

無限粒子の力学系の構成 II

広島大 理 村 田 博

§ 1. 序 (準備)

本稿では、*finite range*, *pair interaction potential* から決まる 1 次元の (固い殻をもつ) 無限粒子の力学系の構成を、主として、Ya. G. Sinai [11] の方法に従って与え、特別のクラスのポテンシャル (理想気体や *hard rod* 系に対応するもの) については、その力学系の *regularity* (エルゴード性、混合性等) が言える ([13], [10]) ので、その証明を解説する。このためこの節で、基本的な定義と結果を証明抜きで述べておく。詳しくは、V. A. Rohlin [8] や、十時 [12] を参照されたい。

可測空間 (M, μ) を、 $[0, 1)$ に *Lebesgue* 測度を付与した空間と (*metrical* に) 同型となるという意味で自然な *non-atomic Lebesgue* 空間としよう。

定義 1 (M, μ) の分割 $\gamma = \{C_\gamma\}$ が 可測分割 であるとは、高々可算個の元から成る可測集合の系 $\{\Gamma_n\}$ が存在して、任

意の $C_\gamma \in \mathcal{C}$ と, 任意の n に対し,

$$C_\gamma \cap \Gamma_n = \emptyset \quad (\text{a.e.}) \quad \text{or} \quad C_\gamma \cap \Gamma_n^c = \emptyset \quad (\text{a.e.})$$

が成り立つ時をいう。

定義2 T_t が (M, μ) 上の *automorphism (mod. 0)* のつくる *one-parameter group* をなす時, (M, μ, T_t) を dynamical system (力学系) という。

定義3 力学系 (M, μ, T_t) が ergodic (エルゴード的) であるとは, 任意の $f \in L^1(M, \mu)$ に対し,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(T_s a) ds = \int_M f(a) d\mu(a), \quad \text{a.e. } a$$

が成り立つときをいう。

定義4 力学系 (M, μ, T_t) が K-力学系 (K-system) であるとは, 次の3条件をみたす, K-分割 と呼ばれるような (M, μ) の可測分割 ζ_0 が存在するときをいう:

- 1) $T_t \zeta_0 \geq \zeta_0 \quad \text{mod. 0} \quad t \geq 0 \quad (\zeta \geq \eta \iff \zeta \text{ は } \eta \text{ の細分})$
- 2) $\bigvee_t T_t \zeta_0 = \varepsilon \quad \text{mod. 0} \quad (\varepsilon \text{ は } M \text{ の各点への分割})$
- 3) $\bigcap_t T_t \zeta_0 = \nu \quad \text{mod. 0} \quad (\nu \text{ は } M \text{ のみを元とする分割})$

以上の定義から次の命題が言える。

Proposition 1 (M, μ, T_t) が K-力学系ならば, *ergodic* .

(注) K-力学系 $\Rightarrow$ 全ての位数の混合性, σ -Lebesgue スペクトル, 完全正のエントロピーをもつ。ことも言える。c.f. [12]

§ 2. 相空間 (phase space) の構成と, 極限 Gibbs 分布.

次の条件をみたすような pair interaction potential $U(r)$ を考えよう:

$$1) \quad U(r) \equiv \infty \quad \text{if} \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ < \infty \quad r > r_0,$$

$$2) \quad U(r) \in C^3((r_0, \infty)), \quad U(r) \geq A > -\infty,$$

$$3) \quad U(r) \equiv 0 \quad \text{if} \quad r \geq r_1 > r_0.$$

区間 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に対し, C_Ω で

$$\min_{g', g'' \in \hat{\Omega}} |g' - g''| > r_0. \quad (*)$$

をみたすような, Ω の有限個の点から成る部分集合 $\hat{\Omega}$ の全体を, また, $C_{\Omega, N}$ で, その点の個数 $N(\hat{\Omega})$ が N であるようなものの全体をあらわそう. 各 $c \in C_{\Omega, (N)}$ に対し, $p_c(\cdot)$ を c 上の実数値関数として,

$$M_\Omega = \{ a = \{c, p_c(\cdot)\} \mid c \in C_\Omega \}$$

$$M_{\Omega, N} = \{ a = \{c, p_c(\cdot)\} \mid c \in C_{\Omega, N} \}$$

とおく. ($p_c(x)$ は点 $x \in c$ にある粒子の速度とみる)

