

3体問題における 2体衝突に かんする Sundmanの結果

都立大 理 岩野 正宏

Siegelの書物によれば, 1858 DirichletはKroneckerに,
微分方程式を直接解くのではなく 問題の解を step by step に
近似するような方法により 力学の問題を解くための一般的
な方法を発見した, と語った。また彼は 太陽系の安定性も
証明したと語った。彼は何も記録を残さずに間もなく世を去
った。Weierstrassは 問題は バキ級数展開を用いることだ
と感づき, n 体問題の解をみつけようと努力し, 弟子の
Kovalevski, Mittag-Lefflerを goalめがして指導した。
Mittag-Lefflerの提案により, SwedenとNorwayの王様は懸賞問
題—— n 体の座標を 任意の時刻で有効な 級数展開式で表
わすこと——を設けた。1889年 Poincaréが受賞した。論文
は 力学の将来の発展に重要な多くの独創的な ideasを含み
また数学の他の分野に対しても刺激を与えた。1913年, Sundman
は $n=3$ に対して この問題を解いた。それまでは, 初期条
件に 適当な制限を与えて 2体衝突を除外することに成功しな

かったことが、問題解決を困難にした主な理由である。彼の結果に対応するものは $n > 3$ の場合には知られていない。

§1. Euler の 10 積分.

P_k ($k=1, 2, \dots, n$) 質点, (x_k, y_k, z_k) は P_k の座標, m_k は P_k の質量, r_{kl} は 2 体 P_k, P_l の間の距離 とすれば n 体の運動方程式は

$$m_k \ddot{q} = U_q, \quad U = \sum_{k < l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

の形に かける. $3n$ 個の 2 階の方程式である. 初期条件は

$$r_{kl}(\tau) = \rho_{kl} > 0.$$

よく知られているように,

6 個の重心積分

$$\sum m_k x_k = at + a^*, \quad \sum m_k y_k = bt + b^*, \quad \sum m_k z_k = ct + c^*$$

3 個の角運動量積分

$$\sum m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \alpha, \quad \sum m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = \beta, \quad \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \gamma$$

1 個のエネルギー積分

$$T - U = h, \quad T = \frac{1}{2} \sum (m_k \dot{x}_k^2 + m_k \dot{y}_k^2 + m_k \dot{z}_k^2).$$

1913 年 Bruns は この他には代数的な積分は存在しないことを証明した。

● Sundman-Weierstrass の定理

n 体が時刻 t_1 において 一点で衝突するとき、 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ でなければならない。

[証明の方針]

$$I \equiv \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = \sum_k m_k q_k^2$$

これを微分して、 $\frac{1}{2} \ddot{I} = T + h = U + 2h$ 。したがって、衝突の時刻 t_1 の適当な近傍で $\ddot{I} > 0$ for $\exists t_2 \leq t < t_1$ 。したがって I はこの近傍で 正值単調と仮定してよい。よって $t \rightarrow t_1$ のとき I は limit をもつ。この $\text{limit} = 0$ は n 体が t_1 において 全印一点 — 重心を原点 O にとっておく — で衝突するときに限る。少し計算すれば

$$2IT \geq \frac{1}{4} \dot{I}^2 + \eta, \quad \eta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{n}.$$

よって $2IT \geq \eta$ 。 I が単減であれば、

$$2\eta \log I(t_2)/I \leq \dot{I}(t_2)^2 + 4|h| I(t_2), \quad t_2 \leq t < t_1$$

$\eta > 0$ のとき、 I は正の下界をもつ。また I が単増のとき正の下界をもつことは明らか。故に、 $\eta > 0$ のときは

$n(n-1)/2$ 個の I_{kl} の最大値は正の下界をもつ。もちろん $t_2 \leq t < t_1$ で $\max I_{kl}$ は正の下界をもつから、 n 体の O での衝突は起り得ない [終]。

● かくに $n=3$ のとき、 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ となるのは 3 体

が固定された平面上を運動するときに限る.

[証明の方針] $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ および 運動の方程式は座標系の直交変換によって不変であるから $t=\tau$ で 3体は平面 $\Sigma=0$ 内にあり, また 重心 P_0 は O にあると仮定しよう. よって $\alpha=\beta=\gamma=0$ とすれば,

$$\sum_{k=1}^3 m_k y_k \dot{z}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^3 m_k x_k \dot{z}_k = 0 \quad \text{at } t=\tau,$$

$$\sum_{k=1}^3 m_k \dot{z}_k = 0 \quad (\text{重心は } O \text{ にあるから}).$$

これらは $m_1 \dot{z}_1, m_2 \dot{z}_2, m_3 \dot{z}_3$ を未知数とする同次方程式となるから,

$$\dot{z}_k = 0 \quad \text{at } t=\tau \quad \text{であるか または}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{at } t=\tau.$$

はじめの場合は, 3体の $t=\tau$ における運動の方向は平面 $\Sigma=0$ 内にあるから, 一意性により 3体は永久に平面 $\Sigma=0$ 内を運動する. あとの場合は, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする 3角形の面積は 0 となるから, 3体は $t=\tau$ において 平面 $\Sigma=0$ 内の, ある直線上にある. 座標軸を回転して $\dot{z}_3=0$ ($t=\tau$) となるようにする. $\dot{z}_k=0$ ($k=$

1, 2, 3) の場合を除けば, $t = \tau$ において $y_1 = y_2, x_1 = x_2$ となるから $p_1 = p_2$. 同じようにして $p_2 = p_3$. よって $t = \tau$ (初期時刻) において 3 体は衝突をしていることになり, 用いられの仮定に反する. [終]

§2 3 体運動の方程式

P_1 の座標を (q_1, q_2, q_3) , P_2 のを (q_4, q_5, q_6) , P_3 のを (q_7, q_8, q_9) , 運動量をそれぞれ $(p_1, p_2, p_3), (p_4, p_5, p_6), (p_7, p_8, p_9)$ で表わす. すなわち $(p_1, p_2, p_3) = (m_1 \dot{q}_1, m_2 \dot{q}_2, m_1 \dot{q}_3)$ など. 運動のエネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 \left(\frac{p_k^2}{m_1} + \frac{p_{k+3}^2}{m_2} + \frac{p_{k+6}^2}{m_3} \right).$$

$E = T - U$ とおけば, Hamiltonian form の運動方程式

$$(2.1) \quad \dot{q}_k = E_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -E_{q_k} \quad (k=1, 2, \dots, 9)$$

