

物体により励起される表面張力重力波

京都大学大学院工学研究科 平田 基徳 (Motonori Hirata)
沖野 真也 (Shinya Okino)
花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)

Graduate School of Engineering, Kyoto University

1 はじめに

重力と表面張力を復元力として生成される水面波は表面張力重力波と呼ばれる。表面張力の効果は、cm オーダー以下の小スケールにおける熱や物質の輸送に大きな影響を与え、広い分野での応用が期待されている [1]。

本研究では、有限水深において物体や境界の変形によって励起される水面波を考える (図 1)。表面張力を考慮する場合、このような系での水面波の運動は、Froude 数 $Fr = U/\sqrt{gD}$ と Bond 数 $Bo = T/\rho g D^2$ によって決定される (ここで、 U : 代表流速, T : 表面張力係数, ρ : 密度, g : 重力加速度, D : 水深)。Froude 数は、波の長波長成分の位相速度 $\sqrt{gD}$ に対する一様流速の大きさを表し、Bond 数は重力に対する表面張力の大きさを表す。線形理論から、静止した流体の上で運動する水面波の位相速度 c_p は波数 k の関数として、

$$\frac{c_p}{\sqrt{gD}} = \sqrt{\left(\frac{1}{kD} + Bo k D\right) \tanh kD}, \quad (1)$$

と表される。この位相速度は、 $Bo = 0$ (表面張力なし), $0 < Bo < 1/3$, 及び $Bo \geq 1/3$ の場合で異なる特徴を示す (図 2)。 $Bo = 0$ および $Bo > 1/3$ の場合は、波数と位相速度は一对一の関係となるが、 $0 < Bo < 1/3$ の場合は位相速度が最小となる波数が存在し、同じ位相速度を持つ二つの波数が存在する。

流体中の物体によって励起された水面波は、それぞれの群速度で上流および下流に広がり、やがて定常な状態になると考えられる。この定常状態に関する線形理論は古くから知られており [5]、一様流速 U と同じ位相速度 c_p を持つ波が定在する解が得られる。このとき、群速度 c_g が U より大きい波は物体の上流に、小さい波は物体の下流に現れる。

このような線形理論が成り立つのは、群速度 c_g と主流 U の差が大きく、遠方に向かって波のエネルギーが伝播する場合である。一方で、長波長極限では位相速度と群速度が等しくなるため ($c_p = c_g = \sqrt{gD}$)、 $U \simeq \sqrt{gD}$ つまり $Fr \simeq 1$ の場合では、波のエネルギーは物体付近に留まり、線形理論が適用できない振幅の大きい波が現れる。よって、 $Fr \simeq 1$ における波の挙動は、非線形効果を考慮した弱非線形理論によって議論されてきた。最も有名なものは、forced Korteweg-de Vries (fKdV) 方程式 [2][3] である。この方程式は、 $U \simeq c_p = \sqrt{gD}$ を満たす波長が長波長領域のみである $Bo = 0$ と $Bo > 1/3$ の場合を対象としており、ポテンシャル流れの支配方程式に対して長波長近似を導入することで導出される。

一方で、図 2 からわかるように、 $0 < Bo < 1/3$ の場合は $c_p \simeq \sqrt{gD}$ となる波数は、長波長領域だけでなく短波長領域にも存在し得る。したがって、長波長近似が仮定されている弱非線形理論では波の挙動を議論できなくなる。 Milewski and Vanden-Broeck [4] によって、fKdV 方程式よりも短波長の波が考慮できる fifth-order forced Korteweg-de Vries (5th-order

fKdV) 方程式が提案されているが、適用範囲は $Bo = 1/3$ 付近に限定されており、また、得られる波形の妥当性も未だ検討されていない。また、計算コストの問題から、長波長近似が導入される前の支配方程式の直接数値計算も難しくなる。なぜなら、無限遠方に向かって伝播する長波長と短波長の波を評価するためには、十分広い計算領域と短波長を基準とした細かい計算格子が必要となるからである。このような理由により、長波長の非線形波が励起され得る $Fr \simeq 1$ での、 $0 < Bo < 1/3$ における波の運動は、研究課題として残されたままになっている。