同様に, $\mathcal{C}$ で

$$\min_{g', g'' \in \hat{\mathcal{C}}} |g' - g''| > r_0$$

をみたすような, 有限個又は可算無限個の点から成る集合 $\hat{\mathcal{C}}$ の全体をあらわし,

$$M = \{ a = \{c, p_c(\cdot)\} \mid c \in \mathcal{C} \}$$

とおく. M は, 自然な projection に関する, M_Ω の $\Omega \uparrow \mathbb{R}^d$ で

の *inductive limit* になっており, また, 空間 $M_{\Omega, N}$ は

$$((\Omega \otimes \mathbb{R}^1)^{\otimes N})' / S_N \quad (' \text{ は条件 } (*) \text{ による制限 })$$

と同一視することにより, $M_{\Omega, N}$ 上の可測集合族

$$\mathcal{F}_{\Omega, N} = \sigma \{ \{ \hat{\varphi}_\Omega : N(\hat{\varphi}_\Omega) = N, N(\hat{\varphi}_\Omega \cap \Delta) = l \}, l \in \mathbb{N}, \Delta \in \mathcal{B}(\Omega) \}$$

上に 測度 $\nu_{\Omega, N}$ を

$$\nu_{\Omega, N}(A) = \frac{1}{N!} \tilde{\lambda}_\Omega(\tilde{A}) \quad , \quad A \in \mathcal{F}_{\Omega, N}$$

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{\lambda}_\Omega \text{ は } ((\Omega \otimes \mathbb{R}^1)^{\otimes N})' \text{ 上の Lebesgue 測度,} \\ \tilde{A} \text{ は permutation } S_N \text{ による商が } A \text{ となる} \\ \text{ような (逆像としての) 集合} \end{array} \right.$$

で定めることができる。従って, M_Ω 上の可測集合族 $\mathcal{F}_\Omega$ 上にも 測度 ν_Ω を同様に定義できる。今後, これらを区別せず da と書く。

$a = \{c, p_c(\cdot)\} \in M_\Omega$ に対し

$$E(a) = \frac{1}{2} \sum_{x \in c} p_c^2(x) + \sum_{x, y \in c, x \neq y} U(|x-y|) \quad ,$$

$$N(a) = N(c)$$

において, Ω の *grand canonical* な Gibbs 分布を, 部分集合 $V \subset \Omega$ に対する自然な projection $\varphi_{\Omega, V} : M_\Omega \rightarrow M_V$ を用いて, $A \in \mathcal{F}_V$ に対し

$$P_{\Omega, \beta, \mu}(S_{V, A}^\Omega) = \Xi^{-1}(\Omega, \beta, \mu) \int_{M_\Omega} \chi_A(\varphi_{\Omega, V}(\omega)) e^{-\beta E(a) - \mu N(a)} da$$

で定めよう。ただし,

$S_{V,A}^{\Omega} = \mathcal{G}_{\Omega,V}^{-1}(A)$, $\bar{E}(\Omega, \beta, \mu)$ は正規化定数

である。この定義は, projection $\mathcal{G}_{\Omega} : M \rightarrow M_{\Omega}$ を用いて定まる M 上の可測集合族

$$\mathcal{F} = \sigma \{ \mathcal{G}_{\Omega}^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_{\Omega} \}$$

上の完全加法的な確率測度を与える。そこで, 区間の増大列 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \uparrow \mathbb{R}^1$ なるものにとって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Omega_n, \beta, \mu}(S_{V,A}) = P_{\beta, \mu}(S_{V,A}) \quad , \quad S_{V,A} = \mathcal{G}_V^{-1}(A)$$

と定義するとき, この収束は $A \in \mathcal{F}_V$ に関して一様で, しかも, この極限は, 列 $\{\Omega_n\}$ の選び方に依存しない。従って,

$P_{\beta, \mu}(\cdot)$ は $\mathcal{F}$ 上の確率測度を与える。(Minlos [3] 参照)