をえる. Euler 積分を用いて 方程式の階数を下げるために, P_3 の座標を (x_7, x_8, x_9) , P_1, P_2 の P_3 に関する相対座標を $(x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6)$ とおけば, x と q との間の関係は

$$x_k \equiv q_k - q_{k+6}, \quad x_{k+3} \equiv q_{k+3} - q_{k+6}, \quad x_{k+6} \equiv q_{k+6}.$$

$$y_k \equiv p_k, \quad y_{k+3} \equiv p_{k+3}, \quad y_{k+6} \equiv p_k + p_{k+3} + p_{k+6}$$

を x の共役座標にとれば $(q, p) \rightarrow (x, y)$ は canonical

変換となる。このことは, " $w = w(q, y)$ とするとき,

$$p_k \equiv w_{q_k}, \quad x_k \equiv w_{y_k}, \quad \det |w_{y_k q_l}| \neq 0$$

であれば, $(q, p) \rightarrow (x, y)$ は canonical 変換である" という一般論により, この場合は w として

$$w \equiv \sum_1^3 \{ (q_k - q_{k+6}) y_k + (q_{k+3} - q_{k+6}) y_{k+3} + q_{k+6} y_{k+6} \}$$

をとればよい, ことからわかる。新しい運動方程式, T, U は

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k=1, 2, \dots, 9),$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \{ m_1^{-1} y_k^2 + m_2^{-1} y_{k+3}^2 + m_3^{-1} (y_{k+6} - y_k - y_{k+3})^2 \},$$

$$U = m_1 m_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + m_2 m_3 (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^{-\frac{1}{2}} + m_1 m_2 \{ (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 \}^{-\frac{1}{2}}.$$

さて $E \equiv T - U$ は x_7, x_8, x_9 を含まないから, y_7, y_8, y_9 は consts.

(6個の重心積分). $k=1, 2, \dots, 6$ に対応する方程式を解けば, $\dot{x}_k = E_{y_k}$

($k=7, 8, 9$) を積分して x_7, x_8, x_9 をえる。3体の重心が O にあ

れば, $y_7 = y_8 = y_9 = 0$ から $x_{k+6} = -(m_1 + m_2 + m_3)^{-1} (m_1 x_k + m_2 x_{k+3})$.

($k=1, 2, 3$). 以下の Hamiltonian 系を考えよう:

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k=1, 2, \dots, 6),$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1^{-1} + m_3^{-1}) \sum_1^3 y_k^2 + \frac{1}{2} (m_2^{-1} + m_3^{-1}) \sum_1^3 y_{k+3}^2 + m_3^{-1} \sum_1^3 y_k y_{k+3}.$$

① $t = t_1$ において 2体 P_1, P_3 が衝突すれば,

$$x y^2 \rightarrow 2 (m_1 m_3)^2 (m_1 + m_3)^{-1}, \quad x U \rightarrow m_1 m_3 \quad \text{as } t \rightarrow t_1,$$

$$\text{ただし} \quad x^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad y^2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad t_1 \text{ は有限.}$$

[証明の方針] q_4, q_5, q_6 は不等式 $|\dot{q}| \leq m_1 I_{12}^{-2} + m_3 I_{23}^{-2}$

をみたす。 P_1 と P_3 とが衝突するから、 $\exists t_2$ に対し

$$\gamma_{13} < \varepsilon/2, \quad I_{12} > \varepsilon/2, \quad I_{23} > \varepsilon/2 \quad t_2 \leq t < t_1.$$

$\varepsilon > 0$ は、 $\S 3$ で説明した $\max I_{kl}$ の正の下界。故に $g, \dot{g}$ は $t \rightarrow t_1$ のとき 有限確定値をとる。すなわち P_2 の速度成分は $t \rightarrow t_1$ のとき 有限確定値。 $t \rightarrow t_1$ のとき $P_1 - P_3 \rightarrow 0$, i.e. $g_k - g_{k+6} \rightarrow 0$. 3 体の重心は O にあるから、 $m_1 g_k + m_2 g_{k+3} + m_3 g_{k+6} = 0$ より、 $(g_1, g_2, g_3), (g_7, g_8, g_9)$ は $t \rightarrow t_1$ のとき 有限確定値、すなわち 2 体 P_1, P_3 は空間の確定点で衝突する。ついに I は $t \rightarrow t_1$ のとき 有限確定値をとる。

P_k の速度を V_k とすれば

$$\frac{1}{2} \sum m_k V_k^2 = T = U + E.$$

$t \rightarrow t_1$ のとき $\alpha \equiv \gamma_{13} \rightarrow 0$. しかるに I_{12}, I_{23} は正の下界をもつから、 $\alpha U \rightarrow m_1 m_3$. よって

$$(*) \quad \alpha \sum m_k V_k^2 \rightarrow 2 m_1 m_3.$$

よくに $t \rightarrow t_1$ のとき $\alpha V_k^2, \alpha \dot{g}_1^2, \dots, \alpha \dot{g}_9^2, \sqrt{\alpha} \dot{g}_1, \dots, \sqrt{\alpha} \dot{g}_9$ は有界。重心は O にあるから、

$$m_1 \dot{g}_k + m_2 \dot{g}_{k+3} + m_3 \dot{g}_{k+6} = 0.$$

この関係式より

$$\alpha (m_1 \dot{g}_k)^2 - \alpha (m_3 \dot{g}_{k+6})^2 = m_2 \sqrt{\alpha} \{ m_2 \sqrt{\alpha} \dot{g}_{k+3}^2 + 2 m_3 \dot{g}_{k+3} (\sqrt{\alpha} \dot{g}_{k+6}) \}$$

を得る。故に $t \rightarrow t_1$ のとき

$$\alpha (m_1 V_1)^2 - \alpha (m_3 V_3)^2 \rightarrow 0, \quad \alpha V_2^2 \rightarrow 0.$$

したがって (*) より

$$x V_1^2 \rightarrow \frac{2m_3^2}{m_1+m_3} \quad \text{as } t \rightarrow t_1.$$

$y^2 = m_1^2 V_1^2$ であるから 求める関係式が成立つ. [終]

$x(t)^{-1}$ は $t \rightarrow t_1$ のとき ∞ になる. しかしながら

$$\textcircled{\bullet} \quad \int_{\tau}^{t_1} \frac{dt}{x} = \lim_{t \rightarrow t_1} \int_{\tau}^t \frac{dt}{x} \quad \text{は収束である.}$$

[証明の方針] $\frac{1}{2} \ddot{I} = U + 2h$ を用いる. $U - m_1 m_3 x^{-1}$ は $\tau \leq t < t_1$ において有界. 故に $\frac{1}{2} \ddot{I} - m_1 m_3 x^{-1}$ は有界.

