

アーベル多様体の特殊化

京都大学・大学院理学研究科数学教室 森脇 淳 (ATSUSHI MORIWAKI)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE,
KYOTO UNIVERSITY

1. はじめに

A を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されたアーベル多様体とし、素数 p で良還元 (good reduction) をもっているとする。後で詳しく書くが、特殊化写像 $\rho_p: A(\mathbb{Q}) \rightarrow A_p(\mathbb{F}_p)$ が得られる。ここで、 $A(\mathbb{Q})$ は A の $\mathbb{Q}$ -有理点全体を表し、 $A_p(\mathbb{F}_p)$ は A の p での良還元 A_p の $\mathbb{F}_p$ -有理点全体を表す。このとき、もし $A(\mathbb{Q})$ が有限群であれば、 ρ_p は単射であることはよく知られている。しかしながら、 $A_p(\mathbb{F}_p)$ は有限群であるので、 $A(\mathbb{Q})$ が無限群であれば ρ_p は単射に成り得ない。それでは、 $\mathbb{Q}(T)$ 上定義されていた場合はどうなるだろうか？ 実は、幾何学的な適当な点による還元を考えれば、単射になる。この現象を左右するのはヒルベルトの既約性定理である。講演では、これらのことについて基本的な事柄から述べた。参考文献として、

[1] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag.

[2] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, Aspects of Mathematics, Vol. 15. をあげておく。

2. 特殊化写像

まずはじめに特殊化写像について考えていこう。 S を 1 次元の正規なネータースキームとし、 $f: X \rightarrow S$ を S 上の固有なネータースキームとする。 S の点 s に対して、 s の剰余体を $\kappa(s)$ で、 f の s でのファイバー $f^{-1}(s)$ を X_s で表すことにする。 さて、 η を S の生成点とし、生成ファイバー X_η の $\kappa(\eta)$ -有理点 $P \in X_\eta(\kappa(\eta))$ 、つまり、 $P: \text{Spec}(\kappa(\eta)) \rightarrow X_\eta$ を考える。 P の像の X におけるザリスキー閉包を Δ_P で表す。 Δ_P は $f: X \rightarrow S$ の切断である。ここで、 $s \in S$ をとり、 $\Delta_P \cap X_s$ を考えると、これは X_s の $\kappa(s)$ -有理点である。この有理点を、 $\rho_s(P)$ と表すことにする。以上により、写像

$$\rho_s: X_\eta(\kappa(\eta)) \rightarrow X_s(\kappa(s))$$

が定まる。これを、点 s への特殊化写像という。

ここで、自然な疑問が生じる。 s をうまくとると、 ρ_s は単射であろうか？ もしこのようなことがわかれば、特殊ファイバーの性質（例えば、有理点が有限個であるとか）から生成ファイバーの性質が導ける可能性がある。この講演では、このことに関連した話題を考えたいと思う。まずは例から考えよう。

例 2.1. $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ とおき、 $f: \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ は自然な射とする。素数を順番に並べて

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

とする. $Q_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q})$ を, $(p_1 \cdots p_n : 1)$ で定まる点とすると, 容易に

$$\rho_{p_i}(Q_j) = \begin{cases} (p_1 \cdots p_j \bmod p_i : 1) & \text{もし } j < i \\ (0 : 1) & \text{もし } j \geq i \end{cases}$$

であることがわかる. したがって,

$$\rho_{p_i}(\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}) = \{(0 : 1), (p_1 \bmod p_i : 1), \dots, (p_1 \cdots p_{i-1} \bmod p_i : 1)\}$$

となり, $\#(\rho_{p_i}(\{Q_j\}_{j=1}^{\infty})) < \infty$ である. これは, どの素数で特殊化写像を考えても, 単射にならないことを示している. このようなことは, あとでいうヒルベルト的でない $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ の特殊性であろうか? 次の同様の例はそうでもないことを示している.