そこで、本研究では、 $Fr = 1$, $0 < Bo < 1/3$ における非線形波の運動を議論する第一歩として、

- (1) Euler 方程式の直接数値計算を行い、種々の Bo について解を求める。
- (2) Euler 方程式で得られるの解と、弱非線形理論による解を比較・検討する。

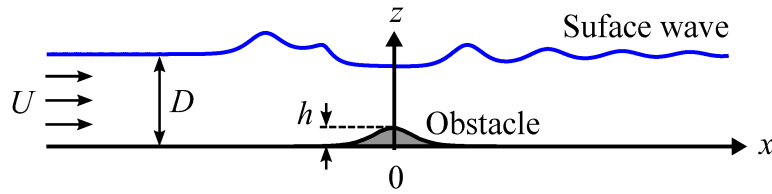


図 1: Schematic figure of the problem

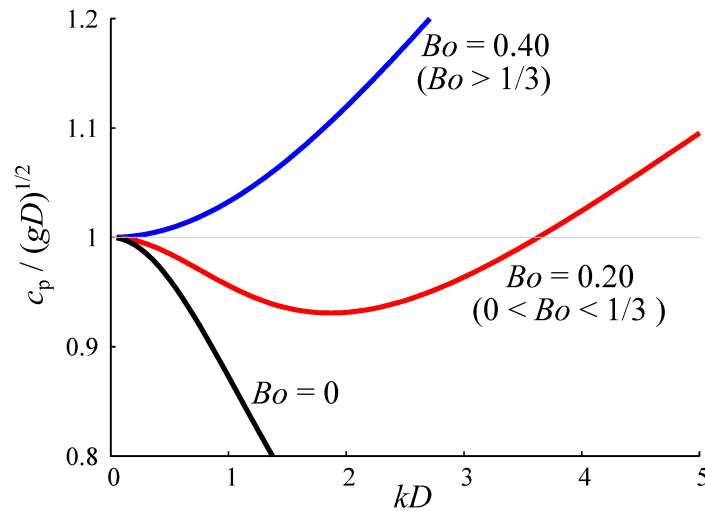


図 2: Phase velocities as functions of a horizontal wavenumber k for various Bond numbers.

2 支配方程式および境界条件

本研究では、水平底面に設置された物体の上を流れる二次元自由表面流を考える（図 1）。非圧縮性を仮定すると、流体の運動は連続の式と Navier-Stokes 方程式に支配される。水深

D , 一様流速 U , 密度 ρ , 動粘性率 ν を用いて無次元化すると, 連続の式と Navier-Stokes 方程式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} &= -\nabla p - \frac{1}{Fr^2} \hat{z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ &= -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3)$$

となる. ここで, $\mathbf{u} = (u, w)^T$ は速度ベクトル, $\hat{z}$ は垂直方向の単位ベクトルをそれぞれ表す. p と P の関係は以下の式で表される.

$$P = p - \frac{1}{Fr^2} (1 - z). \quad (4)$$

また, Re は Reynolds 数であり, $Re = UD/\nu$ で定義される.

自由表面上には力学的境界条件と運動学的境界条件が課される. 力学的境界条件は自由表面上における応力のつり合い (運動量の保存) を意味し, 法線方向および接線方向についてそれぞれ以下のように表される.

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \frac{Bo}{Fr^2} \kappa \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0. \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ および κ は界面の法線ベクトル, 接ベクトルおよび曲率を表す. また, $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルであり, 以下の式で与えられる,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (7)$$

ここで, $\mathbf{I}$ は単位行列である. 運動学的境界条件は, 自由表面上の流体粒子が自由表面と共に運動することを表し,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = w. \quad (8)$$

となる. ここで, f は自由表面の形状である.

本研究では, こうした系に対する直接数値計算の第一歩として, 粘性の効果を取り除き, Bond 数の大きさによる波の挙動の変化に焦点を絞る. そのため, 本来支配方程式とされる Navier-Stokes 方程式から粘性項を取り除いた Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = -\nabla P, \quad (9)$$

を基礎式として用いる. また, 自由表面における力学的境界条件も, 粘性項を取り除いた,

$$P = p_0 + \frac{1}{Fr^2} (z - 1) + \frac{Bo}{Fr^2} \kappa, \quad (10)$$

とする. ここで, p_0 は大気圧である.

