

有界な解 と 安定な領域

都立大 理 岩 野 正 宏

§1 境界層の方程式 と P. Hartman の結果

ここ数年間 有界な解の作り方に興味をもっていました。
これらの研究の出発点は 境界層の方程式

$$(1.1) \quad f''' + ff'' + \lambda(k^2 - f'^2) = 0 \quad \lambda < 0, k > 0$$

$$(1.2) \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = k \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right)$$

に関する次の二つの問題である。

境界値問題 (1.1) - (1.2) の解が存在するか？

もしそのような解 $f(t)$ が存在すれば、解は $t \rightarrow \infty$ のとき
どんな行動をするか？

大域的な解の存在については、 $0 < f'(t) < k$ ($0 < t < \infty$)
の制限のもとに、次の定理が知られている。 $k=1$ として
も一般性を失わないことを注しておく。「境界条件

$$(1.3) \quad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta, \quad f'(\infty) = 1$$

を考へれば, 固定された $\lambda < 0$ と $0 \leq \beta < 1$ に対し, 適当な数 $A(\lambda, \beta)$ と連続な増加関数 $Y(\alpha) \rightarrow \alpha \geq A(\lambda, \beta)$ かつ $\alpha = A(\lambda, \beta)$ のとき $Y(\alpha) = 0$ かつ存在して $\alpha \geq A(\lambda, \beta)$ かつ $0 \leq f''(0) \leq Y(\alpha)$ であるとき限り, 初期条件 $t=0: (\alpha, \beta, f''(0))$ を満足する (1.1) の解は ∞ まで接続でき しかも $f'(\infty) = 1$]

この定理から, 「境界値問題 (1.1) - (1.3) は $\alpha = A(\lambda, \beta)$ のときただ一つの解をもち, $\alpha < A(\lambda, \beta)$ のとき解は存在しなく, また $\alpha > A(\lambda, \beta)$ のとき $f''(0)$ は区間 $[0, Y(\alpha)]$ 内の任意の値をとれるから 解は 1 パラメーターの族をつくる」ことがわかる。もちろん $0 < f'(t) < 1$ ($0 < t < \infty$)。

もし $A(\lambda, \beta) \leq 0$ であることがわかれば 境界値問題 (1.1) - (1.2) は解けたことになる。しかし $A(\lambda, \beta)$ の決め方は constructive ではないので, $A(\lambda, \beta)$ の符号はわからない。したがって 境界値問題 (1.1) - (1.2) は open problem と思われる。

P. Hartman は (1.1) - (1.3) の解の $t \rightarrow \infty$ のときの漸近的な行動を研究した。それによると 「 $f'(t) \rightarrow 1$ ($k=1$) となる二つの型の (1.1) - (1.3) の解がある。一つは $f'(t)$ の 1 への近づき方が指数関数の order, すなわち

$$\begin{aligned} 1 - f'(t) &\cong c_0 t^{-1-2\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 - c_1 t\right) \\ f''(t) &\cong t(1 - f'(t)) \end{aligned} \quad (t \rightarrow \infty)$$

($c_0 > 0$, c_1 は定数),

もう一つは $f'(t)$ の 1 への近づき方が t の冪の order, すなわち

$$1 - f'(t) \cong c_0 t^{2\lambda}, \quad f''(t) \cong -2\lambda c_0 t^{-1+2\lambda} \quad (t \rightarrow \infty) \\ (c_0 > 0)$$

となる二つの型の解がある」

すでに述べたように $A(\lambda, \beta) \leq 0$ となり得るかどうかの判定は将来の研究に待たねばならない。谷^一一郎氏の予想によれば「 $\lambda < 0$ のとき (1.1) - (1.2) の解は $f''(0)$ の値をどのように選んでも存在する。ただ $f''(0)$ が或る特定の値をとるとき $f'(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき最もはやく 1 に近づき ($f'(t) - 1$ は指数関数の order で 0 に近づく), その他の $f''(0)$ の値に対しては $f'(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のときもっとゆっくり 1 に近づく ($f'(t) - 1$ は冪の order で 0 に近づく)」。

