

位相的トーリック多様体上の直線束の切断のなす空間に 関して

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻 鍛田 英也

Hideya Kuwata

Department of Mathematics Graduate School of Science

Osaka City University

1 はじめに

位相的トーリック多様体 (topological toric manifold) はトーリック多様体 (toric manifold すなわち compact smooth toric variety の意味で用い, 以下も同様の意味で用いる) の一般化として [IFM13] で導入された. トーリック多様体の一般論に関しては [Ful93],[CLS11] を参考のこと. 本稿では次の二つの結果に関して述べる. 一つ目は, 位相的トーリック多様体上の直線束の切断は有限個しかないこと, すなわち以下を述べることを目標とする.

定理 1.1 (定理 4.2) 完備非特異位相的扇 Δ が整 (integral) であるとし Δ に付随する位相的トーリック多様体を $X(\Delta)$ とする. このとき $X(\Delta)$ 上の直線束 L_ρ (これは表現 ρ を一つ決める毎に決まる) に対して

$$\Gamma(X(\Delta), L_\rho) < \infty. \quad \blacklozenge$$

この定理に現れる記号等は次章以降で説明する.

注意 1.2 これは $X(\Delta)$ がトーリック多様体の場合にはよく知られた結果である ([Ful93], P67 を参照).

二つ目の結果は

定理 1.3 (定理 5.1) 完備非特異位相的扇 Δ が整 (integral) であるとし Δ に付随する位相的トーリック多様体を $X(\Delta)$ とする. また L_ρ を $X(\Delta)$ 上の直線束とする (これは表現 ρ を一つ決める毎に決まる). このとき次が成り立つ.

$$\bigoplus_{\rho: \text{実代数的表現}} \Gamma(X(\Delta), L_\rho) \cong \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m] =: \mathbb{C}[z, \bar{z}].$$

これについては五章で詳しく説明する. $X(\Delta)$ がトーリック多様体の場合に関しては [石田 09], [Cox95] を参考.

2 完備非特異位相的扇 Δ

トーリック多様体が扇と一対一に対応することはトーリック幾何の基本定理としてよく知られている。位相的トーリック多様体も同様のことが成り立つ。すなわち位相的トーリック多様体と位相的扇は一対一に対応する ([IMF])。本章では位相的扇 Δ を定義し、次章では Δ に対応する位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ を定義する。位相的扇とは大雑把に述べると、次のような通常の完備扇 (図 1) と非特異多重扇 (図 2) の組である。

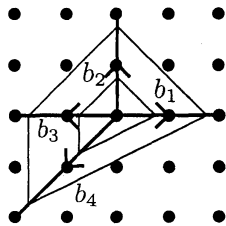


図 1 通常の完備扇

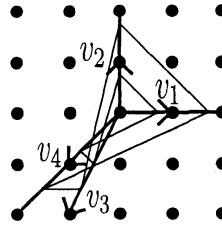


図 2 非特異多重扇

注意 2.1 上記の扇 Δ に対応する位相的トーリック多様体は $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ であり、トーリック多様体ではない (複素構造を許容しない) が位相的トーリック多様体である例である。

定義 2.2 (位相的扇) (n 次元) 位相的扇 Δ とは頂点が $\{1, \dots, m\}$ である単体的複体 Σ (空集合 $\emptyset$ も含む) と $(b, v) = \{(b_k, v_k)\}_{k=1}^m$ ($b_k \in \mathbb{R}^n, v_k \in \mathbb{Z}^n$) の組であって、次を満たすものである。ただし $I \in \Sigma$ に対して $\angle b_I$ は b_i ($i \in I$) 達の成す錐

$$\angle b_I = \left\{ \sum_{i \in I} c_i b_i \mid c_i \geq 0 \right\}.$$

とする。

- $I \in \Sigma$ の元 $i \in I$ に対して b_i 達は線形独立でありかつ、 $I, J \in \Sigma$ に対して $\angle b_I \cap \angle b_J = \angle b_{I \cap J}$ である。
- $I \in \Sigma$ の元 $i \in I$ に対して v_i 達は原始的かつ ($\mathbb{R}$ 上) 線形独立である。

また Δ は $\bigcup_{I \in \Sigma} \angle b_I = \mathbb{R}^n$ であるとき 完備 であるといい $I \in \Sigma$ の $i \in I$ に対して v_i 達が $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 係数とする基底の一部であるとき 非特異 であるという。