例 2.2. 次に, K は可算濃度の体 (例えば, $K = \mathbb{Q}$) とし, $S = \text{Spec}(K[T])$, $X = \mathbb{P}_{K[T]}^1$ とおく. K は可算濃度であるので, 番号をふって,

$$K = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

とおく. さらに, 多項式 $f_n(T)$ を $f_n(T) = (T - a_1) \cdots (T - a_n)$ とおく. 点 $P_n \in \mathbb{P}_{K(T)}^1(K(T))$ を $P_n = (f_n(T) : 1)$ と定める. このとき,

$$\rho_{a_i}(P_n) = \begin{cases} ((a_i - a_1) \cdots (a_i - a_n) : 1) & \text{もし } i < n \\ (0 : 1) & \text{もし } i \geq n \end{cases}$$

となり特殊化写像はどの点で考えても単射にならない.

以上のように, 特殊化写像の単射性は, けっこうやっかいな問題である. このことを考える上で重要になるヒルベルト性について考えよう.

3. ヒルベルト的スキーム

X を整なスキームとする. X の部分集合についての「薄集合」なる概念, 及び, X がヒルベルト的であるという性質を定義しよう.

定義 3.1. Y は整なスキームで, $\pi : Y \rightarrow X$ を支配的な射とする. ここで, Y の函数体 $\text{Rat}(Y)$ は X の函数体 $\text{Rat}(X)$ 上有限次代数拡大であり, π の生成ファイバーは $\text{Rat}(X)$ -有理点をもたないとする. このとき,

$$\Omega(Y \rightarrow X) = \left\{ x \in X \mid \begin{array}{l} \text{ある } y \in Y \text{ があって } \pi(y) = x \text{ であり,} \\ \pi \text{ により } y \text{ の剰余体と } x \text{ の剰余体の間の同型を導く.} \end{array} \right\}$$

を Y についての X の**基本薄集合** (basic thin set) という. さらに, 基本薄集合の有限和集合を X の**薄集合** (thin set) という.

定義 3.2. S を X の部分集合とし, これを固定する. 例えば, X の閉点全体であるとか, X が体 k 上定義されているとき, X の k -有理点全体が S の典型的な例である. さて, X が S についてヒルベルト的であるとは, X の任意の薄集合 Ω に対して, $\Omega \cap S \subsetneq S$ が成立するときという.

例 3.3. $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, $Y_1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 3))$ とおくとき,

$$\Omega(Y_1 \rightarrow X) = \{p \in \text{Spec}(\mathbb{Z}) \mid X^2 + 3 \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上で根をもつ.}\}$$

である。まず, $2, 3 \in \Omega(Y_1 \rightarrow X)$ である。さらに, $p \neq 2, 3$ のとき, 相互法則を用いれば,

$$\begin{aligned} X^2 + 3 \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上で根をもつ. } &\iff \left(\frac{-3}{p} \right) = 1 \\ &\iff p \equiv 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\Omega(Y_1 \rightarrow X) = \{p \in \text{Spec}(\mathbb{Z}) \mid p = 2, 3 \text{ または } p \equiv 1 \pmod{3}\}$$

である。

例 3.4. $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, $Y_2 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^3 - 2))$ とおく。 p を $p \geq 5$ で $p \equiv 2 \pmod{3}$ となる素数とする。このとき, $\mathbb{F}_p^\times$ は位数 3 の元を持たないので, $X^3 = 1$ の $\mathbb{F}_p$ での根は 1 のみである。よって, $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ を $f(x) = x^3$ と定めると, これは単射になる。したがって, $x^3 = 2$ となる $x \in \mathbb{F}_p$ が存在する。ゆえに,

$$\Omega(Y_2 \rightarrow X) \supseteq \{p \in \text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{0\} \mid p \geq 5 \text{ かつ } p \equiv 2 \pmod{3}\}$$

となる。

例 3.5. 例 3.3 と 例 3.4 から, $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ は, $S = \{\text{素数全体}\}$ についてヒルベルト的でないことがわかる。

例 3.6. k を体とし, d を 2 以上の整数とする。このとき, $\{a^d \mid a \in k\}$ は, $A_k^1(k)$ について A_k^1 の中で薄集合である。実際, X を X^d に送る準同型 $k[X] \rightarrow k[X]$ から定まるスキームの射 $f: A_k^1 \rightarrow A_k^1$ を考えると,

$$\Omega(A_k^1 \xrightarrow{f} A_k^1) = \{a^d \mid a \in k\}$$

となるからである。これから, k が閉体のとき, A_k^1 はヒルベルト的でない。

ここまでは, 否定的な例を中心に上げてきたが, 肯定的な例をあげよう。それは, 次のヒルベルトの既約性定理と呼ばれるものである。

定理 3.7. $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q})$ についてヒルベルト的である。