§2 不確定型特異点の理論の応用

P. Hartman 氏の研究と谷氏の予想とから、「方程式 (1.1) の ∞ の近くでの解で、 $t \rightarrow \infty$ のとき $f'(t) \rightarrow 1$ となるものは二つの任意定数を含む」ことが期待される。そのような解の解析的な表現を求める問題を考える。

(1.1) は独立変数を陽に含んでいないことを利用して、(1.1) を

2階の方程式に変換する。すなわち

$$f'' = f' \frac{df'}{df} = \frac{1}{2} \frac{d(f'^2)}{df}, \quad f''' = \frac{df''}{dt} = \frac{1}{2} f' \frac{d^2(f'^2)}{df^2}$$

であるから, f を独立変数,

$$g(f) = f'^2$$

を従属変数とすると, (1.1) は 2階の方程式

$$(2.1) \quad \sqrt{g} \ddot{g} + f \dot{g} + 2\lambda(k^2 - g) = 0 \quad \left(\dot{} = \frac{d}{df} \right)$$

となる。条件 $f'(\infty) = k$ は

$$g(\infty) = k^2$$

となる。 $f \rightarrow \infty$ のとき $g \rightarrow k^2$ となる (2.1) の解の展開式をつくるために,

$$(2.2) \quad \begin{cases} g(f) = k^2 + h(x), & x = \frac{1}{f} \\ u = h, & v = x h' \end{cases}$$

とあければ, (2.1) は 連立方程式になる:

$$(2.3) \quad \begin{cases} x^3 u' = x^2 v \\ x^3 v' = \frac{2\lambda}{k} u + \left(\frac{1}{k} - x^2 \right) v + \frac{1}{k} a\left(\frac{u}{k^2}\right) (v + 2\lambda u) \end{cases}$$

$$a(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} - 1$$

方程式 (2.3) の右辺の u, v に関する 2 次以上の項を無視すれば (2.3) は $x=0$ を不確定特異点とする方程式にな

る。福原-Turrittin の理論を応用して その線型方程式をある標準の形に変換する。すなわち

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & kx^2 \\ 2\lambda k(2\lambda-1)x^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

とおく。方程式 (2.3) は この線型の部分を標準形にもつ方程式に変換される:

$$(2.5) \quad \begin{cases} x^3 y' = \left(\frac{1}{k} + (2\lambda-1)x^2 \right) y + A(x)y + B(x)z + \sum_{j+k \geq 2} a_{jk}(x) y^j z^k \\ xz' = -2\lambda z + C(x)y + D(x)z + \sum_{j+k \geq 2} b_{jk}(x) y^j z^k. \end{cases}$$

係数 $A(x), B(x), C(x), D(x), a_{jk}(x), b_{jk}(x)$ はすべて $x=0$ において正則な関数, 右辺の級数は $|x|, |y|, |z|$ の小さい値に対して収束する。とくに

$$A(x) = O(x^4), \quad B(x) = O(x^4), \quad C(x) = O(x^2), \quad D(x) = O(x^2)$$

の形の order 条件が満足されている。(2.5) に対し 福原先生の形式変換の理論を応用すれば,

$$(2.6) \quad \begin{cases} y \sim U(x) + \sum' P_{jk}(x) U(x)^j V(x)^k \\ z \sim V(x) + \sum' Q_{jk}(x) U(x)^j V(x)^k \end{cases}$$

$$U(x) = C_1 x^{2\lambda-1} e^{-\frac{1}{2kx^2}}, \quad V(x) = C_2 x^{-2\lambda}$$