したがって 上記の積分の収束は, $t \rightarrow t_1$ のとき $\dot{I}$ が有限な limit を持つことと同等. さて $\dot{I} > 0$ for $\exists t_2 \leq t < t_1$, $\dot{I}$ は $t_2 \leq t < t_1$ において単調. まって $\dot{I}$ は有界であることを示せばよい. I の定義式より

$$\frac{1}{2} \dot{I} = \sum m g \dot{g} = \sum_k (m_1 g_k \dot{g}_k + m_2 g_{k+3} \dot{g}_{k+3} + m_3 g_{k+6} \dot{g}_{k+6})$$

重心は O にあるから, $m_3 \dot{g}_{k+6} = -m_1 \dot{g}_k - m_2 \dot{g}_{k+3}$ を得る. これを代入して, $x_1, \dots, x_6$ の定義に注意すれば

$$\frac{1}{2} \dot{I} = m_1 \{x_1 \dot{g}_1 + x_2 \dot{g}_2 + x_3 \dot{g}_3\} + m_2 \{x_4 \dot{g}_4 + x_5 \dot{g}_5 + x_6 \dot{g}_6\}.$$

右辺の各項に Schwarz の不等式を応用すれば

$$\frac{1}{2} |\dot{I}| \leq m_1 x V_1 + m_2 I_{23} V_2, \quad x = I_{13}$$

すなわち示したように $x^2 V_1^2 \rightarrow 0$, 故に $x V_1 \rightarrow 0$ as $t \rightarrow t_1$. また

I_{23}, V_2 は $t \rightarrow t_1$ のとき 有限確定値をとる. [終]

さて新しい変数 s を次式によって定義すると,

$$S(t) \equiv \int_t^{t_1} \frac{dt}{x(t)} \quad t \leq t < t_1,$$

は $t \leq t < t_1$ において 正則かつ有界である. x_k, y_k は S の関数と考えれば, $x_k(s), y_k(s)$ は $0 \leq s < s_1$ において 正則となる. しかし $t \rightarrow t_1$ のとき $x \rightarrow 0$ かつ $xy^2 \rightarrow 2(m_1 m_3)^2 / (m_1 + m_3)$ であるから, $y \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow t_1$, したがって $y_1(s), y_2(s), y_3(s)$ のうち少なくとも一つは $s = s_1$ において 正則でなくなる.

さて S を独立変数にとれば 運動方程式

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k=1, \dots, 6)$$

は, $x'_k = x E_{y_k}, \quad y'_k = -x E_{x_k} \quad (k=1, \dots, 6)$ となる. Hamiltonian form になるため, Poincaré にしたがって, E の代りに

$$F \equiv x(T - U - h) \equiv x(E - h)$$

をとれば, もとの方程式の解は $E = h$ をみたすから,

$$x'_k = F_{y_k}, \quad y'_k = -F_{x_k} \quad (k=1, \dots, 6)$$

を満足する. 逆に $F=0, x \neq 0$ なる 後者の解は前者の解となる. しかも xT, xU は $t \rightarrow t_1$ のとき有限な limit をもつ. しかし, $F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}$ のうち $t \rightarrow t_1$ のとき有界でないものがある. 故に Hamiltonian form にはあるが, $t = t_1$ の近くでの解を調べるには まだ 適当ではない.

§3 Sundman の変換.

Sundman は 衝突の時刻 t_1 の近傍での解を調べるために, Newtonian form でかかれている方程式に特別な変換を行って, 新しい方程式の右辺は t_1 の近傍で有界であるようにした. 一方 Levi-Civita は Sundman の変換も, Hamiltonian form でかかれている方程式に対して試みた. Levi-Civita の発見した canonical 変換 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ は birational な関係式

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \xi_k &= x_k y^2 - 2 y_k \sum_{l=1}^3 x_l y_l, \quad \eta_k = y_k y^{-2} \quad (k=1, 2, 3) \\ \xi_k &= x_k, \quad \eta_k = y_k \quad (k=4, 5, 6) \end{aligned}$$

or

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x_k &= \xi_k \eta^2 - 2 \eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l, \quad y_k = \eta_k \eta^{-2} \quad (k=1, 2, 3) \\ x_k &= \xi_k, \quad y_k = \eta_k \quad (k=4, 5, 6), \end{aligned}$$

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$$

で与えられる. Levi-Civita の変換の方が いろんな点ですぐれているように思われる. このように特異性 (衝突の時刻の近傍では autonomous 系の右辺が有界でなくなる) を解消する変換は regularizing transformation と呼ばれる. このすぐれた Levi-Civita の変換も Sundman のものと

密接な関係があるように思われるので、あえて Sundman の変換と呼ぶことにしたい。

上記の変換の導き方は極めて heuristic method であるが、これが canonical であることは計算によって直接に確かめることができる。いっさい 12 次の行列

$$M \equiv \begin{pmatrix} (x_k \xi_k) & (x_k \eta_k) \\ (y_k \xi_k) & (y_k \eta_k) \end{pmatrix} \in Sp(6),$$

すなわち M は 12 次の symplectic 群の要素となるから。

Siegel の著作にしたがって導き方の概略を説明しよう。

衝突 $P_1 \rightarrow P_3$ のときは、 P_2 の影響は無視できる。そこで重心は O にあるとして P_1, P_3 を 2 体問題として考える：

$$T = \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1})(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \quad U = m_1 m_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} = m_1 m_3 x^{-1} \\ F = \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1}) x y^2 - m_1 m_3 - h x \quad (\text{see p. 6})$$

となる。 $h=0$, $\frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1})=1$ なる特別な場合を考え、また 付加定数 $-m_1 m_3$ を無視して、

$$(3.3) \quad x_k' = F_{y_k}, \quad y_k' = -F_{x_k} \quad (k=1, 2, 3)$$

$$F \equiv F(x_k, y_k) \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

を考える。 $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(x, \xi)$, $\det |\mathcal{U}_{x_k \xi_k}| \neq 0$ に対して