注意 2.3 ベクトルの組 $(b, v) = ((b_1, \dots, b_n), (v_1, \dots, v_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{C}^*$ から $(\mathbb{C}^*)^n$ への写像を定める。

$$\lambda_{(b,v)}(re^{\sqrt{-1}\theta}) := (r^{b_1}(e^{\sqrt{-1}\theta})^{v_1}, \dots, r^{b_n}(e^{\sqrt{-1}\theta})^{v_n})$$

ただし、 $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_{>0} \times S^1$ と考え $\mathbb{C}^* \ni g = re^{\sqrt{-1}\theta}$ としている。また $b \in \mathbb{Z}^n$ かつ $b \equiv v \pmod{2}$ のとき、またそのときに限り $\lambda_{(b,v)}$ の行き先は $g, \bar{g}$ のローラン単項式

$$\lambda_{(b,v)}(g) = (g^{s_1} \bar{g}^{t_1}, \dots, g^{s_n} \bar{g}^{t_n}) \quad (s_k, t_k \in \mathbb{Z})$$

となる. 実際 s_k, t_k は

$$s_k = \frac{b_k + v_k}{2}, t_k = \frac{b_k - v_k}{2}.$$

位相的扇 $\Delta = (\Sigma, (b, v))$ は m 個の $\mathbb{C}^*$ から $(\mathbb{C}^*)^n$ への写像を定める. さらにこの m 個の写像の各成分を掛け合わせたものを λ , すなわち

$$\begin{aligned} \lambda : (\mathbb{C}^*)^m &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ (h_1, \dots, h_m) &\mapsto \prod_{k=1}^m \lambda_{(b_k, v_k)}(h_k) \end{aligned}$$

と定めると Δ が $b \in \mathbb{Z}^n$ かつ $b \equiv v \pmod{2}$ を満たすとき λ の行き先は各成分が $h_k, \bar{h}_k (k = 1, \dots, m)$ のローラン単項式となる.

この観察の下で, 完備非特異位相的扇 Δ に対して次のクラスを定義する.

定義 2.4 完備非特異位相的扇 $\Delta = (\Sigma, (b, v))$ が 整 (integral) であるとは次の条件を満たす時をいう.

1. 任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $b_i \in \mathbb{Z}^n, b_i \equiv v_i \pmod{2}$.
2. $(\Sigma, b = \{b_i\}_{i=1}^m)$ は通常の完備非特異扇である.

例 2.5

$$\Sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$$

$$\begin{aligned} (b, v) &= \{(b_1, v_1) = (e_1, e_1), \\ &\quad (b_2, v_2) = (e_2, e_2), \\ &\quad (b_3, v_3) = (-e_1, -e_1 - 2e_2), \\ &\quad (b_4, v_4) = (-e_1 - e_2, -e_1, e_2)\} \end{aligned}$$

は冒頭の位相的扇を表しており, 完備非特異で整の位相的扇である.

3 位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$

この章では位相的扇 $\Delta = (\Sigma, (b, v))$ から位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ を構成する. 特にここでは [?] により導入された商構成法 (quotient construction) の類似による構成を行う. また以下では位相的扇は完備かつ非特異で整であることを仮定する.

$I \in \Sigma$ に対して

$$U(I) := \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i \neq 0 \quad \forall i \notin I\}$$

とし, $U(\Sigma)$ を $U(I) (I \in \Sigma)$ の合併, すなわち

$$U(\Sigma) := \bigcup_{I \in \Sigma} U(I)$$

で定義する.

注意 3.1 $U(\Sigma)$ は $\mathbb{C}^m \setminus Z$ と書ける. ここで Z は次で定義される $\mathbb{C}^m$ の部分空間である.

$$Z = \bigcup_{J \notin \Sigma} \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_j = 0 \quad \forall j \in J\} \quad (1)$$

また $U(\Sigma)$ を the complement of a coordinate subspace arrangement in $\mathbb{C}^m$ という.

次に 2 章の注意 2.3 で定義した

$$\begin{aligned} \lambda : (\mathbb{C}^*)^m &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ (h_1, \dots, h_m) &\mapsto \prod_{k=1}^m \lambda_{(b_k, v_k)}(h_k) \end{aligned}$$

について, 次が成り立つ. ただし

$$\mathcal{Z} := \{(b, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b \equiv v \pmod{2}\} \quad (2)$$

と置き, $(b, v) \in \mathcal{Z}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$z^{(b, v)} := z^{\frac{b+v}{2}} \bar{z}^{\frac{b-v}{2}} \quad (3)$$

$$(z^{(b, v)})^{(b', v')} := z^{(bb', vv')} \quad (4)$$

と定義する.

