{-1} > 0.$$

N が双曲型るとき, $D_0(N)$ の再生核 g_x は x を極とする N のグリーン関数と呼ばれている.

$$u(x) = D(g_x, u) \quad \forall u \in D_0(N).$$

N_n のグリーン関数 $g_x^{(n)} \in L(X)$ は, 条件

$$(1) \quad g_x^{(n)} = 0 \text{ on } X \setminus X_n$$

$$(2) \quad \Delta g_x^{(n)}(z) = -\varepsilon_x(z) \text{ on } X_n$$

を満たす一意的な関数として定義される. N が双曲型ならば, N_n のグリーン関数 $g_x^{(n)}$ が N のグリーン関数 g_x に収束する. グリーン関数 g_x を核とする m のポテンシャル Gm を

$$Gm(x) := \sum_{z \in X} g_x(z)m(z)$$

で定義すると, 定理 10 と同様にして次の評価式を得る:

定理 12. グリーンポテンシャル $Gm(x)$ が有界ならば

$$\lambda_m^{(1)} \geq [\sup\{Gm(x); x \in X\}]^{-1} > 0.$$

6 最適解の存在

N が無限ネットワークの場合には, 最小化問題の最適解の存在についての議論が困難になる. 実際, 最初に述べた簡単なグラフの点の個数を可算無限にして得られるグラフに対し, $r=1, m(x_k)=1/k^2, A_0=\{x_0\}$ と選べば, $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ の最適解は存在しない. すなわち, Hardy の不等式で $n=\infty$ の場合には, 等号を成立させる関数は存在しない ([6]).

定理 13. $\lambda_m^{(1)} > 0$ ならば, 関係式

$$\Delta u^*(x) = -\lambda_m^{(1)}m(x)u^*(x) \text{ on } X$$

を満たす非定数正值関数 u^* が存在する.

証明. $x_0 \in X_1$ を固定する. 補助定理 4 の関数 u_n に対し, $v_n(x) = u_n(x)/u_n(x_0)$ も $\lambda_m^{(1)}(N_n)$ に対する最適解である. $v_n(x)$ は X_n で正の優調和関数であるから, ハルナックの不等式から, x と x_0 にのみ関係して, n に無関係な定数 $\alpha(x, x_0) > 0$ が存在して

$$v_n(x) \leq \alpha(x, x_0)v_n(x_0) = \alpha(x, x_0)$$

が成立する. すなわち $v_n(x)$ は各 $x \in X$ について有界となる. 対角線論法により, $\{v_n\}$ がある $u^* \in L(X)$ に収束するようにできる. このとき, u^* が求める関数である.

上の論法は文献 [3] に依る. u^* のディリクレ和が有限であるか否かは保証できない. 少し強い仮定をおけば, ルベークの収束定理を用いて次の結果を得る:

定理 14. N において, ポアンカレ・ソボレフの不等式が成立すると仮定する. $m(X \setminus A)$ が有限ならば, 最小化問題 $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ に対する最適解 $\tilde{u} \in D_0(N; A_0)$ が存在する. $\tilde{u}$ は関係式

$$\Delta \tilde{u}(x) = -\lambda_m^{(2)}(A_0)m(x)\tilde{u}(x) \text{ on } X \setminus A_0$$

を満たす非定数正值関数である.

参考文献

- [1] A. Ancona, Positive harmonic functions and hyperbolicity, in "Potential Theory, Survey and Problems" (edited by J. Král et al.), 1-23, Lecture Notes in Mathematics, Vol.1344, Springer-Verlag, 1988.
- [2] N.L. Biggs, B. Mohar and J. Shawe-Taylor, The spectral radius of infinite graphs, Bull. London Math. Soc. 20(1988), 116-120.
- [3] J. Dodziuk, Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks, Trans. Amer. Math. Soc. 284(1984), 787-794.
- [4] J. Friedman, Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions, Duke Math. J. 69(1993), 487-525.
- [5] K. Fujiwara, Growth and the spectrum of the Laplacian of an infinite graph, Tôhoku Math. J. 48(1996), 293-302.
- [6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1964.

- [7] P. Gerl, Random walks on graphs, Lecture Notes in Math. 1210(1986), 285-303, Springer, Berlin.
- [8] G. V. Milovanović, Recent progress in inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [9] B. Mohar and W. Woess, A survey on spectra of infinite graphs, Bull. London Math. Soc. 21(1989), 209-234.
- [10] A. Murakami and M. Yamasaki, An introduction of Kuramochi boundary of an infinite network, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. 30(1997), 57-89.
- [11] B. Opic and A. Kufner, Hardy-type inequalities, Pitman Research Notes in Math. 219, Longman Science & Technical, 1990.
- [12] W. Oettli and M. Yamasaki, The generalized strong isoperimetric inequality in locally finite networks, J. Math. Anal. Appl. 209(1997), 308-316.
- [13] Y. Shogenji and M. Yamasaki, Hardy's inequality on finite networks, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser B: Mathematical Science 32(1999), 75-84.
- [14] H. Urakawa, Eigenvalue comparison theorems of the discrete Laplacians for a graph, Geom. Dedicata 74(1999), 95-112.
- [15] M. Yamasaki, Parabolic and hyperbolic infinite networks, Hiroshima Math. J. 7(1977), 135-146.
- [16] M. Yamasaki, Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Shimane Univ. 13(1979), 31-44.