$y_k = v_{x_k}$, $\eta_k = -v_{\xi_k}$ ($k=1,2,3$) によって定められる変換 $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$ は canonical であり, 新しい F は $F(x_k, v_{x_k})$ によえられる. このとき v を適当にとつて, $F(x_k, v_{x_k})$ を ξ のみの関数 $\lambda(\xi_k)$ となるようにできるか? そうすれば, 新しい方程式は $\xi_k' = \lambda_{\eta_k} = 0$, $\eta_k' = -\lambda_{\xi_k}$ となり, 積分として $\xi_k = \text{const}$, $\eta_k + \lambda_{\xi_k} s = \xi_k = \text{const}$ が与えられる. v は, 次の偏微分方程式を満足しなければならない:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2) = \lambda(\xi_k),$$

$$\det |v_{x_k \xi_l}| \neq 0.$$

これを解くために, 平面における同じような問題をまず考え, それを 3次元の場合に拡張することを試みる. 平面の場合は,

$$(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) = \lambda(\xi_k), \quad \det |v_{x_k \xi_l}| \neq 0.$$

$z = x_1 + \sqrt{-1} x_2$ とおき, v を 解析関数 $\phi(z) = u + \sqrt{-1} v$ の虚部として求めてみる. Cauchy-Riemann より

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = |\phi_z|^2$$

故に

$$|\phi_z|^2 = \lambda(\xi_k)$$

は const. でなければならない. $z\phi_z^2$ は解析関数であるが, $z\phi_z^2 = \text{const}$ でなければならない.

$$z\phi_z^2 = \bar{\zeta} = \xi_1 - \sqrt{-1} \xi_2, \quad \phi_z = (\bar{\zeta}/z)^{\frac{1}{2}}$$

$$\zeta = \xi_1 + \sqrt{-1} \xi_2 \quad \text{は complex const.}$$

とあければ, 積分して $\phi(z) = 2\sqrt{\xi z}$. まって

$$\sqrt{-1} v = \sqrt{\xi z} - \sqrt{\xi \bar{z}}$$

(ϕ は z, ξ の関数とみて, $2\sqrt{-1}v = \phi(z, \xi) - \phi(\bar{z}, \bar{\xi})$), 故に

$$\begin{aligned} v^2 &= 2|\xi z| - \xi z - \bar{\xi} \bar{z} \\ &= 2\{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\} \end{aligned}$$

をえる. 計算によつて $\xi z \neq 0$ ならば

$$\det |v_{x_k \xi_l}| = \frac{1}{4|\xi z|} \neq 0.$$

これで $v(x, \xi)$ は問題の偏微分方程式の解になることがわかった.

これを 3次元に拡張するため

$$v^2 = 2\left(\xi x - \sum_{\ell=1}^3 \xi_\ell x_\ell\right), \quad \xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

とあいてみる. $F(x_k, y_k) = xy^2 = x(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ であるから, 上記の v を $F(x_k, v_{x_k})$ に代入したとき, ξ だけの関数 $\lambda(\xi_k)$ になることがわかれば, この v は問題の偏微分方程式の解になる. 定義により, 微分して

$$(34) \quad v v_{x_k} = x_k x^{-1} \xi - \xi_k \quad (x \neq 0), \quad v v_{\xi_k} = \xi_k \xi^{-1} x - x_k (\xi \neq 0)$$

はじめの式に x をかけ, 2乗して k について加えれば,

$$x^2 v^2 \sum_1^3 v_{x_k}^2 = 2\xi^2 x^2 - 2\xi x \sum_1^3 \xi_k x_k = \xi x v^2.$$

故に

$$(3.5) \quad x \sum_1^3 v_{x_k}^2 = \xi, \quad (x v^2 \neq 0).$$

Jacobian は $\det |v_{x_k \xi}| = \frac{-1}{4\xi x v} \quad (\xi x v \neq 0).$

(註. Jacobian $\neq 0$ であることは簡単にできるが, 上記の値になることは証明できなかった). よって

$$\lambda(\xi_k) = \xi$$

とすればよい. $\xi x v \neq 0$ であるためには, 2つの実ベクトル (ξ_1, ξ_2, ξ_3) と (x_1, x_2, x_3) は 1次独立でなければならぬ. 母関数 $v(x_k, \xi_k)$ によって生成される canonical 変換を求めよう. まず (3.4) のはじめの式に x , あとの式に ξ をおかければ,

$$x v v_{x_k} = x_k \xi - \xi_k x = -\xi v v_{\xi_k}$$

$$y_k = v_{x_k}, \quad \eta_k = -v_{\xi_k} \text{ あり, } \quad x y_k = \xi \eta_k \quad (k=1, 2, 3).$$

$$\text{また (3.5) あり, } \quad x y^2 = \xi.$$

(3.4) のあとに式に ξ をかけ 2乗して k に関して加えて,

$$\xi \sum_1^3 v_{\xi_k}^2 = x \quad \text{or} \quad \xi \eta^2 = x.$$

$$\text{故に } x y_k = \xi \eta_k, \quad x y^2 = \xi \text{ あり, } \quad \eta_k = y_k y^{-2} \quad (k=1, 2, 3).$$

$$\text{また } x y_k = \xi \eta_k, \quad \xi \eta^2 = x \text{ あり, } \quad y_k = \eta_k \eta^{-2} \quad (k=1, 2, 3).$$

x_k の式を求めるために, (3.4) と $v_{x_k} = y_k$ とから,

$$v y_k = x_k x^{-1} \xi - \xi_k,$$

これに x_k をかけ, k に関して加えれば

$$v \sum_{k=1}^3 x_k y_k = x \xi - \sum_{k=1}^3 x_k \xi_k = \frac{v^2}{2} \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^3 x_k y_k = \frac{v}{2}.$$

同じようにして, (3.4) のあとの式に $v_{\xi_k} = \eta_k$ を代入して

$$v \eta_k = x_k - \xi_k \xi^{-1} x$$

をえるから,

$$v \sum \xi_k \eta_k = \sum x_k \xi_k - \xi x = -\frac{v^2}{2} \quad \text{or} \quad \sum \xi_k \eta_k = -\frac{v}{2}.$$

$$v y_k = x_k x^{-1} \xi - \xi_k \xi^{-1} x,$$

$$\xi_k = x_k x^{-1} \xi - v y_k = x_k x^{-1} \xi - 2 y_k \sum_{l=1}^3 x_l y_l.$$

$x y^2 = \xi$ であつたから, (3.1) のはじめの式

$$\xi_k = x_k y^2 - 2 y_k \sum_{l=1}^3 x_l y_l \quad (k=1, 2, 3)$$

をえる。また $v \eta_k = x_k - \xi_k \xi^{-1} x$ より,

$$x_k = \xi_k \xi^{-1} x - 2 \eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l.$$

$\xi \eta^2 = x$ であつたから, (3.2) のはじめの式

$$x_k = \xi_k \eta^2 - 2 \eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l$$

をえる。

上記の discussion では, 2つのベクトル $(x_1, x_2, x_3), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は real な 1 次元独立であるということが仮定されている。

(3.1) の逆変換が (3.2) であるためには, $\eta \neq 0, y \neq 0$ であらねばい。

方程式 (3.3) は $\xi'_k = 0, \eta'_k = -\xi_k \xi^{-1} \quad (k=1, 2, 3)$ となり,

この解を(3.2)の (x_1, x_2, x_3) に代入すれば, 一般に放物線を与える.