補題 3.2 [IFM13, Lemma.4.1]

$$\lambda : (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \quad (h_1, \dots, h_m) \mapsto \prod_{k=1}^m \lambda_{(b_k, v_k)}(h_k)$$

は全射であり, その核 $\text{Ker} \lambda$ は次のように書ける

$$\text{Ker} \lambda = \{h = (h_1, \dots, h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m \mid \prod_{k=1}^m h_k^{\langle (a, u), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \forall (a, u) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n\} \quad (5)$$

ここで $b_k = (b_k^1, \dots, b_k^n)$, $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^n)$, $a = (a^1, \dots, a^n)$, $u = (u^1, \dots, u^n)$ に対して,

$$\langle (a, u), (b_k, v_k) \rangle := (\langle a, b_k \rangle, \langle u, v_k \rangle) = \left(\sum_{i=1}^n a^i b_k^i, \sum_{i=1}^n u^i v_k^i \right) \in \mathcal{Z}$$

と定める. また $(n-1)$ -単体 $I \in \Sigma$ に対して $\{(b_i, v_i)\}_{i \in I} ((b_i, v_i) \in \mathcal{Z})$ の 双対 $\{(a_i^I, u_i^I)\}_{i \in I} ((a_i^I, u_i^I) \in \mathcal{Z})$ を次で定義する.

$$\langle (a_j^I, u_j^I), (b_i, v_i) \rangle = (\delta_{ji}, \delta_{ji}) \quad j, i \in I$$

ここで $a_j^I = (a_j^{I1}, \dots, a_j^{In})$, $u_j^I = (u_j^{I1}, \dots, u_j^{In})$, δ_{ji} はクロネッカーのデルタを意味する. このとき

$$\text{Ker} \lambda = \{h = (h_1, \dots, h_m) \in (\mathbb{C}^*)^m \mid h_i \prod_{k \notin I} h_k^{\langle (a_i^I, u_i^I), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \forall i \in I\} \quad (6)$$

◆

Δ に対応する 位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ を $U(\Sigma)$ を $\text{Ker}\lambda$ で割ったもので定義する. すなわち

$$X(\Delta) := U(\Sigma)/\text{Ker}\lambda = (\mathbb{C}^m \setminus Z)/\text{Ker}\lambda = \bigcup_{I \in \Sigma} U(I)/\text{Ker}\lambda$$

また整である位相的扇 Δ に対応する位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ を 整 (integral) と呼ぶことにする.

注意 3.3 任意の i に対して $b_i = v_i$ のとき, 構成される $X(\Delta)$ はトーリック多様体である.

4 整位相的トーリック多様体上の同伴直線束とその切断

記号等は今まで用いたものを引き続き使用する. まず整位相的トーリック多様体 $X(\Delta) = U(\Sigma)/\text{Ker}\lambda$ 上の同伴直線束を定義する.

ρ を次の形の $\text{Ker}\lambda \subset (\mathbb{C}^*)^m$ の滑らかな忠実表現とする.

$$\begin{aligned} \rho : \text{Ker}\lambda &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ (h_1, \dots, h_m) &\mapsto \prod_{k=1}^m h_k^{(p_k, q_k)} \quad (p_k, q_k) \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

これを以下では 実代数的表現 と呼ぶ事にする.

注意 4.1 (3) より ρ の像は $h_k, \bar{h}_k (k = 1, \dots, m)$ のローラン単項式である. また $p_k = q_k$ のときには ρ は通常の代数的表現である.

このとき $X(\Delta)$ 上の同伴直線束 L_ρ を次で定義する.

$$L_\rho := U(\Sigma) \times_{\text{Ker}\lambda} \mathbb{C} \rightarrow X(\Delta) = U(\Sigma)/\text{Ker}\lambda$$

ただし, L_ρ の元は次の同値関係を満たす同値類とする.

$$[z, u] := [[z_1, \dots, z_m], u] = [[h_1 z_1, \dots, h_m z_m], \rho(h_1, \dots, h_m)u] =: [h \cdot z, \rho(h)u]$$

次に L_ρ に対して切断を定める. f を次の $\mathbb{C}$ 値関数とする.

$$\begin{aligned} f : U(\Sigma) &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = (z_1, \dots, z_m) &\mapsto \prod_{k=1}^m z_k^{(r_k, s_k)} \quad (r_k, s_k) \in \mathcal{Z} \text{ かつ } |s_k| \leq r_k \end{aligned}$$

注意 4.2 (3) に注意すると $(r_k, s_k) \in \mathcal{Z}$ かつ $|s_k| \leq r_k$ は f が $z_k, \bar{z}_k (k = 1, \dots, m)$ の単項式となるための条件.