の形の二つの助変数 C_1, C_2 を含む形式解が得られる。係数 $P_{jk}(x), Q_{jk}(x)$ は, 線型方程式を満足し, 角領域

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}, \quad 0 < |x| < a_0$$

または

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < |x| < a_0$$

において一価正則 しかも $x \rightarrow 0$ のとき x の整級数へ漸近展開可能な、解として一意的に決まる。ついでに

$$P_{10}(x) = O(x^4), P_{01}(x) = O(x^4), Q_{10}(x) = O(x^4), Q_{01}(x) = O(x^2)$$

となることを注意しておく。

級数(2.6)の収束性が問題となる。最近の筆者の研究によると「級数解(2.6)は $x, U(x), V(x)$ が

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}, \quad 0 < |x| < a_1, \quad |U(x)| < b_1, \quad |V(x)| < b_1$$

または

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < |x| < a_1, \quad |U(x)| < b_1, \quad |V(x)| < b_1$$

の形の不等式を満足すれば収束であり、和は方程式(2.5)の一つの一般解になる」ことが証明できる。こうして得られた解は二つの助変数を含む。

(2.2) および (2.4) 式に注意して、 $C_2 = 0$ または $C_1 = 0$ とおけば「それぞれ

$$g(f) = k^2 + C_1(k + O(x^2)) e^{-\frac{1}{2kx^2}} x^{2\lambda+1}$$

または

$$g(f) = k^2 + C_2(1 + O(x^2)) x^{-2\lambda}$$

となる形の漸近式が得られる。これらに対応する (1.1) の解は t の十分大きいところで定義され、しかも $t \rightarrow \infty$ のとき $f'(t) \rightarrow k$ となる。

§3 不確定型特異点をもつ方程式

方程式 (2.5) よりも、もう少し一般的な形の方程式

$$(3.1) \quad x^{\sigma+1} y' = f(x, y, z), \quad xz' = g(x, y, z)$$

を考える。ここで次の仮定をおく：

i) $\sigma > 0$ は整数, x は複素変数, y は m 次のベクトル, z は n 次のベクトル。

ii) f は m 次のベクトル, g は n 次のベクトル, それらの成分は (x, y, z) の関数として

$$|x| \leq a, \quad \|y\| \leq b, \quad \|z\| \leq b$$

において一価正則な関数, しかも $(0, 0, 0)$ における値はすべて 0. ノルムはベクトルのノルム。

iii) Jacobi 行列 $f_y(0, 0, 0)$ は non-singular, しかも下三角型の Jordan 標準形をもつ。

仮定 iii) から, もし必要であれば簡単な 1 次変換を行うことによって, 次のことを仮定しても一般性を失わない:

$$f_z(0, 0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0, 0) = 0$$

$$g_y(0,0,0) = 0$$

f_x, f_x, g_y は それぞれ f の x , f の x , g の y に関する Jacobi 行列である. $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ とが上記の仮定を満足するとき, さらに次の仮定をおく:

iv) Jacobi 行列 $g_x(0,0,0)$ は 下三角型の Jordan 標準形をもち, n 個の 固有値 $\mu_1, \dots, \mu_n$ の実部は すべて正である.

福原先生の形式変換の理論を応用すれば, 方程式(3.1)は

$$(3.2) \quad y \sim \sum_{\ell} \Phi(x)^{\ell} A_{\ell}(x), \quad z \sim \sum_{\ell} \Phi(x)^{\ell} B_{\ell}(x)$$

の形の形式解をもつことがわかる. $A_{\ell}(x), B_{\ell}(x)$ は 線型 ($\ell \neq 0$) または 非線型 ($\ell = 0$) 方程式の解で, しかも その解は, x 平面の 正の実軸 (原点の近く) を含む ある角領域において 一価正則で $x \rightarrow 0$ のとき x の 整級数へ漸近展開可能なものとして, 一意的に決まる. この 角領域は 行列 $f_y(0,0,0)$ の固有値の偏角から決まる. ここで

$$\Phi(x)^q = \varphi_1(x)^{\ell_1} \varphi_2(x)^{\ell_2} \cdots \varphi_n(x)^{\ell_n},$$