3 数値計算法

3.1 数値計算法の選定

本研究では、自由表面の形状を精度よく計算するため、境界適合格子を用いる。境界適合格子を用いた自由表面流の直接数値計算法として、以下の3つが先行研究で比較的多く用いられている。

- (1) 支配方程式方程式に対して、垂直方向および水平方向を差分法で離散化する手法 [7][8]
- (2) 支配方程式方程式に対して、垂直方向は差分法、水平方向はスペクトル法で離散化する手法 [9][10]
- (3) ポテンシャル流れの支配方程式に対して、境界積分 (要素) 法を用いて離散化する手法 [11][12]

本研究で考える系は、時間が経過するに従い、波が分布する領域が下流方向および上流方向に拡大していく。そのため、長時間にわたる波の運動を計算するためには、水平方向に十分広い領域を設定しなければならない。一方で、波の構造を正確に表すためには、励起される波の1波長内に十分多くの離散点を配置する必要がある。励起される波の波長は場所によって異なるため、計算負荷を抑えるためには、長い波長が励起される領域には離散点を疎に、短い波長が励起される領域には離散点を密に配置する必要がある。

このような系の特徴を踏まえ、本研究では、離散点の配置の自由度が高く、少ない離散点数で広い領域を計算できる、(1)の手法を用いて Euler 方程式の直接数値計算を行った。

3.2 数値計算法

Euler 方程式の差分解法には、非圧縮性流体の数値計算法としてよく用いられる、MAC(Marker and Cell) 法を用いた。MAC 法は、圧力と速度を直接求める手法であり、本研究で扱う自由表面問題のような境界条件が圧力に対して課される問題にも、自然に適用することができる。圧力は Euler 方程式の両辺に発散を取ることによって得られるポアソン方程式から求められ、速度は Euler 方程式を用いて更新される [6]。

空間微分の離散化には、Euler 方程式 (9) の対流項以外は、2 次精度の中心差分を用いた。Euler 方程式 (9) の対流項は、数値粘性の効果をできるだけ小さくするためと、数値的安定性の両方の観点から、3 次精度の上流風上差分を適用した。時間差分には、流体内部については Adams-Bashforth 法を、自由表面については Crank-Nicolson 法を用いた。また、水面の変形を正確に捉えるため、計算格子には、時間ステップ毎に水面と共に変形する境界適合格子を用いた。

底面の物体形状 $h(x)$ は次の式で与えた。

$$h(x) = \frac{1}{50} \text{sech}^2(0.3x)$$

計算手順は以下のようになる。

1. $t = n\Delta t$ の速度場 $\mathbf{u}^n$ の値を用いて、圧力の Poisson 方程式から圧力場 P^n を求める。
2. 圧力場 P^n の値を用いて、Euler 方程式から $t = (n+1)\Delta t$ の速度場 $\mathbf{u}^{n+1}$ を求める。

3. 速度場 u^{n+1} の値を用いて、運動学的境界条件から $t = (n + 1)\Delta t$ の波面形状 f を求める。
4. 波面形状に合わせて計算点を配置し直す。

上記の手順を繰り返し、波面の時間発展を計算を行った。

3.3 計算格子の設計

計算格子の一例として、 $0 \leq Bo < 0.3$ における計算で使った格子の初期状態を図 3 に示す。水平方向の格子間隔は、以下のような波の時間発展を基に設定した。計算開始直後に物体によって励起される波は、物体の幅程度の波長を持ち、伝播速度を持たない波とおおよそ $2U$ の伝播速度を持つ波に分かれる。これらはそれぞれ、静止流体に対して、上流向きと下流向きの速度を持つ波に対応している。上流向きの速度を持つ波は主流とつり合うため、物体付近に留まり、やがて非線形波となる。一方、下流向きの速度を持つ波は物体の高さ程度の振幅のまま、一様流に乗って下流に流される。この下流に流される波が下流境界に到達した影響が物体付近の非線形波に及ばないようにするために、下流境界は物体より十分遠方に設定する必要がある。さらに、後の結果で示すが、 $0 < Bo < 1/3$ の範囲では短波長の波が上流に励起され、その分布領域が時間と共に上流に広がっていく。上流端の速度と波高は、境界条件として固定値を与えるため、この短波が上流に到達する前に計算を終える必要がある。これらの特徴を踏まえ、上流方向から物体近傍にかけては、一定の間隔で離散点を配置し、その間隔は波の波長の最小値を基準に決定した。上流端の位置は、短波の伝播速度と計算終了時刻を基準に設定した。また、物体付近から下流に向かうにつれて離散点の間隔を広げ、下流端を十分遠方に設置した。鉛直方向については、底面と自由表面に離散点を集中させた。