この $\mathbb{C}$ 値関数 f が次の条件

$$f(h \cdot z) = \rho(h)f(z) \tag{7}$$

を満たすとする. このとき切断 s_f を

$$\begin{aligned} s_f : X(\Delta) &\rightarrow L_\rho \\ [z] &\mapsto [z, f(z)] \end{aligned}$$

と定める.

注意 4.3 明らかに (7) を満たす単項式 f 達の和も (7) を満たすので, 実際の L_ρ の切断は変数が $z_k, \bar{z}_k (k = 1, \dots, m)$ の多項式であって (7) を満たすものから定まる.

以上の定義の下で次を得る.

定理 4.4 $X(\Delta)$ を整位相的トーリック多様体, L_ρ を実代数的表現 ρ から定まる同伴直線束, (7) を満たす $z_k, \bar{z}_k$ の多項式 f で定まる s_f を L_ρ の切断とする. このとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X(\Delta), L_\rho) < \infty$$

証明 空間 $\Gamma(X(\Delta), L_\rho)$ が有限次元であることを示すのは実際は (7) を満たす単項式 f が有限個であることを示せば十分である. 条件式 (7) を具体的に書き下すと

$$f(h \cdot z) = \prod_{k=1}^m (h_k z_k)^{(r_k, s_k)} = \prod_{k=1}^m h_k^{(r_k, s_k)} f(z) = \prod_{k=1}^m h_k^{(p_k, q_k)} f(z) = \rho(h) f(z)$$

すなわち

$$\prod_{k=1}^m h_k^{(r_k - p_k, s_k - q_k)} = 1$$

ここで $\text{Ker} \lambda$ に関する次の補題を示す.

補題 4.5 Λ と Λ' を次の条件を満たす格子とする.

$$\Lambda := \{((x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)) \in \mathcal{Z}^m \mid \prod_{k=1}^m h_k^{(x_k, y_k)} = 1\}$$

$$\Lambda' := \{(\langle (a, u), (b_1, v_1) \rangle, \dots, \langle (a, u), (b_m, v_m) \rangle) \in \mathcal{Z}^m \mid \prod_{k=1}^m h_k^{\langle (a, u), (b_k, v_k) \rangle} = 1 \quad \forall (a, u) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n\}$$

ここで

$$\langle (a, u), (b_k, v_k) \rangle := (\langle a, b_k \rangle, \langle u, v_k \rangle) = \left(\sum_{j=1}^n a^j b_k^j, \sum_{j=1}^n u^j v_k^j \right) \in \mathcal{Z}$$

であつた. ただし $b_k = (b_k^1, \dots, b_k^n)$, $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^n)$, $a = (a^1, \dots, a^n)$, $u = (u^1, \dots, u^n)$.

このとき $\Lambda = \Lambda'$.

証明 $\supset$ は明らかなので, $\subset$ を示す. 必要ならば番号を付け直すことで $I = \{1, \dots, n\} \in \Sigma$ として良い. このとき $\{(b_i, v_i)\}_{i=1}^n$ の双対を $\{(a_i^I, u_i^I)\}_{i=1}^n$ とすると補題 3.2 の (6) より $i = 1, \dots, n$ に対して

$$h_i \prod_{k=n+1}^m h_k^{\langle (a_i^I, u_i^I), (b_k, v_k) \rangle} = 1$$

が成り立つ. $((x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)) \in \Lambda$ に対して

$$1 = \prod_{i=1}^m h_k^{(x_k, y_k)} = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{k=n+1}^m h_k^{\langle (a_i^I, b_k), \langle u_i^I, v_k \rangle \rangle} \right)^{-(x_i, y_i)} \prod_{k=n+1}^m h_k^{(x_k, y_k)}$$

定理 5.1 $X(\Delta)$ を整位相的トーリック多様体とし, L_ρ を $X(\Delta)$ 上の同伴直線束とする. このとき次が成り立つ.

$$\bigoplus_{\rho: \text{実代数的表現}} \Gamma(X(\Delta), L_\rho) \cong \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m] := \mathbb{C}[z, \bar{z}].$$

