

置換群と不変式 — Wielandt の仕事の紹介

大阪大学教養部 平峰 豊

Wielandt の Lecture Note “Permutation groups through invariant relations and invariant functions” (Ohio State University) の主として後半の部分の内容を紹介した。この中で、Wielandt は置換群と不変式論の立場からみて、その間の関係を調べ、それを素数_中次数の置換群の研究に応用した。(上記 Lecture Note [1] 参照)

§ 1. Invariant relations

Ω を集合、 G をその上に作用している群とする。群 G の $\Omega^k (= \underbrace{\Omega \times \cdots \times \Omega}_{k \text{ 回}})$ への作用を次により定義する。

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^g = (\alpha_1^g, \dots, \alpha_k^g)$$

$$(g \in G, (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Omega^k)$$

Ω^k の部分集合を k -relation という。 G -不変な k -relation の全体の集合を $k\text{-rel } G$ で表わす。 $k\text{-rel } G$ が群 G の置換群としての性質を反映している。これに関して次が成

りたつ.

定理 Ω^k の G -orbits への分解と $\Omega^k = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ とおくとき

$$\Phi \in k\text{-rel } G \iff \exists \Lambda' \subset \Lambda \quad \Phi = \sum_{\lambda \in \Lambda'} \Phi_\lambda$$

例. $k=2$, $\Phi_1 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$, $\Phi_2 = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \neq \beta \in \Omega\}$ とおくと $\Phi_1, \Phi_2 \in 2\text{-rel } G$

例. 次が成り立つ.

$$G: 2\text{重可移} \iff 2\text{-rel } G = \{\phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_1 \cup \Phi_2\}$$

§ 2. Invariant functions

G -invariant relation と “function” の言葉で言い換えることを考える.

F を体とし, $|\Omega| = n$ とする. F_k を Ω^k で定義された値を F にとる関数全体を表わすものとする:

$$F_k = \{f: \Omega^k \rightarrow F\}$$

明らかに F_k は (自然な和と積に関して) F 上の commutative associative algebra となる. k -relation Φ に対して.

$$f_\Phi(\beta) = \begin{cases} 1 & (\beta \in \Phi) \\ 0 & (\beta \notin \Phi) \end{cases} \quad \text{と定めると明らかに}$$

に $f_\Phi \in F_k$ である. これを Φ の特性関数という. F_k は.

$\{f_p \mid p \in \Omega^k\}$ を basis としてもつから $\dim_F F_k = n^k$ が成り立つ。また、群 G の F_k への作用を次により定義する：

$$f^g(z) = f(z^{g^{-1}}) \quad f \in F_k, g \in G \quad (\forall z \in \Omega^k)$$

これにより F_k は G -algebra となる。 F_k は次に定義する $F_k G$ を G -subalgebra として持ち、これが重要な役割をもつ：

$$F_k G = \{f \in F_k \mid f^g = f \quad \forall g \in G\}$$

これを用いて $\mathfrak{r}$ で定義した k -rel G は次のように言い換えることができる。

$$\text{定理} \quad \Phi \in k\text{-rel } G \iff f_\Phi \in F_k G$$

さらに次が成り立つ。

$$\text{定理} \quad \dim_F F_k G = |\text{orb}(G, \Omega^k)|.$$

定理 $\dim_F \text{Hom}_G(F_1, F_1) \geq 2$. ここで等号が成立するための必要十分条件は G が 2 重可移となることである。

定理 M_1, M_2 を F_k の G -submodules とするとき、

(i) $M_1 \cap M_2, M_1 + M_2, M_1 M_2, M_1 : M_2 = \{f \in F_k \mid f M_2 \leq M_1\}$ は F_k の G -submodules となる。

(ii) $M_1 \leq M_2$ ならば、 $M_1 : M_2$ は G -subalgebra となる。

上の定理の(ii)により、 F_k の G -submodule M を一つ定めると $M : M$ なる G -subalgebra が対応するか。 $k=1$ で

ある場合については次がなりたつ。これは置換群における primitive という概念を "function" の言葉で言い換えたものとなっている。

定理 G が Ω 上 primitive

$\iff$ 定数関数全体 C と含む F_1 の G -subalgebra は C と F_1 だけに限る。

§3 次数が素数中の可移群への応用.

$GF(q)$ 上の n 次元ベクトル空間 V の affine 変換全体の集合を $\text{Aff}(n, q)$ と表わす。また、置換群 (G, Ω) が uniprimitive であるとは、primitive、かつ 2 重可移でないこととする。

次の定理が、Burnside によって、character theory を用いて証明されていた。[2]

定理 (Burnside) G が degree p (素数) の uniprimitive な置換群であるとすれば、 G の p -Sylow 群は G で normal かつ $G \leq \text{Aff}(1, p)$ が成り立つ。

定理 (Burnside) G が degree p^e の uniprimitive な置換群で、かつ G が p^e -cycle を含めば $e=1$ が成り立つ。

Wielandt は $F = GF(p^e)$ に対して Invariant functions を考え、 G に含まれる p^e -cycle t をとり $M_k = \ker F_1(t-1)^k$ ($k=0, \dots, p^e$) なる t -modules の性質を調べることにより

上記の Burnside の定理の別証を与えた。

さらに G の degree が p^2 (p は素数) である可移群に関して次のことを証明した。(詳しくは [1] と参照)

定理 (Wielandt) G を degree p^2 (p は素数) の可移群とし、 H をその p -Sylow 群の一つとあるとき、次の (i) ~ (iv) のうちどれかが成り立つ:

- (i) $H \triangleleft G$, $G \leq \text{Aff}(2, p)$.
- (ii) G は primitive でない。
- (iii) $G \triangleright \exists N$; $G/N \simeq \mathbb{Z}_2$ かつ N は primitive でない。
- (iv) G は 2 重可移群である。

文 献

- [1] Helmut W. Wielandt, "Permutation groups through invariant relations and invariant functions", Lectures given at The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.
- [2] W. Burnside, "Theory of Groups of Finite Order" 2nd ed. Cambridge Univ. Press, London reprinted 1958, Chelsea, N. Y.