図 4 は、二つの計算格子 Grid 1 と Grid 2 を用いて得た、 $Bo = 0.15$ における $t = 400$ での波面である。Grid 1 は、離散点を x 方向に 19000 点、 z 方向に 150 点（最小格子間隔 $\Delta x = 2.0 \times 10^{-2}$, $\Delta z \simeq 1.0 \times 10^{-4}$ ）配置した計算格子であり、Grid 2 は、水平・鉛直ともに Grid 1 の半分の格子間隔を持つ計算格子である。なお、 $Bo = 0.15$ は本研究で扱う Bond 数の最小値であり、最も波長の短い波が観測される。図 4(a) より、大きな波の構造には、格子間隔による違いは見られない。また、波長が短い波についても、大きな波に近い領域 (図 4(b),(c)) でも、Grid 1 と Grid 2 で大きな差は見られない。しかしながら、物体の遠方に分布する波長が短い波は、Grid 1 と Grid 2 で位相と振幅に差が見られる (図 4(d))。これは、数値粘性による減衰などが原因であると考えられる。しかしながら、本研究では、上流孤立波の先端付近より下流に注目するため、Grid 1 の解像度で十分であるとする。

上記より、 $Bo \leq 0.3$ の場合は Grid 1 を使用し、 $Bo \geq 0.3$ の場合は、離散点を x 方向に 9000 点、 z 方向に 150 点（最小格子間隔 $\Delta x = 4.0 \times 10^{-2}$, $\Delta z \simeq 1.0 \times 10^{-4}$ ）配置した計算格子を使用した。

時間刻み幅は $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ とし、時刻 $t = 400$ (2×10^6 ステップ) まで計算を行った。計算には、主として大阪大学サイバーメディアセンターの NEC SX-9 および SX-ACE を使用した。計算時間 (CPU time) は約 14.5 時間 (SX-ACE の場合) であった。

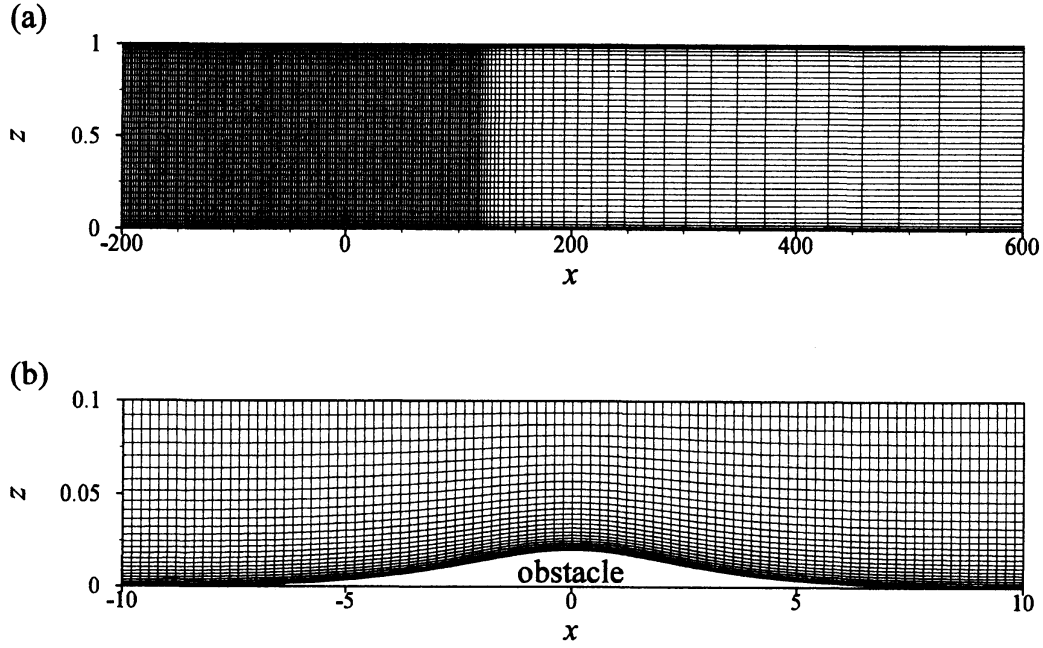


図 3: Grid used for the computation for $Bo < 0.3$. (a) Whole region of computation. Only every 100 grid point is depicted in the horizontal direction and only every 4 grid point is depicted in the vertical direction. (b) Enlarged image of the grid near the obstacle. Only every 10 grid point is depicted in the horizontal direction.