この定理の証明は, いろいろ知られている。たとえば, Lang の本にある Puiseux 級数を巧みに利用するもの, ジーゲルの定理を利用するものがあり, モデル理論の立場からの証明も知られている (例えば, 板井昌典さんの「幾何学的モデル理論入門」)。また, 上の定理の系として次がわかる。

系 3.8. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体とする。このとき, $\mathbb{P}_K^n$ は $\mathbb{P}_K^n(K)$ についてヒルベルト的である。

4. アーベル多様体の場合の特殊化

最後に, アーベル多様体の場合の特殊化写像がいつ単射になるかを考えよう。

定理 4.1. S を正規なネータースキームとし, K をその函数体とする。 $A \rightarrow S$ をアーベルスキームで, その生成ファイバーの有理点 $A_K(K)$ は有限生成であると仮定する。このとき, S の薄集合 Ω と真のザリスキー閉集合 T が存在して, 任意の $s \in S \setminus (\Omega \cup T)$ について, 特殊化写像 $\rho_s: A_K(K) \rightarrow A_s(\kappa(s))$ は単射である。

証明. まず, 次のことに注意する. $\phi: M \rightarrow N$ をアーベル群の間の準同型とする. n を 2 以上の整数で次が成立していると仮定する.

- (1) M は有限生成である.
- (2) ϕ による $M/nM \rightarrow N/nN$ は単射である.
- (3) ϕ による $M_{\text{tor}} \rightarrow N_{\text{tor}}$ は単射である.
- (4) $M_n = \{x \in M \mid nx = 0\}$, $N_n = \{y \in N \mid ny = 0\}$ とおくと, ϕ により M_n と N_n は同型である.

このとき, ϕ は単射である.

n を K の標数と素になる整数をとり, $M = A_K(K)$, $N = A_s(\kappa(s))$, $\phi = \rho_s$ の場合について, 上の (1) — (4) を満たすような $s \in S$ の選らび方を考える. (1) は仮定である. (3) については, $\kappa(s)$ の標数が n と素になるところを選ぶと一般論である. さらに, S から適当な真のザリスキー閉集合を除いて, n -倍写像 $[n]: A \rightarrow A$ の核 $\ker[n]$ は S 上エタールであると仮定してよい.

さて (4) について考えよう. まず, $\ker[n] = B_1 \cup \dots \cup B_r$ を既約分解とし, $1 \leq i \leq l$ については $B_i \rightarrow S$ の次数は 1 で, $l < j \leq r$ については $B_j \rightarrow S$ の次数は 2 以上であると仮定する. さて, $l < j \leq r$ について, $B_j \rightarrow S$ から定まる基本薄集合を Ω_j とする. このとき, $s \notin \Omega_{l+1} \cup \dots \cup \Omega_r$ であるなら, $l = \#(A_K(K)_n) = \#(A_s(\kappa(s))_n)$ である. よって (4) は満たされる.

最後に, (2) について考える. $\sigma_1, \dots, \sigma_h \in A_K(K)$ を $A_K(K)/nA_K(K)$ の 0 以外の代表元とする. (2) を満たすようにするには, 各 σ_i について $\sigma_i(s) \notin nA_s(\kappa(s))$ となるように s を選べばよい. さて, σ_i から定まる切断を Γ_i とし, $\Delta_i = [n]^{-1}(\Gamma_i)$ とおく. Δ_i は K -有理点を持たないので, $\Delta_i = T_1 \cup \dots \cup T_r$ を既約分解とすると, 各 $T_j \rightarrow S$ の次数は 2 以上である. そこで, $T_j \rightarrow S$ から定まる薄集合を Ω'_j とすると, $s \notin \Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_r$ であるなら, $\sigma_i(s) \notin nA_s(\kappa(s))$ である. $\square$