

Interface のダイナミクス^{*}

大田 理 川崎 泰治

ソリトン研究の魅力の一つは疑いなく、一次元に限れば多くの非線形型発展方程式の厳密解が求めらるゝと云う数学的側面にある。しかし一次元問題にだけ捉えらるゝ物理現象はごく限らるゝとあり、したがってソリトンの概念が物理現象の理解に有用である為には次元数が 1 より大きい場合についても、数学的厳密性を犠牲にしても注意を向けて行く必要があるように思われる。

ここではこのように立場から非線形現象の一つの典型である相境界面のダイナミクスを考察してみよう。具体例として以下では秩序変数が保存しない場合の局所的秩序変数 $S(x)$ のとき確率分布関数 $P(\{S\}, t)$ に対する TDGL 方程式¹⁾とが、考へるべき方法はこの場合に限らるゝ。先づモデル方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{S\}, t) = \frac{L}{\sigma} \int dx \frac{\delta}{\delta S(x)} \left[\frac{\delta}{\delta S(x)} + \frac{\delta H\{S\}}{\delta S(x)} \right] P(\{S\}, t) \quad (1)$$

$$\text{但し} \quad H\{S\} = \frac{1}{2} \int dx (\nabla S)^2 + \int dx \phi(S(x)) \quad (2)$$

は Ginzburg-Landau-Wilson ハミルトニアンで通常 $\phi(S) = -\frac{1}{2} \tau S^2 + \frac{g}{4!} S^4$ とする。Interface が存在するのには T_c 以下でなければならぬ、

で $\tau > 0$ とする。平衡状態に Interface 近傍を除く $S = \pm M_e$, 但し $M_e = [6\tau/g]^{1/2}$ 。又 $z=0$ がある平面に Interface がある時、その近傍では $S(x) = M_e \tanh(x/\xi_0)$, $\xi_0^{-1} = (\tau/2)^{1/2}$ 。Interface が sharp にきまらぬのはその厚さ ξ_0 が他の特徴的長さ²⁾に比して充分小さければよい。この事は τ/g 即ち M_e が有限にあるように、 τ と g が無限大に近づいた極限操作により実現できる。この極限操作により (1) から Interface の運動を記述する確率的方程式を得る事ができる。今、まだ直交座標系での曲面の位置を $z = f(x)$, 但し $x = (x, y)$ とおくとこの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{f\}, t) = \frac{L}{\sigma} \int dx \frac{\delta}{\delta f(x)} \left[1 + (\nabla_x f)^2 \right]^{1/2} \left[\frac{\delta}{\delta f(x)} + \frac{\delta F}{\delta f(x)} \right] P, \quad (3)$$

$$\text{但し} \quad F = \sigma \int dx \sqrt{1 + (\nabla_x f)^2} \quad (4)$$

ここで σ は表面張力と温度で割つたものである。

^{*} 以下に示す研究の大部分は大田隆夫氏との共同研究による。又研究会の後で得られた結果をも含む。

(3) の右辺第 1 項は thermal noise による。時 $\omega = \omega_c$ Interface の曲率 $K \equiv -\sigma^{-1} \delta F / \delta f_{\text{int}}$ による drive による Interface の運動である。

$$\dot{f} / \sqrt{1 + (\partial_{x_1} f)^2} = L K \quad (5)$$

次に(3)の表から、過程は特徴的であることがわかった。そうするとこれは表面の曲がり具合と表すことができ、且つそれは時間 t に比例して増大するといわれる。その時(3)の thermal noise の項をおとせる。今度は更に道々をながると特徴的である分布 $P(f)$ は具体的に求めることができるという、これは臨界現象の analogy が役に立つ。 χ は温度 T_c に近づくとスケーリングが self-similar になりそれらのスケールは特徴的な長さ $\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}$ があるから、これは理論的に $d=4$ 群の手法によって取扱われた。その問題でも $d=4$ 群のアプローチを用いることができる。さらにこの量を適宜に rescale して $P(f, t) = \exp(-H_2 f^2 t)$ とおくとその $d=4$ 群の方法が

$$\frac{\partial}{\partial t} H_t \{f\} = L k^2 \int d\mathbf{r}_1 \sqrt{1 + (\partial_{\mathbf{r}_1} f)^2} \left[-K \frac{\delta H_t}{\delta f} + \frac{\delta K}{\delta f} \right] + \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} [vA - (d-1)H_t] \quad (6)$$

235, 或 $k'/k' = -cL$ 应用 $k(t)/k(0) = e^{-ct}$ 且 $c < 0$

$$\frac{\partial H_t}{\partial x} = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \sqrt{1 + (\partial_{x_1} f)^2} K \frac{\delta H_t}{\delta f} - \frac{\tilde{V}}{c} A + (d-1) \varepsilon H_t - \langle H_t \rangle_t \quad (9)$$

つまり、 $\alpha = \frac{1}{2} c, v, \tilde{v}$ は正の数、 K は面の平均曲率、 A は全面積、 d は bulk 相の空間次元である。相転移の場合の c は群 G の我加勝半に短海長 α より正確に与えられる。これは G の自励的時間により行われる。この式は固定点があるから、その一つは $k(t)^{-1}$ の特異的スケールで膨張した世界で眺める定常分布を意味する。尚、(9)式では既に $t = k(t)^{-1}$ が $t^{\frac{1}{2}}$ のようなスケールに入っているように見える。より正統的な c は群の方法による α も一つの RG 方程式から出せるように思う。

所²の問題²時間発展と不可逆流の問題と大変似ている点をもつて知られた。乱流
では大さな渦が不安定になり次々小さくなる渦のカスケードの分解された過程を問題
にしている（或は渦糸が細く長くなり続け行く過程）。我々の場合は時間発展と
（= 元の渦糸と元の渦糸の後で所謂 reverse quench であり注意）と今更
に2相の境としていた平らな境界面が不安定になり曲率に比例したスピードで曲がり
行き遂に細くなりシワになり完全な渦糸になる。この様な問題にはフラクタルの考えが
有効で第2の方向にも研究を進めつつある、これについては別の所で報告したい。

〔付記〕 研究会で質問があった2つの面が~~問題~~ どのような過程で存在しているか。即ち時間と正の位相との変位の曲率が大きい面は小さく、更により強く面が互に密着して行く傾向がある。