4 弱非線形理論 -fKdV 方程式と 5th-order fKdV 方程式-

$Bo = 0$ と $Bo > 1/3$ における表面張力重力波の運動を表す弱非線形理論として, fKdV 方程式が提案されている [2][3]. fKdV 方程式を導出する際には, 代表振幅スケール a , 代表波長スケール L , 水深 D が以下のように仮定されている.

$$a/D = \varepsilon, \quad D/L = \varepsilon^{1/2}, \quad (11)$$

ここで, ε は摂動パラメータである. $Fr = 1$ の場合, fKdV 方程式は以下の形となる.

$$\eta_t - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}(1 - 3Bo)\eta_{xxx} = \frac{1}{2}h_x, \quad (12)$$

ここで, η は波高を表し, 添え字は微分を表す. また, Euler 方程式の数値計算と合わせるため, 変数は水深 D , 一様流速 U を用いて無次元化している.

$Bo \simeq 1/3$ では (12) 式中の η_{xxx} の項が消滅し, 分散効果を表すことができない. そのため, 5 次 (5 階微分) の分散項を加えた 5th-order fKdV 方程式が提案されている [4]. このとき, 式 (11) とは異なるスケール

$$a/D = \varepsilon, \quad D/L = \varepsilon^{1/4}, \quad |Bo - 1/3| \sim \varepsilon^{1/2}, \quad (13)$$

が導入される. $Fr = 1$ の場合, 5th-order fKdV 方程式は以下の形となる,

$$\eta_t - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}(1 - 3Bo)\eta_{xxx} - \frac{1}{90}\eta_{xxxxx} = \frac{1}{2}h_x. \quad (14)$$

本研究では, これらの方程式を計算する手法としてスペクトル法を用いた.