Sundmanの変換は s に independent であるから, Hamiltonian function F は, 新しい変数を用いれば

$$F \equiv xT - xU - xh,$$

$$xT = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \xi \eta^2 \sum_{k=1}^3 \eta_{k+3}^2 + \frac{1}{m_3} \xi \sum_{k=1}^3 \eta_k \eta_{k+3}$$

$$xU = m_1 m_3 + m_2 \xi \eta^2 \left(\frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{12}} \right), \quad x = \xi \eta^2$$

$$r_{23}^2 = \sum_{k=1}^3 \xi_{k+3}^2, \quad r_{12}^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\xi_k \eta^2 - 2 \eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l - \xi_{k+3} \right)^2$$

と書き, 方程式は

$$(3.6) \quad \xi'_k = F_{\eta_k}, \quad \eta'_k = -F_{\xi_k} \quad (k=1, \dots, 6).$$

● (ξ_k, η_k) , $k=1, \dots, 6$, は, $s=S_1$ (衝突の time) において正則である, or 収束半径が 0 でない $s-S_1$ のべき級数で表わせる.

[証明の方針] $s \rightarrow S_1$ ($t \rightarrow t_1$) のとき, ξ_k, η_k ($k=4, 5, 6$) は definite limits に近づく. また r_{12}, r_{23} は 正の極限に, $\xi = x y^2$ は $2(m_1 m_3)^2 / (m_1 + m_3) \equiv c > 0$ に近づく. したがって $y \rightarrow \infty$ かつ $\eta_k = \eta_k / y^2 \rightarrow 0$ ($k=1, 2, 3$).

故に $c/2 \leq \xi \leq 2c$ for $\exists s_0 \leq s < S_1$.

また $\xi_4, \xi_5, \xi_6, \eta_1, \dots, \eta_6$ は $s \rightarrow S_1$ のとき limits をもつ.

よって $(\xi_4, \dots, \eta_6)$ を 9次元空間の点とみれば, これは

或るコンパクト球 K に含まれる. $S = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3); c/2 \leq \xi \leq 2c\}$ とおく. $\xi, \chi_{12}^{-1}, \chi_{23}^{-1}$ を 12 個の変数 (ξ_k, η_k) の関数とみるとき, K が十分小なときは, これらは $P = S \times K$ で正則, したがって F は $S \times K$ で正則となる. s_0 を s_1 の十分近くにとれば, 解曲線 $(\xi_k(s), \eta_k(s))$ $s_0 \leq s < s_1$ は P に完全に含まれる. 故に $(\xi_k(s), \eta_k(s))$ は $s = s_1$ において正則. 尤も ξ_1, ξ_2, ξ_3 は $s \rightarrow s_1$ のとき limits をもつ. [終]

① $x_k(t), y_k(t), k=1, \dots, 6$ は $t=t_1$ を越えて解析接続でき.

[証明の方針] $\xi_{k1} \equiv \xi_k(s_1), k=1, 2, 3, b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right)$ と

おく. $\eta'_k = -F_{\xi_k}$ より

$$\eta'_k = -\frac{b}{c} \xi_{k1} + O(s-s_1).$$

これを積分して

$$\eta_k = -\frac{b}{c} \xi_{k1} (s-s_1) + \dots,$$

$$\eta^2 = b^2 (s-s_1)^2 + \dots.$$

一方 $x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l$ であるから,

$$x_k = \xi_{k1} b^2 (s-s_1)^2 + 2\xi_{k1} b^2 (s-s_1)^2 + \dots.$$

より

$$(3.7) \quad x_k(t) = -b^2 \xi_{k1} (s-s_1)^2 + \dots, \quad (k=1, 2, 3)$$

$$x(t) = b^2 c (s-s_1)^2 + \dots.$$

$t' = x$ より, これを積分すれば

$$t-t_1 = \frac{1}{3} b^2 c (s-s_1)^3 + \dots \quad \text{or}$$

$$(3.7) \quad s-s_1 = \{3b^{-2}c^{-1}(t-t_1)\}^{\frac{1}{3}} + \dots$$

右辺のべき級数は $t < t_1$ のときも *real*. 解 $(x_k(t), y_k(t))$ は, $t \leq t < t_1$ によって解析接続すれば, $t=t_1$ を2位の分岐点にもつ. $x_k(t)$ は 局所座標 $s-s_1$ に関して 正則, $y_k(t)$ は $y_k = \eta_k \eta^{-2}$ より $s-s_1$ に関して 1位の極(高々)

$$y_k(t) = -b^{-1}c^{-1} \xi_{k1} (s-s_1)^{-1} + \dots \quad (k=1,2,3)$$

をもつ. したがって $x_k(t), y_k(t)$ は 特異点 $t=t_1$ を越えて解析接続できる (*real s-軸*に沿って s_1 を越えて接続すればよい. このとき t は *real* かつ t_1 を越えて増加する) [終]

$$(3.7), (3.8) \text{ から, } x_k(t) = -b^2 \xi_{k1} (3b^{-2}c^{-1})^2 (t-t_1)^{\frac{2}{3}} + \dots$$

故に $t=t_1$ で2体 P_1, P_3 は衝突する. それから互に反射する $t > t_1$ が t_1 に十分近ければ $x > 0$ かつ y は有限. (3.2) によって $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ へうつるとき, $t > t_1$ のときも解であることは, Eulerの10個の積分は, t の解析関数であるから, この解析接続において不変であることからわかる. 故に

$$\begin{aligned} \xi'_k = F_{\eta_k}, \eta'_k = -F_{\xi_k} &\Rightarrow x'_k = F_{y_k}, y'_k = -F_{x_k} \Rightarrow \dot{x}_k = E_{y_k}, \dot{y}_k = -E_{x_k} \Rightarrow \dot{q}_k = E_{p_k}, \dot{p}_k = -E_{q_k} \\ (k=1, \dots, 6) & \quad (k=1, \dots, 6) & (k=1, \dots, 9) & (k=1, \dots, 9) \end{aligned}$$

$t_1 < t$ なる t をえらび, $\dot{q}_k = E_{p_k}, \dot{p}_k = -E_{q_k}$ の解は t まで接続されたものとする. この t を改めて t とかき, 解を $t > t$

の方向へ解析接続するとき有限な時刻 $t=t_2$ において特異点に出会うならば、ふたたび 2 体は衝突しなければならない。(角運動量定数は すべては 0 でない と仮定している!)

