

ファイバーバンドルについて

三善 健市

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学大学院教育学研究科

miyoshi@math.edu.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、変換群の分野において様々な場面で応用できる「ファイバーバンドル」概念の基礎の部分について論じる。第2章においては、ファイバーバンドルを理解するために必要となる変換群としての基礎知識を記し、第3章では、ファイバーバンドルの例をいくつか用意した。詳しくは参考文献に述べた The Theory of Transformation Groups を参照ください。

またこのような研究をする機会を与えて下さり、またその指導をして下さった和歌山大学の川上先生、そして講究録の掲載の機会を与えてくださった川上先生、東海大学の板井先生に感謝いたします。

2. 群作用

定義 2.1. 群作用

G を位相群とし、 X を位相空間とすると、次の条件 (1) (2) を満たす連続写像 $\varphi: G \times X \rightarrow X$ が存在するとき、 X 上の写像 φ による群作用という。

- (1) G の単位元 e 、および、 X の任意の元を x に対して、 $\varphi(e, x) = x$ 。
- (2) G の任意の 2 元 g_1, g_2 および X の任意の元 x に対して $\varphi(g_2, \varphi(g_1, x)) = \varphi(g_2 \cdot g_1, x)$ 。

また (X, G, φ) の組を位相変換群という。

定義 2.2. コンパクト開位相

位相空間 X, Y に対して連続写像 $f: X \rightarrow Y$ 全体からなる集合を $Map(X, Y)$ と表わし、この $Map(X, Y)$ に次のような位相を入れる。 X の任意のコンパクト集合 C と Y の任意

の開集合 O に対して

$$W(C, O) = \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(C) \subset O\}$$

とおき, $W(C, O)$ を開近傍の基とする位相をコンパクト開位相という.

命題 2.3. 群の準同型

位相空間 X に対して, X から X への同相写像全体からなる集合を $\text{Homeo}(X)$ と表わす. $\text{Homeo}(X)$ は一般的に位相群とはならないが, 位相空間であり, かつ群である. X 上に群作用 φ があるとき, $X \rightarrow X, x \mapsto gx$ を $\varphi(g, \cdot)$ とかくとき, $\Phi(g) = \varphi(g, \cdot)$ と定義すると, $\Phi: G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ は準同型写像になる.

(証明) 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して,

$$\Phi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$$

であるから, Φ は群の準同型写像である. □

補題 2.4. 命題 2.3 において, φ が連続写像ならば Φ も連続写像である.

(証明) X の任意のコンパクト集合を C , X の任意の開集合を O として, $\Phi^{-1}(W(C, O))$ が, G の開集合であることを示せばよい. そのために, $\Phi^{-1}(W(C, O))$ の各点で開近傍 U がとれて, $\Phi(U) \subset W(C, O)$ が成り立つことをいえばよい. ここで, $\Phi^{-1}(W(C, O))$ の任意の点 g_0 をひとつ取り, 固定する. C の任意の点 x に対して

$$\varphi(g_0, x) = \Phi(g_0)(x) \in O$$

である. φ が連続写像であることにより, g_0 を含む G の開集合 U_x と, x を含む X の開集合 V_x があって,

$$\varphi(U_x \times V_x) \subset O$$

とできる. このことを, 各 $x \in C$ について考えると,

$$\bigcup_{x \in C} V_x \supset C$$

であり, C がコンパクト集合であることより, 有限個の $\{x_1, \dots, x_n\} \subset C$ があって,

$$\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supset C$$

とできる。このとき,

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}, \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$$

とおくと, U は g_0 を含む G の開集合, V は C を含む X の開集合である。ここで, 任意の $(g', x') \in U \times V$ に対して, $x' \in V_{x_i}$ となる i をひとつ取ると, $g' \in U \subset U_{x_i}$ となり,

$$\varphi(g', x') \in \varphi(U_{x_i} \times V_{x_i}) \subset O$$

が成り立つ。したがって

$$\varphi(U \times C) \subset \varphi(U \times V) \subset O$$

となる, またこれは,

$$\Phi(U) \subset W(C, O)$$

となり, Φ の連続性が示された。 □

命題 2.5. 補題 2.4において, X が局所コンパクトハウスドルフのとき, Φ が連続写像ならば, φ も連続写像となる。

(証明) Φ が連続写像であると仮定する。 X の任意の空でない開集合 O をひとつとり固定し, さらに, $\varphi^{-1}(O)$ の任意の点 (g, x) をとり, 固定する。このとき, $\Phi(g)(x) \in O$ となっている。 $\Phi(x): X \rightarrow X$ は連続写像であるから, x を含む開集合 V があって

$$\Phi(g)(V) \subset O$$

となる。 X が局所コンパクトハウスドルフ空間であるという仮定より,

$$x \in V' \subset C \subset V$$

となる開集合 V' とコンパクト集合 C がある。

$$\Phi(g)(C) \subset \Phi(g)(V) \subset O$$

であるから, $\Phi(g) \in W(C, O)$ が成り立つ。 Φ が連続写像であることより, g を含む開集合 U があって,

$$\Phi(U) \subset W(C, O)$$

となる。したがって,

$$\varphi(U \times V') \subset \varphi(U \times C) \subset O$$

が成り立つ。これは, φ が連続写像であることを示している。 □

定義 2.6. 群作用が効果的とは, $\text{Ker } \Phi = \{e\}$ となるときである。

3. ファイバーバンドル

定義 3.1. ファイバーバンドル

K は位相群, F は位相空間とするとき, K が F に効果的に作用しているとする. さらに, 2つのハウスドルフ空間 E, X とその間の連続写像 $\pi: E \rightarrow X$ が次の性質を満たしているものとする.