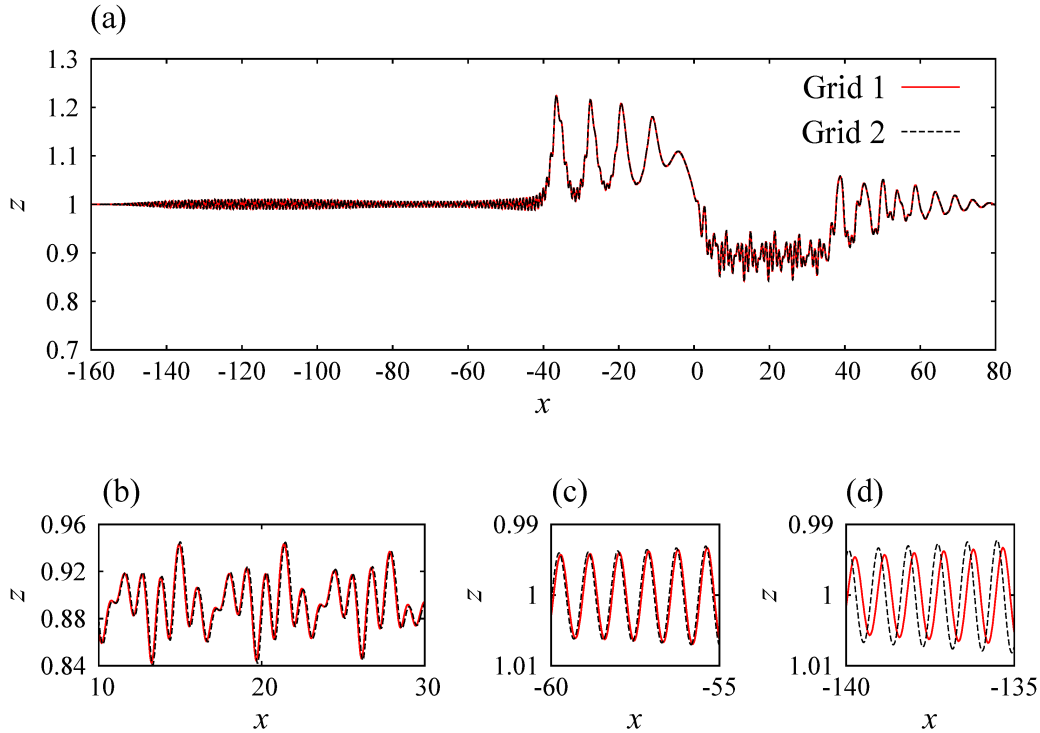


図 4: Comparison of the free-surface obtained by two computational grids ($t = 400$, $Bo = 0.15$). (a) Whole region. (b) Downstream depression region. (c) Near the upstream unduler bore. (d) Far upstream region.

5 結果

5.1 Euler 方程式の計算結果

$0 \leq Bo \leq 2/3$ における $t = 300$ での自由表面変位 η を図 5 に示す。 $Bo = 0$ (表面張力なし) における非線形波の挙動はよく知られており、上流および下流に unduler bore が励起する。上流の unduler bore は孤立波列を形成しており、下流の unduler bore は徐々に波長や振幅が変化するクノイダル波となる。物体と下流の unduler bore の間には、平らな窪んだ領域が形成し、時間と共に下流側に拡大していく。

$0 < Bo < 1/3$ では、長波長の非線形波と同時に、上流および下流に波長が短い（水深と同程度）波が励起する。物体の幅は水深の 10 倍程度であるため、これらの短波は物体によって励起されたものでなく、長波長の非線形波の運動によって発生したと考えられる。上流の短波はおおよそ同じ波長を持ち、規則的な波列となる。一方、下流の短波は、振幅が空間的にも時間的にも不規則に変化する波列となる。Bond 数の増加と共に、短波の波長および振幅が大きくなる。

$0 < Bo < 1/3$ の範囲では、長波長の非線形波についても、Bond 数によって変化がみられる。 $B = 0$ で上流に形成していた unduler bore は、Bond 数の増加に伴い、平らな領域に変化する。また、 $B = 0$ で下流に形成していた unduler bore は、 $Bo > 0.20$ では現れなくなる。