この測度 $P_{\beta, \mu}$ は (grand canonical な) 極限 Gibbs 分布と呼ばれる。このとき, 次のことがわかる。

Proposition 2 (M, μ) , $\mu = P_{\beta, \mu}$ は Lebesgue 空間である。

⊕ canonical な Gibbs 分布 $P_{\Omega, \beta, N}(\cdot)$, micro-canonical な Gibbs 分布 $P_{\Omega, E, N}(\cdot)$ から同様に $\mathcal{F}$ 上の極限 Gibbs 分布

$$P_{\beta, \rho}(S_{V,A}) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \frac{N_k}{|\Omega_k|} \rightarrow \rho}} P_{\Omega_k, \beta, N_k}(S_{V,A})$$

$$P_{\beta, \rho}(S_{V,A}) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \frac{E_k}{|\Omega_k|} \rightarrow \beta, \frac{N_k}{|\Omega_k|} \rightarrow \rho}} P_{\Omega_k, E_k, N_k}(S_{V,A})$$

が定義でき, U にもう少し滑らかさの条件をいれると, 次の命題が証明できる。c.f. A. Houten [1], その他 [2], [5] 等

Proposition 3 熱力学的パラメータ (β, μ) , (β, ε) , (h, ρ) の間にある自然な対応があって, その下では, 上の3種の極限 Gibbs 分布は *equivalent* である。

<証明には, 粒子数とエネルギーに関する中心極限定理を用いる。> 以後, この極限 Gibbs 分布を μ とかく。

$M \ni a = \{c, p_c(i)\}$ に対し, 負の座標をもち, 原点に最も近い粒子に番号 0 を与えることにより $a = \{(g_i, p_i)\}$ と書く。この番号付けのもとで, 次の方程式系で記述される, $|i| \leq n$ なる番号 i の粒子の運動を考えよう。

$$\frac{dg_i}{dt} = p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \sum_{|j| \leq n} \frac{\partial U(|g_i - g_j|)}{\partial r} - \sum_{|j| > n} \frac{\partial U(|g_i - g_j^{(0)}|)}{\partial r}$$

$$\text{初期配置 } a = \{(g_i^{(0)}, p_i^{(0)})\}$$

すると, 以上の注意から, 次節で有効となる基本的な命題を得る。

Proposition 4 ([11]) $\exists c_1, c_2 > 0$, 以下のようにして定義される初期配置の空間を $M(c_1, c_2)$ と書くと, $\mu(M(c_1, c_2)) = 1$.

$$M(c_1, c_2) \ni a \text{ iff } \exists n_0(a) \text{ integer such that } \forall n \geq n_0(a)$$

$$1) P_n(a) \equiv \max_{|t| \leq 1, |i| \leq n} |p_i(t)| \leq c_1 \sqrt{\log n}$$

$$2) -n \leq i'_n < -n/2, \quad n/2 \leq i''_n < n \text{ なる番号}$$

i'_n, i''_n があって,

$$g_{i'_n+1}^{(0)} - g_{i'_n}^{(0)} \geq c_2 \log n, \quad g_{i''_n+1}^{(0)} - g_{i''_n}^{(0)} \geq c_2 \log n.$$

ここに $p_i(t)$ は 時刻 0 で番号 i をもつ粒子の t 時刻後の位置を表わし, $q_i^{(0)}$ は 時刻 0 で"の i 番目の粒子の座標を表わす。

§ 3. evolution operator の構成.

proposition 4 によって, n を十分大きくとって固定すると, 時刻 $|t| \leq 1$ の範囲では 我々の考えている無限粒子の力学系の構成は, 有限粒子の力学系に帰着させることが可能である。すなわち, $\bar{n}$ を

$$c_2 \log n - 2c_1 \sqrt{\log 2n} > r_1 \quad \text{for } \forall n \geq \bar{n}$$

をみたす自然数ととり, $M(c_1, c_2) \ni a$ に対し

$$n_1(a) = \max(n_0(a), \bar{n})$$

$$n_k(a) = 2^{k-1} n_1(a)$$

$$m'_k(a) = i'_{n_k(a)} + 1, \quad m''_k(a) = i''_{n_k(a)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