証明 (i) 任意の多項式 $F \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ を単項式 $f = \prod_{k=1}^m z_k^{(c_k, d_k)}$ ($(c_k, d_k) \in \mathcal{Z}, |d_k| \leq c_k$) の和に分解したとき各 f に対して s_f が L_ρ の切断となるような ρ が存在する. 実際 ρ として $\rho(h_1, \dots, h_m) = \prod_{k=1}^m h_k^{(c_k, d_k)}$ と定めれば (7) の条件

$$f(h \cdot z) = \rho(h)f(z)$$

を満たすのは明らか. 一方, 異なる $\rho'(h_1, \dots, h_m) = \prod_{k=1}^m h_k^{(p'_k, q'_k)}$ に対して $s_f \in \Gamma(X(\Delta), L_{\rho'})$ だとする. このとき

$$f(h \cdot z) = \rho'(h)f(z)$$

すなわち $k = 1, \dots, m$ に対して, ある (a', u) が存在して

$$\begin{aligned} r_k - p'_k &= \langle a', b_k \rangle \\ s_k - q'_k &= \langle u', v_k \rangle \end{aligned}$$

であり, (8), (9) と合わせると

$$\begin{aligned} p'_k - p_k &= \langle a' - a, b_k \rangle \iff r'_k = r_k + \langle a' - a, b_k \rangle \\ q'_k - q_k &= \langle u' - u, v_k \rangle \iff q'_k = q_k + \langle u' - u, v_k \rangle \end{aligned}$$

となり

$$\rho'(h) = \prod_{k=1}^m h_k^{(p'_k, q'_k)} = \prod_{k=1}^m h_k^{(p_k, q_k)} \prod_{k=1}^m h_k^{(\langle a' - a, b_k \rangle, \langle u' - u, v_k \rangle)} = \rho(h)$$

従って, 単項式 f に対して s_f の行き先が一意に決まるので

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C}[z, \bar{z}] &\rightarrow \Gamma(X(\Delta), L_\rho) \\ f &\mapsto s_f \end{aligned}$$

が定まる.

(ii) 逆に $s_f \in \Gamma(X(\Delta), L_\rho)$ に対して単項式 $f \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ が一意に定まる. 実際 $[z] \in X(\Delta)$ に対して

$$s_f([z]) = [z, f(z)] = [h \cdot z, \rho(h)f(z)] = [h \cdot z, f(h \cdot z)] = s_f([h \cdot z]).$$

従って s_f に対して f が一意に定まる. よって

$$\begin{aligned} \psi: \Gamma(X(\Delta), L_\rho) &\rightarrow \mathbb{C}[z, \bar{z}] \\ s_f &:= [z, f(z)] \mapsto f(z) \end{aligned}$$

が定まる.

(i), (ii) よりあとは ϕ と ψ が互いに逆写像であることを示せば良いが今までの議論よりそれは明らかである. ♦

6 最後に

そもそも私の関心は $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ の定義方程式を求めることであった。その際に用いたのが $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ 上の同伴直線束 L_ρ を考え、その切断を用いて $\mathbb{C}P^4$ への閉埋め込み写像を構成するという方法で、これは複素代数幾何でよく知られている手法である。実際は次の写像である。

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 &\longrightarrow \mathbb{C}P^4 \\ [z_1, z_2, z_3, z_4] &\longmapsto [\bar{z}_3 z_4 \bar{z}_4 : \bar{z}_2 z_3 z_4 : z_2 \bar{z}_2 \bar{z}_3 : z_1 \bar{z}_2] =: [w_1 : w_2 : w_3 : w_4 : w_5] \\ \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 &= \mathbb{V}(w_1 \bar{w}_3 - \bar{w}_2 w_2, w_1 \bar{w}_5 - \bar{w}_2 w_4, w_2 \bar{w}_5 - \bar{w}_3 w_4)\end{aligned}$$

一方、ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ の定義方程式は

$$\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} = \mathbb{V}(w_1 w_3 - w_2^2, w_1 w_5 - w_2 w_4, w_2 w_5 - w_3 w_4)$$

であり非常によく似ている。

$\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は整位相的トーリック多様体であり、この例のように一般の整位相的トーリック多様体 $X(\Delta)$ が高い次元の複素射影空間に埋め込めるための条件はなんなのか。また埋め込めた際には定義方程式がいつも二項式なのかなどに関して調べたいと考えている。

参考文献

- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric Varieties. Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Soc., 2011.
- [Cox95] David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 4, No. 1, pp. 17–50, 1995.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*. No. 131. Princeton University Press, 1993.
- [IFM13] Hiroaki Ishida, Yukiko Fukukawa, and Mikiya Masuda. Topological toric manifolds. *Mosc. Math. J.*, Vol. 13, No. 1, pp. 57–98, 189–190, 2013.
- [石田 09] 石田裕昭. The automorphism group of a compact smooth toric variety and its representations on sections of equivariant line bundles. 数理解析研究所講究録, Vol. 1670, pp. 100–106, 2009.