(1) X の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と同相写像 $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ で, $p_\alpha \circ \varphi_\alpha = \pi$ となるものがある. ただし, $p_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$ は U_α 成分の射影を表す.

(2) p'_α を $U_\alpha \times F \rightarrow F$ への射影とし

U_α の任意の x に対して $\varphi_{\alpha,x}: \pi^{-1}(x) \rightarrow F$ を

$$\varphi_{\alpha,x}(z) = p'_\alpha \circ \varphi_\alpha(z) \quad (z \in \pi^{-1}(x))$$

と定義する.

$x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して,

$$\theta_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$$

とおくとき, $\theta_{\beta\alpha}(x) \in K$ かつ $\theta_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow K$ は連続写像である.

以上を満たすとき, $(E, \pi, X, F, K, U_\alpha, \varphi_\alpha)$ を座標バンドルという. ここで, E を全空間, π を射影, X を底空間, ファイバーバンドルを代表する座標バンドルの U_α を座標開近傍, φ_α を局所自明化写像, $\theta_{\beta\alpha}$ を変換関数という. 各 $x \in X$ に対して, $\pi^{-1}(x)$ を x 上のファイバーという.

定義 3.2. ファイバーバンドル

(E, π, X, F, K) が共通なもうひとつの座標バンドル $(E, \pi, X, F, K, U'_\alpha, \varphi'_\alpha)$ があり, $x \in U_\alpha \cap U'_\mu$ に対して $\overline{\theta_{\mu\alpha}}(x) = \varphi'_{\mu,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$ とおく. $\overline{\theta_{\mu\alpha}} \in K$ であり, かつ $\overline{\theta_{\mu\alpha}}: U_\alpha \cap U'_\mu \rightarrow K$ が連続写像であるとき, この二つの座標バンドル $(E, \pi, X, F, K, U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(E, \pi, X, F, K, U'_\alpha, \varphi'_\alpha)$ は同値であると定義し, この同値関係による同値類 $\xi = (E, \pi, X, F, K)$ をファイバーバンドルという.

注意 3.3. ファイバーバンドルの代表元である座標バンドルのことをファイバーバンドルということが多く, またファイバーバンドル ξ を $\pi: E \rightarrow X$ と略記する.

例 3.4. 積バンドル

$E = X \times F$, K は単位群, $\pi: E \rightarrow X$ を射影とする. X の開被覆は, X 1 個のみからなり, $id: E \rightarrow X \times F$ を局所自明化写像とすることにより, E はファイバーバンドルになる.

例 3.5. メービウスバンド

I を閉区間 $I = [-1, 1]$ とし, $F = I$ とおき, I に同値関係を $x \sim x, 1 \sim -1$ により入れた商空間を X とする. さらに, 直積空間 $I \times I$ に同値関係を $(x, y) \sim (x, y), (1, y) \sim (-1, -y)$ により入れた商空間を $E = I \times I / \sim$ とする. X を S^1 とみなすと, E はメービウスバンドになる. 第1成分を導く射影 $I \times F \rightarrow I$ より, $\pi: E \rightarrow X$ とする. X の二つの開集合 $U_\alpha = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), U_\beta = [-1, -\frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, 1) / \sim$ は, X の開被覆となり, $U_\alpha \cap U_\beta = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ である. ここで $x \in I$ を含む同値類を $x \in X$ と書くことにする. $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ を $\varphi_\alpha = id$ で定義し, $\varphi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times F$ を

$$\varphi_\beta(\{x, y\}) = \begin{cases} (x, y), & x \in (\frac{1}{3}, 1] / \sim, y \in F \\ (x, -y), & x \in [-1, -\frac{1}{3}] / \sim, y \in F \end{cases}$$

と定義すると, $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ は局所自明化写像を与え, $\theta_{\beta\alpha}|_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} = id$, $\theta_{\beta\alpha}|_{(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})} = -id$ となっている. 次に, 位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の離散位相を入れた位相群を K , K の生成元を g とする. k は F に $g \cdot y = -y$ より効果的に作用し, 任意の $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し, $\theta_{\beta\alpha}(x) \in K$ かつ $\theta_{\beta\alpha}$ は連続写像である. したがって, $\pi: E \rightarrow X$ はファイバーバンドルになる.

ファイバーバンドルのデファイナブル版も考察することができる ([2]). 多様体論をデファイナブルカテゴリーでも展開することができる ([1]).

REFERENCES

- [1] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.
- [2] T. Kawakami, *Homotopy property of definable fiber bundles*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.
- [3] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford University press (1991).