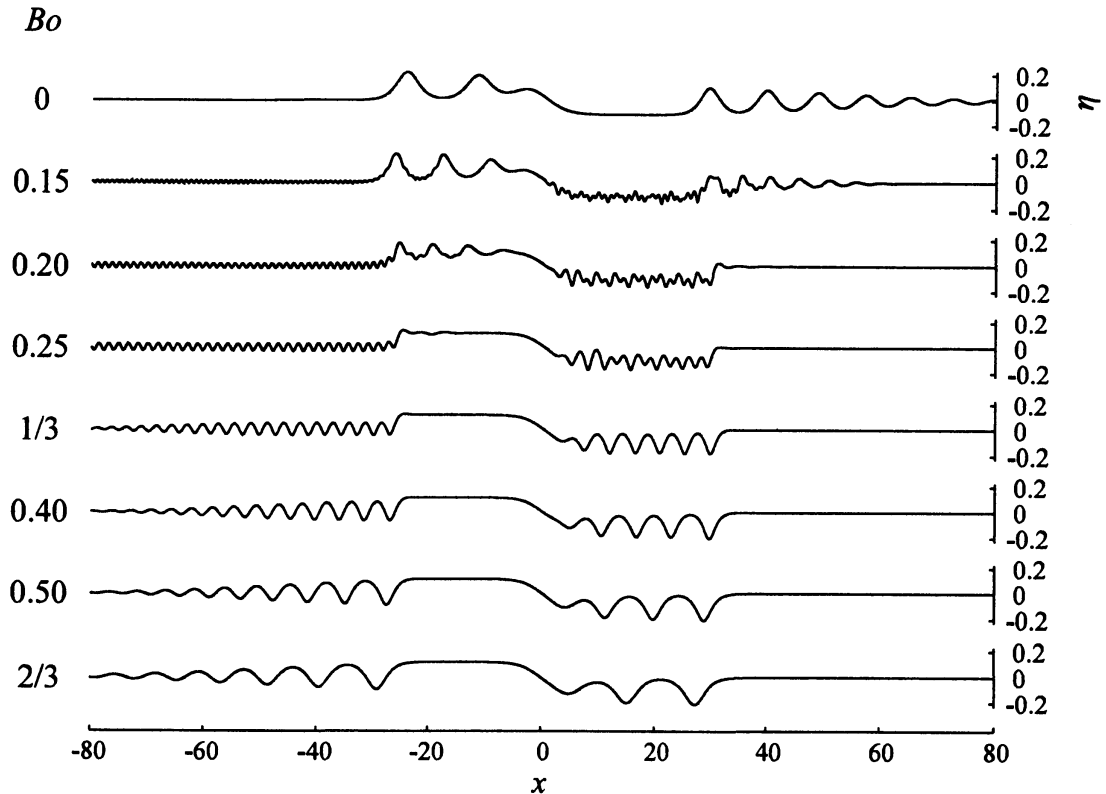


図 5: Free-surface displacements $\eta(t, x)$ at $t = 300$ obtained by the Euler equations.

$Bo > 1/3$ になると、短波の波長と振幅がますます大きくなり、上流の短波は「下に凸」の変調クノイダル波に、下流の短波は「下に凸」の孤立波列に変化する。 $Bo = 2/3$ の場合と $Bo = 0$ の場合の波の形状は、原点に対してほぼ点対称となっている。これは以下のように説明できる。(12) 式の fKdV 方程式において、変数を $\eta \rightarrow -\eta'$, $x \rightarrow -x'$, $Bo \rightarrow 2/3 - Bo'$ のように置き換えると、 η' , x' , Bo' は η , x , Bo と同じ方程式を満たす。よって、 $Bo' = 2/3$ の時の波形と $Bo = 0$ の時の波形は、上下左右が完全に反対の形状となる。上記は fKdV 方程式の場合であるが、Euler 方程式においても、同様の結果になっていると考えられる。

5.2 弱非線形理論

図 6 に、5th-order fKdV 方程式から得られた、 $0 \leq Bo \leq 2/3$ における $t = 300$ での自由表面の変位 η を示す。なお、 $Bo = 0$ の波面は、fKdV 方程式から得た。図 5 と図 6 を比較すると、どの Bond 数においても、長波長の非線形波長波（上流・下流の unduler bore）については、よい一致を示している。波長の短い波については、5th-order fKdV 方程式で得られる波長は、Euler 方程式で得られる波長よりもやや長くなっている。これは、長波長近似の仮定 ($D/L = \epsilon^{1/4}$) が短波長の波ではあまりよく満たされていないためと考えられる。しかしながら、短波が分布する領域や、下流の短波の不規則性など主要な特徴は一致している。これらの結果は、 $0 < Bo < 1/3$ における Euler 方程式の解に見られた、長波長非線形波の Bond 数依存性や短波の発生を議論する上で、5th-order fKdV 方程式は有用であるこ