$\varphi_k(x)$ は n 本のベクトル $\Phi(x)$ の第 k 成分で

$$(3.3) \quad \varphi_k(x) = x^{\mu_k} \{ C_k + (\log x, C_1, \dots, C_{k-1} \text{ の多項式}) \}$$

$\oint$

($C_1, \dots, C_n$ は任意定数, $\mu_1, \dots, \mu_n$ は $g_Z(0,0,0)$ の固有値) の形をもち, $\Phi(x)$ は simplified equations (Reduced equations)

$$(3.4) \quad x v' = (1_n(\mu) + D) v + \sum_{l, k} x^l v^k b_{lk}$$

$$1_n(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \varepsilon_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n 0 \end{bmatrix} \quad b_{lk} = \begin{bmatrix} b_{1, lk} \\ \\ \\ b_{n, lk} \end{bmatrix}$$

の一般解である. $\{(l, k)\}$ は 有限集合をつくり

$$b_{k, lk} \neq 0 \Rightarrow \mu_k = \lambda + \mu_1 h_1 + \dots + \mu_n h_n$$

という条件が満足されている.

問題は形式解の収束の証明である. 形式解の収束とは, 「係数ベクトル $A_f(x), B_f(x)$ の定義されている角領域を

$$(3.5) \quad \underline{\theta} < \arg x < \overline{\theta}, \quad 0 < |x| < a.$$

とすれば 適当な $\underline{\theta}', \overline{\theta}', a', b'$ ($\underline{\theta} \leq \underline{\theta}', \overline{\theta} \leq \overline{\theta}'$) とかあり, x と $\Phi(x)$ とが不等式

$$(3.6) \quad \underline{\theta}' < \arg x < \overline{\theta}', \quad 0 < |x| < a', \quad \|\Phi(x)\| < b'$$

を満足すれば 被数(3.2) は一様に収束し x の和は真の解を表わす」ということである. もちろん 角領域 $\underline{\theta}' < \arg x < \overline{\theta}'$ は x 平面の正の実軸を含まなければならない. 実は $\underline{\theta}' = \underline{\theta}, \overline{\theta}' = \overline{\theta}$ ととれる.

§4 収束の証明についての注意

収束の証明には 優級数法や不動点法 が用いられる。この問題に関しては 不動点法の方がすぐれているように思われる。その理由を説明する。

形式解 (3.2) が (3.6) において 収束すれば、正数 M と b' とが存在して、不等式

$$(4.1) \quad \|A_{\xi}(x)\|, \|B_{\xi}(x)\| \leq \frac{M}{b' \|\xi\|} \quad (\|\xi\| = \xi_1 + \dots + \xi_n)$$

が すべての $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ と すべての $x: \underline{\theta}' < \arg x < \overline{\theta}'$, $0 < |x| < a'$ に対して 成り立つ筈である。

しかし 不等式 (4.1) を直接に証明することは まづかしいように思われる。実際、直接に証明できることは 「区間 $\underline{\theta} \leq \varphi \leq \overline{\theta}$ — $\underline{\theta}' = \underline{\theta}$, $\overline{\theta}' = \overline{\theta}$ とする — において定義された 正值連続関数 $\omega(\varphi)$ と $\chi_1(\varphi), \dots, \chi_n(\varphi)$ とを適当にとれば 全ての $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ に対して

$$(4.2) \quad \|A_{\xi}(x)\|, \|B_{\xi}(x)\| \leq \frac{M}{(b_1'' \chi_1(\arg x))^{\xi_1} \dots (b_n'' \chi_n(\arg x))^{\xi_n}}$$

の形の不等式が 角領域

$$(4.3) \quad \underline{\theta} < \arg x < \overline{\theta}, \quad 0 < |x| < a'' \omega(\arg x)$$