このとき衝突は P_1 と P_3 との間で起るかどうかは 明らかでない。同じような Sundman 変換を行えば 解は t_2 を越えて接続できる。この方法で 特異点の列 $\{t_n\}$ を得る。

● $\{t_n\}$ は 有限な点 t_∞ には集積しない。

[証明の方針] U は各 t_n において無限大となる。かつ $t \rightarrow t_\infty$ のとき $U \rightarrow \infty$ 。もし $U \leq A < \infty$ ならば Cauchy の存在定理により 解は $t=t_\infty$ において正則、故に n が十分大であれば t_n は解の正則点となり、これは矛盾である。

よって $t \rightarrow t_\infty$ のとき, $\min \{I_{12}, I_{23}, I_{31}\} \rightarrow 0$.

$\frac{1}{2} \ddot{I} = U + 2h$ より,

$$\ddot{I} > 0 \quad \exists t_0 \leq t < t_\infty, \quad \ddot{I} = \infty \quad \text{at } \forall t_n$$

4.7 で説明したように I は各 t_n の左側で連続かつ増加, 有限な limit をもつ。同じことが t_n の右側でもいえるから,

I は $t_0 \leq t < t_\infty$ で 連続, 増加, 有界な関数である。

よって I は $t_0 \leq t < t_\infty$ で正の下界をもつ。辺のどれか一つ, I_{12}

が 0 に近づき, 残りの二つは 或る正の数より大きい。

t_0 を通るとすれば, $t_0 \leq t < t_\infty$ における衝突は P_1 と P_3

なる特定の2体間でのみ起こることになる。したがって Sundman
の変換も、たか一回だけ行なうことにより、この区間内の無
限回の衝突における解の行動がわかる。よって

$$\lim_{t \rightarrow t_{\infty}} \xi = \lim_{t \rightarrow t_{\infty}} xy^2 = \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3} > 0.$$

特異点 t_n に対応して $s_n = \int_{t_0}^{t_n} \frac{dt}{x(t)}$, かつ $s_{\infty} = \int_{t_0}^{t_{\infty}} \frac{dt}{x(t)}$
は収束する。よって $\{s_n\}$ は有限な s_{∞} に収束する。

ところが $x(s)$ は 各 s_n , および s_{∞} において正則かつ
 s_n は $x(s)$ の zeros である。故に $x(s) \equiv 0$. 矛盾 [終]

$t \geq \tau$ および $t \leq \tau$ に対して 解析接続できる。

§4 Sundman の定理

Sundman は一つの新しい変数 ω を導入して、時間 t および
のつの座標 $q_1, \dots, q_9$ を単位円の内部 $|\omega| < 1$ で ω の正則な関数に
よって表現した。このとき real t 軸には $-1 < \omega < 1$ を対応させる。

証明の方針はつぎの通り。Sundman の変換において、独立変
数 s は衝突する2体間の距離 x に depend する。したがって二
つの質点の変換のたびに区別されているから 独立変
数の変換は、3体に関して対称性をもたない。ところが、2
体 P_1, P_3 が時刻 t_1 において衝突すると仮定すれば、 $t \rightarrow t_1$

(特異点)のとき, $U \approx m_1 m_3 x^{-1}$ となるから, x^{-1} の代りに U を
とって

$$S = \int_{\tau}^t U dt$$

を 独立変数にとれば, どの 2 体が衝突しても この S は
与えの S と同じ役目をするであろう. $t \rightarrow \pm\infty$ のとき $S \rightarrow \pm\infty$
となるように

$$S \equiv \int_{\tau}^t (U+1) dt$$

を, Sundman 変換における独立変数にとる. $real\ s$ -line 上
の任意の点 s_0 に対し, s_0 を中心とする 或る 円板 K_0 に対
応して, 時間 t および s の座標 $q_1, \dots, q_3$ は s_0 で
一様収束する $s-s_0$ のべき級数で表現される.

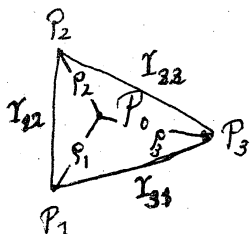
$$G_0 \equiv \bigcup_{s_0} K_0$$

は単連結領域かつ $real\ s$ -line を含む. Riemann の写像定理
によって これを ω -平面内の単位円板の内印に写像する.
ただし $real\ s$ -line は $-1 < \omega < 1$ に写像する. これで ω
の存在はわかる. しかし ω を構成するためには, K_0 の半径
 ρ_0 は, $-\infty < s_0 < \infty$ において, 正の下限をもつことを証
明する必要がある. Sundman は 次の二つの lemmas を証
明した.

● Sundman's first lemma 三つの角運動量 $const$ のすべて
は 0 でないとするれば, 3 体によってつくられる 3 角形の周

長は、任意の時刻において、ある正の数より大きい。すなわち 周長の、 $-\infty < t < +\infty$ における、下限は正。

[証明の方針] むづかしい計算をしなければならぬ。 P_0 を重心、



$$\sigma \equiv r_{12} + r_{23} + r_{31} \quad \text{と置く.}$$

$$p_j + p_k \leq r_{jl} + r_{lk}, \quad r_{jk} \leq p_j + p_k$$

$$\therefore p_1 + p_2 + p_3 \leq \sigma \leq 2(p_1 + p_2 + p_3)$$

一方

$$I \equiv \sum_1^3 m_k p_k^2 \leq \mu \sum_1^3 p_k^2 \leq \mu \sigma^2, \quad \mu = \max_1^3 m_k.$$

また

$$\frac{\sigma^2}{4} \leq (p_1 + p_2 + p_3)^2 = \left(\sum_1^3 \sqrt{m_k} p_k \cdot \sqrt{m_k}^{-1} \right)^2 \leq I \cdot \sum_1^3 m_k^{-1}.$$

よって I は 上と下から押えられる。ところで σ の、 $-\infty < t < \infty$ における下限が正であることを示すには、

$$I \geq \pm c > 0, \quad -\infty < t < \infty$$

を証明すればよい。 c (正の定数) ≥ 0 のときは I は convex となるから、 c の存在の証明は比較的によさしいが、

$c < 0$ のときは I は convex でないから、その証明は terribly hard (6頁). [終]

● Sundman's second lemma. 三つの角運動量 constants のすべてが 0 でなければ、3角形の最短 side の反対側にある質点 (衝突しない質点) の速度は、任意の時刻において、ある

正の数より小さい, 速度の, $-\infty < t < \infty$ における上限は有限.