とおくと, $M(c_1, c_2)$ の定義と, 関係

$$c_2 \log n_k(a) - 2c_1 \sqrt{\log n_k(a)} > r_1, \quad k \in \mathbb{N}$$

から, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $|j| > n_k(a)$ なる番号 j をもつ粒子を固定して, $m'_k(a) \leq j_1 \leq m''_k(a)$ なる番号 j_1 をもつ粒子は $-n_k(a) \leq j_2 < m'_k(a)$ 又は $m''_k(a) < j_2 \leq n_k(a)$ なる番号 j_2 をもつ粒子とは, $|t| \leq 1$ では互いに potential の range の外にあるから, 互いに影響がない。

さらに, k を $k+1$ に上げて, $|f| \leq n_{k+1}(a)$ なる番号 f をもつ粒子を動かしても,

$$\begin{aligned} c_2 \log n_k(a) - 2c_1 \sqrt{\log n_{k+1}(a)} \\ = c_2 \log n_k(a) - 2c_1 \sqrt{\log 2n_k(a)} > r_1 \end{aligned}$$

であるから, $m'_k(a) \leq j \leq m''_k(a)$ なる番号 j をもった粒子群は, $|t| \leq 1$ では, その外にある粒子達と影響しあわない。

従って, $\forall k \in \mathbb{N}$ と $\forall l \geq k$ に対して, $m'_k(a) \leq j \leq m''_k(a)$ なる番号 j をもつ粒子の運動は, $|t| \leq 1$ の範囲では, $|f| > n_l(a)$ なる番号 f をもつ粒子達を固定して考えてもよく, このことから, $a \in M(c_1, c_2)$ に対し, $|t| \leq 1$ で $T_t a$ が定まり, $|t_1| \leq 1, |t_2| \leq 1, |t_1 + t_2| \leq 1$ に対し $T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1 + t_2}$ をみたす。

Proposition 5 μ は T_t -不変である。

このためには, μ が, 番号 $|i| > n$ をもつ粒子を固定した下での, 番号 $|i| \leq n$ をもつ粒子についての条件付分布を考えたとき, 密度

$$\tilde{\Sigma}^{-1}(\beta, \mu) \exp \left[-\beta \left(\sum_{|i| \leq n} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{\substack{|i_1| \leq n \\ |i_2| \leq n}} U(|g_{i_1} - g_{i_2}|) + \sum_{\substack{|i| \leq n \\ |j| > n}} U(|g_i - g_j|) \right) \right]$$

をもつことと, この密度が, 有限系のハミルトニアンから定まる Liouville 測度の density を与えることを見れば, T_t の作り方から不変性が出る。

あとは,

$$\tilde{M} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T_1^n M(c_1, c_2)$$

$$T_t a = T_{t-[t]} \cdot T_1^{[t]} a \quad a \in \tilde{M}$$

とおくと, $\mu(\tilde{M})=1$ であるから, 次の命題を得る.

Proposition 6 (M, μ, T_t) は力学系である.

§ 4. 力学系 (M, μ, T_t) のエルゴード性.

今までのような一般の potential $U(x)$ についてのエルゴード性の証明は知られていないので, ここでは, 次の2つの典型的なモデルについて, エルゴード性の証明を述べる.

Case 1 (*hard rod system*) c.f. Ya. G. Sinai [10], O de Pazzis [6].

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x \leq r_0 \\ 0 & x > r_0 \end{cases}$$

この場合, 各粒子 (rods) は, 衝突するまでは, 初速度を保ちながら一様運動をし, 完全弾性衝突によって, 速度を交換し合うモデルをあらわしている.

この U から作られる極限 Gibbs 分布は, 座標に関しては, 各 i について, $g_{i+1} - g_i - r_0$ が平均 ρ の指数分布を持ち, 速度に関しては, 平均 0, 分散 β^{-1} の正規分布を持つような可算無限直積の形をもつ.

Case 2 (*ideal gas*) c.f. K. L. Volkovskii - Ya. G. Sinai [13].