において成り立つ。 $M, a'', b_1'', \dots, b_n''$ は適当な正の数。作り方から わかることであるが、 $\min_{\varphi} \{\min_k \{\chi_k(\varphi)\}\} < 1$

となる。しかつて、上記の定理から「もし n 個の関数 $\chi_1(\varphi), \dots, \chi_n(\varphi)$ を定数で置きかえれば、 $b_1'', \dots, b_n''$ に対応する量は $1/|q|$ とともに 0 に近づく」ことがわかる。^{それ故}最初から (4.1) の形の不等式を証明しようとするれば、たとえそれが可能であったとしても、角領域 $\Theta < \arg x < \bar{\Theta}$ を ^{それ故} より小さい角領域 $\Theta'' < \arg x < \bar{\Theta}''$ で置きかえなければならない。ところで優級数法でこのような関数 $\chi_k(\varphi)$ をみつけることは少々不自然であるが、不動点法を用いれば ⁵で説明するようにこのような関数 $\chi_k(\varphi)$ を考えれば収束の証明に都合がよいことが極めて自然にわかる。実はこの不動点法による収束の証明の核心も優級数法でいえば (4.2) が (4.3) において成り立つように上記の関数 $\chi_k(\varphi)$ がとれる（または $\chi_k(\varphi)$ を用いれば (4.2) が (4.3) において成り立つ）ということになる。

関数 $\omega(\varphi)$ は、すでに、福原先生の存在定理の証明のなかに現われている。線型方程式の解の漸近展開の概念は Poincaré によって導入され、それを一般の線型方程式（いわゆる右辺の leading coefficients, つくる行列の固有値に対して特別な仮定を置かない）に拡張したのは Tyjitzinski, そして解の漸近展開の有効な角領域を拡張したのは Malmquist である。福原先生は、不動点法を用いて角領域の半径方向の境界

$|x| = a'' \omega(\arg x)$ を適当に決れば、角領域の開きをさ
らに広げれることを証明した。その結果は、漸近展開の有
効な範囲についての一般的な存在定理のうち最も完全なもの
と思われる。

関数 $\chi_k(q)$ を具体的に作ったのは筆者ですが、このよう
な関数を使えば、解の存在定理の記述に都合がよい（すなわ
ち、一般的な存在定理）ということば、Ljapunov, Perron,
Hartman, 福原, 南雲... など著知られたらによる解の存
在定理の教えるところである。とくに (3.2) の右辺に $\log x$
の項が含まれない場合には、すなわち

$$p_k(x) = C_k x^{k_k}$$

k に対しては、 ω と χ_k とを次のようにとることかできる。

$$(4.4) \quad \omega(q) = \exp \int_{\theta^*}^q \cot a(\tau) d\tau$$

$$(4.5) \quad \chi_k(q) = \exp \left\{ (\operatorname{Re} H_k) \int_{\theta^*}^q \cot a(\tau) d\tau + (\operatorname{Im} H_k)(\theta^* - q) \right\}$$

θ^* は $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ に属する任意の値、 $a(q)$ は $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ にお
いて定義された区分的連続—— q の 1 次関数——しかも
 $0 < a(q) < \pi$ を満足する関数である。（福原先生の存在定
理は、このような $a(q)$ をどのようなにして作るかという問題
の証明に帰着する。）

§5 安定な領域

表題にある安定な領域を説くために、最も簡単な場合 $m=n=1$, $g = \mu z$ を考える:

$$(5.1) \quad xy' = f(x, y, z), \quad xz' = \mu z.$$

あとの方程式はすでに解けているから、よこの方程式だけを考える。その形式解として

$$(5.2) \quad y \sim \sum (Cx^k)^{\frac{1}{\sigma}} A_k(x)$$

の形のものがあつた。 $A_k(x)$ の漸近展開可能な角領域は

$$\frac{1}{\sigma}(-\frac{\pi}{2} + \arg \nu) + \varepsilon < \arg x < \frac{1}{\sigma}(\frac{5\pi}{2} + \arg \nu) - \varepsilon, \quad 0 < |x| < a_0$$