● Sundman's 定理.

$$I(t) < A, U(t) < A, |h| < A, \eta^{-1} < A, \quad \eta = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

ならば, 質量 m_1, m_2, m_3 と A のみに関係して定まる

$\exists \delta > 0$ が存在して, 時間 t と 3体の 9つの座標 $q_1,$

$\dots, q_9$ とは $-\delta < v < \delta$ で正則な $s = \sigma + \sqrt{-1}v$ の
解析関数によって表現される. とくに

$$\sigma = \operatorname{real} s = \int_{\tau}^t (U+1) dt.$$

Band $-\delta < \operatorname{Im} s < \delta$ を, (実軸は 実軸の部分に対応する
ように) 単位円 $|\omega| < 1$ に写像する関数 ω は

$$\omega = \left(e^{\frac{\pi s}{2\delta}} - 1 \right) / \left(e^{\frac{\pi s}{2\delta}} + 1 \right)$$

で与えられる.

衝突は, $-1 < \omega < 1$ における $\frac{dt}{d\omega}$ の零点を計算すれば
よい. 任意の二つの衝突は或る正の時間間隔をあいだ起る,
(すなわち $t_n - t_{n-1} \geq \kappa > 0$, κ は A と質量とのみから定ま
る量).

[証明の方針] 独立変数を t から $s = \int_{\tau}^t (U+1) dt$ に
かえる. 3体の質量と定数 A のみによって定まる $\exists B \geq$

$A+1$ があって, 任意に s_1 を固定するとき,

$$U \leq B \quad \text{at } s=s_1 \qquad U > B \quad \text{at } s=s_1$$

であるから, 証明を別々にあこなう. あとの場合は s_1 で 2 体が衝突する場合を cover する.

$U \leq B$ at $s=s_1$. s を独立変数にとれば, (2.1) より

$$\begin{cases} q'_k = F_{p_k}, & p'_k = -F_{q_k} \quad (k=1, \dots, 9) \\ t' = \frac{1}{U+1} \end{cases} \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

$$F = \frac{E-h}{U+1} = \frac{T-U-h}{U+1} = \frac{T-h+1}{U+1} - 1$$

証明の要点は, 3 体の質量と A のみに関係して定まる量 $b > 0$ があって, $F, (U+1)^{-1}$ は 複素領域

$$|q_k - q_k(s_1)| < b, \quad |p_k - p_k(s_1)| < b$$

において正則. しかも不等式 $|T| < b_1, |U+1| < 4$ が成り立つことを示すといふ. ここで $q_k(s_1), p_k(s_1)$ は任意の real な初期値, b_1 は 3 体の質量と A のみに関係する量. このことがわかれば Cauchy の存在定理から,

$q_k(s), p_k(s), t(s)$ および 相互距離 $r_{k\lambda}(s)$ は 複素領域 $|s-s_1| < b_2$ で正則になる. b_2 も質量と A のみに関係し, 初期値および s_1 の値には無関係な量.

$U > B$ at $s = s_1$. Sundman の変換をおこなって得られた方程式 (3.6) を考える.

$$\xi'_k = F_{\eta_k}, \quad \eta'_k = -F_{\xi_k} \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

$$t' = \frac{1}{U+1} \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right),$$

$$F = \frac{xT + (1-h)x}{xU+x} - 1, \quad \frac{1}{U+1} = \frac{x}{xU+x}$$

ここで $x = r_{13} = \xi \eta^2$. $x, xT, (xU+x)^{-1}$ と ξ_k, η_k (12 個) の関数と考える. 証明の要点は, $xT, x, (xU+x)^{-1}$ は 複素領域

$$|\xi_k - \xi_k(s_1)| < C_{49}^{-1}, \quad |\eta_k - \eta_k(s_1)| < C_{49}^{-1} \quad (k=1, \dots, 6)$$

で 正則 かつ 不等式

$$|xT| < C_{46}, \quad |x| < C_{47}, \quad \frac{1}{2m_1 m_3} < |xU+x|^{-1} < \frac{2}{m_1 m_3}, \quad |F| < C_{51}$$

が満足される ことを示す ことである. C_{49}, C_{47}, C_{51} は 3 体の 正量 と A の みに 依存して 定まる 量, $\xi_k(s_1), \eta_k(s_1)$ は 任意の real 初期値. このこと かわければ 方程式の 解 $(\xi_k(s), \eta_k(s), t(s))$ は $|s-s_1| < C_{52}^{-1}$ で 正則 となる. C_{52} は 正量 と A の みに 依存する 正量. (したがって $\eta_k(s), t(s), r_{k\lambda}(s)$ は 複素領域 $|s-s_1| < C_{52}^{-1}$ において 正則 となる. よって 定理の δ は $\delta = \min(b, C_{52}^{-1})$ である.)

られる。

写像関数 ω の存在は ほとんど明らかであろう。つきに K の存在を示す。 $S=S_1$ で衝突が起れる

$$\eta_k = 0 \quad (k=1,2,3), \quad (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{\frac{1}{2}} = C \equiv \frac{2(m_1 m_3)^{\frac{1}{2}}}{m_1 + m_3} > 0. \quad \text{at } S=S_1$$

$$x = \xi \eta^2 = 0, \quad xU = m_1 m_3$$

$F_{\xi_k} = C^{-1} \xi^{-1} \xi_k$ at $S=S_1$ となる。座標軸を回転して $\xi = \xi_1$ at $S=S_1$ と仮定できる。さて Cauchy 積分公式により

$$|F_{\xi_1} - F_{\xi_1}(s_1)| < \frac{1}{2C} \quad \text{in } |\xi_k - \xi_k(s_1)| < C_{55}^{-1}, |\eta_k - \eta_k(s_1)| < C_{55}^{-1}$$