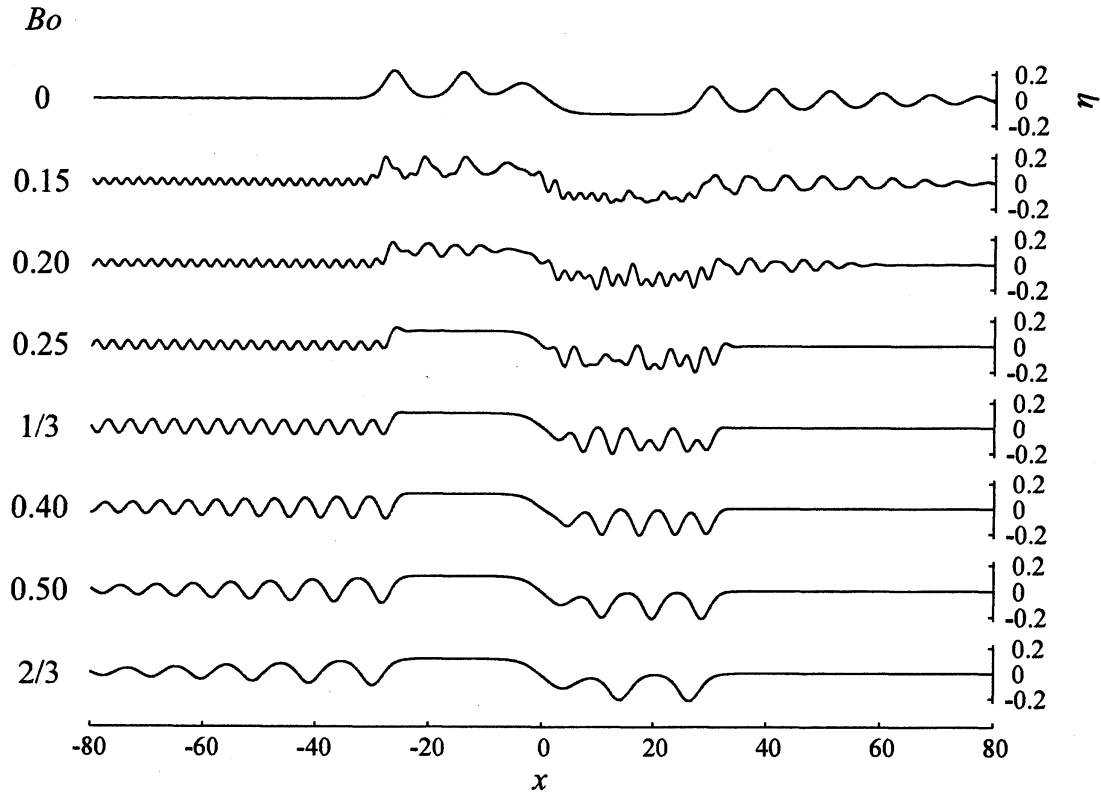


図 6: Free-surface displacements $\eta(t, x)$ at $t = 300$ obtained by the fKdV equation ($Bo = 0$) and the 5th-order fKdV equation ($Bo \geq 0.15$).

とを示唆している。

6 おわりに

物体によって励起される表面張力重力波の直接数値計算を行い、次の結果を得た。

- (1) $0 < Bo < 1/3$ では長波長の非線形波と同時に短波長の波が現れることがわかった。
- (2) 5th-order fKdV 方程式は、Euler 方程式で得られる波に対して、短波長成分以外の波の主要な特徴は記述できることがわかった。

参考文献

- [1] Miyara, A. 2000 Numerical analysis for a falling liquid film with interfacial waves on an inclined plate. Part 2: Effects of interfacial waves on flow dynamics and heat transfer. *Heat Transfer Asian Res.* **29** (3), 233-248.
- [2] Akylas, T. R. 1984 On the excitation of long nonlinear waves by a moving pressure distribution. *J. Fluid. Mech.* **141**, 455-466.

- [3] Zhu, Y. 1995 Resonant generation of nonlinear capillary-gravity waves. *Phys. Fluids*. **7**, 2294-2296.
- [4] Milewski, D. & Vanden-Broeck, J.-M. 1998 Time dependent gravity-capillary flows past an onstacle. *Wave Motion*. **29**, 63-79.
- [5] Vanden-Broeck, J.-M. 2010 Gravity-Capillary Free-Surface Flows. *Cambridge University Press*
- [6] Torres, C. R., Hanazaki, H., Ochoa, J., Castillo, J. & Van Woert, M. 2000. Flow past a sphere moving vertically in a stratified diffusive fluid. *J. Fluid. Mech.* **417**, 211-236.
- [7] Zhang, D. & Chwang, A. T. 1995 Numerical study of nonlinear shallow waves produced by a submerged moving disturbance in viscous flow. *Phys. Fluids*. **12**, 147-155.
- [8] Komori, S., Nagaosa, R. & Murakami, Y. 1992 Direct numerical simulation of three-dimensional openchannel flow with zero shear gas-liquid interface. *Phys. Fluid A* **5**, 115-125.
- [9] Tsai, W.-T. & Hung, L.-P. 2007 Three-dimensional modeling of small-scale processes in the upper boundary layer bounded by a dynamic ocean surface. *J. Geophys. Res.* **5**, C02019.
- [10] Yang, D. & Shen, L. 2011 Simulation of viscous flows with undulatory boundaries. Part I: Basic solver. *J. Comput. Phys.* **230**, 5488-5509.
- [11] Casciola, C. M. & Landrini, M. 1996 Nonlinear long waves generated by a moving pressure disturbance. *J. Fluid. Mech.* **325**, 399-418.
- [12] Morera, R. M. & Peregrine, D. H. 2010 Nonlinear interactions between a free-surface flow with surface tension and a submerged cylinder. *J. Fluid. Mech.* **648**, 485-507.