となる。 $\varepsilon > 0$ は十分小さい数、 $\nu = f_y(0, 0, 0)$ 。

形式解 (5.2) の収束性を論ずるために

$$(5.3) \quad y = \sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) (Cx^k)^{\frac{1}{\sigma}} + Y, \quad Y = e^{\Lambda(x)} \eta$$

$$\Lambda(x) = -\frac{\nu}{\sigma x^{\sigma}}$$

の形の変換を行つて、従属変数を y から η へかえると、 η に関する方程式は次の形に書ける

$$(5.4) \quad \eta' = x^{-\sigma-1} H(x, Cx^k, e^{\Lambda(x)} \eta) e^{-\Lambda(x)}.$$

H は 3 変数の関数。この方程式 $\eta = O((Cx^k)^{\frac{1}{\sigma}} e^{-\Lambda(x)})$ を満足する解をもつことを期待して、関数族 $\mathcal{F}$ としては、

$\Gamma(x, z)$ の関数として 領域

$$(5.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sigma}(-\frac{\pi}{2} + \arg v) + \varepsilon < \arg x < \frac{1}{\sigma}(\frac{5\pi}{2} + \arg v) - \varepsilon \\ 0 < |x| < a'_0, \quad |z| < b'_0 \end{cases}$$

に おいて 正則 しかも 不等式

$$(5.6) \quad |\phi(x, z)| \leq K |z|^N e^{-\operatorname{Re} \Lambda(x)}$$

を満足する関数 $\phi(x, z)$ の全体から成る族をとる.

領域 (5.5) から任意の点 (x_1, z') をとりだし, 積分定数 C を $z' = C x_1^\mu$ (多価関数 x^μ の分枝は適当に定める) とする
ように決める. (5.4) の右辺の γ を $\phi(x, C x^\mu)$ で置き換え,
原点から x_1 まで適当な曲線 Γ_{x_1} に沿って積分する. 積分
されたものは C を通して (x_1, z') の関数となるから,
これを $\bar{\phi}(x_1, z')$ と書く:

$$(5.7) \quad \bar{\phi}(x_1, z') = \int_0^{x_1} x^{-\sigma-1} H(x, C x^\mu, e^{\Lambda(x)} \phi(x, C x^\mu)) e^{-\Lambda(x)} dx.$$

$\phi(x, z)$ に $\bar{\phi}(x, z)$ を対応させる写像を τ と書く. Γ の τ
に不動点があり, その不動点に対応する $\mathcal{F}$ の要素を $\phi_\lambda(x, z)$
と書くとき $\eta = \phi_\lambda(x, C x^\mu)$ は (5.4) の解である」ことを
証明できれば, このことから形式解 (5.2) の収束が結論される.

対応 τ が写像として意味をもつたためには, (5.7) の右辺の
被積分関数は $x \in \Gamma_{x_1}$ の正則関数でなければならぬ.

ただし $x \neq 0$. そのためには $x \in \Gamma_{x_1}$ に対して 不等式

$$(5.8) \quad |Cx^A| < b'_0$$

が満足されなければならない. 一方 $x=0$ は不確定型特異点であるから, s を原点から Γ_{x_1} に沿って測られた Γ_{x_1} 上の任意の点 x までの曲線の弧の長さとするとき,

$$(5.9) \quad \frac{d}{ds} e^{-\operatorname{Re} \Lambda(x)} \geq \frac{A}{|x|^{\sigma+1}} e^{-\operatorname{Re} \Lambda(x)}$$

の形の不等式が成り立つように Γ_{x_1} を決めねばならない.