C_{55} は 質量と A のみから定まる量で C_{49} より大きい。 $F_{\xi_1} = C^{-1}$ at $S=S_1$ であるから、

$$F_{\xi_1} > \frac{1}{2C} \quad \text{for } |S - S_1| \leq C_{56}^{-1} < C_{52}^{-1}.$$

C_{56} は 質量と A のみから関係

故に $|\eta_1| = \left| \int_{s_1}^S F_{\xi_1} ds \right| \geq \frac{1}{2C} |S - S_1|$. また C_{49} を定めるとき、
 $\frac{1}{4}C < |\xi| < 2C$ for $|S - S_1| < C_{49}^{-1} < \frac{C}{10}$ も満足されている(自明ではない)から、 $\xi > \frac{C}{4}$, かつ

$$x = \xi \eta^2 \geq \frac{1}{16C} (S - S_1)^2, \quad \frac{1}{U+1} = \frac{x}{Ux+x} \geq \frac{1}{32C m_1 m_3} (S - S_1)^2.$$

故に $|t - t_1| = \left| \int_{s_1}^S \frac{ds}{U+1} \right| \geq \frac{1}{3} C_{57}^{-1} |S - S_1|^3$, $C_{57} = 32C m_1 m_3$,
for $S_1 - C_{56}^{-1} \leq S \leq S_1 + C_{56}^{-1}$.

このことから, real t 軸上で, 時刻 t_1 の前後 $\frac{1}{3} C_{57}^{-1} C_{56}^{-3}$ 時間内では $x=0$ となり得ない。よって $K = \frac{1}{3} C_{57}^{-1} C_{56}^{-3}$. [終]

§5 Siegel の予想

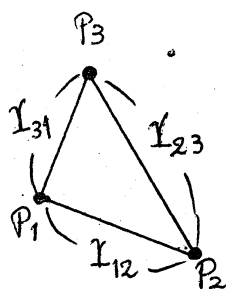
2体 P_1, P_2 が衝突するとき, 新しい座標 ξ_k, η_k と S とを導入すれば, 衝突の S -時刻 S_1 の近傍で ξ_k, η_k は $S-S_1$ の収束べき級数で表現される. このとき p.16 で説明したように

$$(5.1) \quad \xi(S_1) = 2(m_1 m_3)^2 / (m_1 + m_3), \quad \eta_1(S_1) = \eta_2(S_1) = \eta_3(S_1) = 0.$$

ここで $\xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{\frac{1}{2}}$. 条件 (5.1) のみを満足する 12 個の real 初期値 $\xi_k(S_1), \eta_k(S_1), k=1, \dots, 6$ を与える. Hamiltonian function F はこれらの値で 0 となる. $\xi'_k = F_{\eta_k}, \eta'_k = -F_{\xi_k} (k=1, \dots, 6)$ の解に対して恒等的に 0. もとの変数 $q_k, \dot{q}_k (k=1, \dots, 9)$ にもとづけば対応する解は 衝突の軌道となる. このときのエネルギー一定数はたゞ, F のなかに linear にはいっていない. よって 12 の初期値とパラメータ ϵ とは 4 個の解析的条件 (5.1) をみたす, 衝突軌道はあと 9 個のパラメータを含む. 故に 10 個の独立なパラメータを含む. 解はこれらのパラメータの解析関数となる. 重心は O にあるという条件を除けば, あと 6 個パラメータが与える. よって衝突の軌道は, $(q_k, \dot{q}_k) k=1, \dots, 9$ から成る 18 次元空間内の 16 次元の解析多様体をつくる. もう二組の衝突の場合があるから, 全部で三つのそのような多様体がある. これら三つの多様体の *in the large* における構造は? Siegel の書物には, これらは 18 次元空間内に *dense* な集合をつくることが想像される, と書かれている. 果して? Lebesgue 測度が 0 であることは知られている.

§6 3体衝突における Sundman の結果

時刻 t_1 において衝突が起るものとする。 t の代りに $t_1 - t$ をとれば, 衝突は $t=0$ において起ることになる。3体同時衝突が起るときは, 3体は或る固定された平面内になければならないから, その平面を $x=0$ とする。

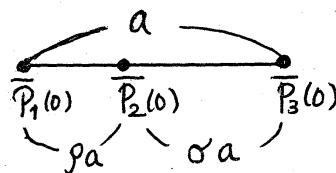
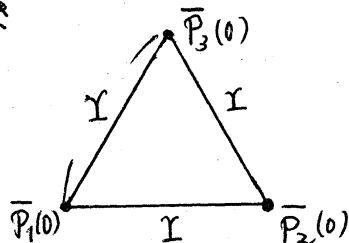


$$\bar{q} \equiv q t^{-\frac{2}{3}}, \quad \bar{p} \equiv p t^{-\frac{2}{3}}$$

$$\bar{r}_{kl} \equiv r_{kl} t^{-\frac{2}{3}}$$

とおく。Sundman は 次の結果を得た。

● $t \rightarrow 0$ のとき, $\bar{r}_{kl}$ は 有限確定値に近づき, 座標が q の代りに $\bar{q}$ であるものを $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ とかけば $t \rightarrow 0$ のとき



$\triangle \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3$ は 極限において 正三角形 になるか 直線になるかの どちらかである。このとき

$$r \equiv \lim \bar{r}_{kl} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} (m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$\frac{2}{9} a^3 = m_1 + m_2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) + m_3,$$

$$\frac{2}{9} \sigma a^3 = m_1 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + m_2 \frac{1}{\sigma^2} + m_3 \frac{1}{\sigma^3}$$

$$(\rho + \sigma = 1).$$

かなりたつ。 a を消去すれば

$$m_1 \sigma^2 (p^3 - 1) + m_2 (p^3 - \sigma^3) + m_3 p^2 (1 - \sigma^3) = 0.$$

この方程式は $p < 1$ なるただ一つの正根をもつ。したがって σ と a が定まる。

計算は極めて初等的であるが、ながくなるから証明は省略する。

さて 3体問題の特殊解は、任意値量に対しては、Lagrange による正三角形解と Euler による直線平衡解の2種類だけであることはよく知られている!

3体衝突のときは 解は接続不可能であることが Siegel によって証明されている。確定特異点型の方程式に変換したとき、いわゆる固有値が irrational (or complex) になるか、rational になれば必ず対数項があらわれるという事実から、衝突時刻をこえては接続できないことが結論される。

以上が、Siegel の天体力学の衝突にかんする部分の紹介である。