$A > 0$ は x_1 あらび z^1 に無関係な定数. しかし,

(5.5) のなかの x の属する角領域をもっと狭い角領域でおきかえないう限り, (5.8) は成り立たないことが簡単な計算でわかる. そうすると新しい角領域は, (境界層の方程式の場合のように) $\arg v = 0$ となるとき, x 平面の正の実軸を含む得ないという不都合が生ずる. そこで「不等式

$$0 < |x| < a', \quad |x| < b'_0$$

を

$$0 < |x| < a'' \omega(\arg x), \quad |x| < b'' \chi(\arg x)$$

の形の不等式でおきかえるならば, すなわち (5.5) のかわりに 領域

$$(5.10) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sigma}(-\frac{\pi}{2} + \arg v) + \varepsilon < \arg x < \frac{1}{\sigma}(\frac{5\pi}{2} + \arg v) - \varepsilon \\ 0 < |x| < a'' \omega(\arg x), \quad |x| < b'' \chi(\arg x) \end{cases}$$

を考えるならば、上記の Γ_{x_1} の上を x が動くとき、

(5.8) のかわりに 不等式

$$(5.11) \quad |Cx^H| < b'' \chi(\arg x)$$

が成り立つ」ことを証明できる。そうすれば (5.7) の被積分関数は $x \in \Gamma_{x_1}$ ($x \neq 0$) の正則関数である。ω おまが χ は (4.4) おまが (4.5) で与えられる。一般の場合は参考文献 [8] を参照。さて (5.11) は、「方程式 $xz' = Az$ の一般解 $z = Cx^H$ の値は、その初期値が領域 (5.10) に属するならば x が (5.9) を満足するような Γ_{x_1} の上を動くとき、つねに 同じ領域 (5.10) 内に とどまっている」ことを示す。これとは反対に、(5.8) を用いるときは、「初期値は領域 (5.10) にはいつていても 必ずこの領域から解は外にでる」ということが起る。不等式 (5.9) の重要性と 解がある定まった近傍に とどまっている こと を強調するため、

領域 (5.10) を simplified equation $xz' = Az$ の一般解の単項式 $\Lambda(x)$ に関する 安定な領域 といれから χ を mysterious function(s) と呼ぶことにする。

形式解を表わす級数の係数が定数の場合は 優級数法による収束の証明は わかりやすいように思う。なお (5.2) の収束の証明を 逐次近似法を用いても証明できる。その計算

は 不動点法よりも もっと複雑になる。

参考文献

- [1] Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier I, Ann Mat Pura Appl 44(1957), 261-292
- [2] Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier II, Ibid 47(1959)91-150.
- [3] A method to construct analytic expressions for bounded solutions of nonlinear ordinary differential equations with an irregular singular point. F.E.10(1967), 75-105.
- [4] Analytic expressions for bounded solutions of nonlinear ordinary differential equations with an irregular type singular point. Funkcialaj Ekvacioj 12(1969)41-88
- [5] Determination of stable domains for bounded solutions of simplified equations. Ibid 12(1969)251-267
- [6] Analytic expressions for bounded solutions of nonlinear ordinary differential equations with an irregular type singular point. Ann Mat Pura Appl 82(1969)189-256
- [7] A general solution of a system of nonlinear ordinary differential equations $xy' = f(x, y)$ in the case when $f_y(0, 0)$ is the zero matrix. Ibid 83(1969)1-42
- [8] Bounded solutions and stable domains of nonlinear ordinary differential equations. Springer Symposium on Analytic theory of differential equations(1970) 59-127

[1], [2] では関数 χ は使われていない。 [8] の第1章は、不確定特異点における解の漸近展開に関する 福原の存在定理の 詳しい解説がある。 なお境界層の方程式の導き方、 f , ϵ , λ の物理的な意味については 次を参照して下さい。

- [9] 境界層の方程式 $f''' + ff'' + \lambda(1-f'^2) = 0$ について。
函数方程式 21(1969) 123-140