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r=0 \\ 0 & r>0 \end{cases}$$

<この場合、衝突が無いとみなせることに注意せよ。>

以上の2つの場合、衝突によって、同じ速度をもつ粒子に同じ番号が乗りうつると見て、 t 時刻後の配置に対しても番号付けを与えると、時刻0で i 番目であった粒子 $(q_i^{(0)}, p_i)$ の t 時刻後の位置 $(q_i(t), p_i)$ に関して次の命題が成り立つ。

Proposition 7

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q_i(t) = \pm\infty \quad \text{if } p_i > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q_i(t) = \mp\infty \quad \text{if } p_i < 0$$

が、 μ -a.e. の初期配置について成り立つ。

この proposition によって、次の定理が証明できる。

Theorem 1 ([10], [6]) 1次元 hard rod system は K-力学系。

Theorem 2 ([13]) ideal gas は K-力学系。

(注) 実はもっと強く Bernoulli 系 (例えば [9])

定理2は $r_0 \rightarrow 0$ としたときの定理1の系と見ることでできるから、ここでは定理1のみ証明する。このためには、§1で述べたように、定義4にあらわれる、 T_t に対する M の K -分割 γ_t を構成すれば十分である。次の定義をしよう。

定義5 時刻 $\bar{t}$ が 0-crossing time for $a = \{(q_i, p_i)\} \in M$

であるとは、 $\bar{t}$ が次の1)又は2)をみたすときをいう。

1) $\exists i : q_i(\bar{t}) = 0$ かつ $\bar{t}$ は2粒子の衝突時刻

ではない。

2) $\exists i_1 \neq i_2$, $\bar{t}$ は speed p_{i_1}, p_{i_2} ($p_{i_1} > p_{i_2}$) をもつ
2粒子の衝突時刻であり, かつ, $g_{i_1}(\bar{t}-0) < 0 < g_{i_2}(\bar{t}-0)$.

$\bar{t}$ が 1) をみたすときは p_i , 2) をみたすときは, p_{i_1}, p_{i_2} ,
 $g_{i_1}(\bar{t}-0), g_{i_2}(\bar{t}-0)$ を 0 -crossing time $\bar{t}$ の characteristic(s) と呼
ぶことにする。このとき, proposition 7 により, 各粒子 (g_i ,
 p_i) に対応する 0 -crossing times は μ -a.e. で有限個であるこ
とがわかる。そこで, M の分割 ζ_0 を,

$a, a' \in M$ が分割 ζ_0 の同一元に入る

$\Updownarrow$ def.

a に対応する non-negative な 0 -crossing times と その characteristics

と, a' " " " " "

が全く一致する。

によって定義しよう。こうすると, ζ_0 は可測かつ, 明らかに
 $T_t \zeta_0 \geq \zeta_0 \pmod{0}$ $t \geq 0$ が成り立つ。($T_t \zeta_0 \equiv \zeta_t$ の同一元に入
ることと, $-t$ 以後の 0 -crossing times と その characteristics が一
致することとが同値である。) 一方, $\bigvee_t T_t \zeta_0 = \varepsilon \pmod{0}$ は
“全ての 0 -crossing times と, その characteristics がわかれば,
(唯一つ)初期配置が定まる” ことと同じであるから, 証明は略
する。最後に $\bigcap_t T_t \zeta_0 = \nu \pmod{0}$ を示そう。そのために,
次のような M の分割 η_a を補助的に考えよう。

$\alpha > 0$ に対して η_α を

$a, a' \in M$ が分割 η_α の同一元に入る

- $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ {
- 1) $[-\alpha, \alpha]$ の外にある夫々の粒子は, その座標と速度が全く一致
 - 2) $[-\alpha, \alpha]$ 内の夫々の粒子の個数が一致しているだけでなく, その中で, 正速度をもつ粒子の個数も一致.

によって定義すると, $\alpha \rightarrow \infty$ の時 $\eta_\alpha \searrow \nu$ となることは明らかであろう。従って, 次のことさえ証明すればよい。

$\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists t_0 > 0, \exists \Gamma_\alpha^{t_0}$ (M の可測集合)

$$(i) \quad \eta_\alpha|_{\Gamma_\alpha^{t_0}} \geq T_{-t_0} \zeta_0 \quad \left(\geq \bigcap_t T_t \zeta_0 \right)$$

$$(ii) \quad \mu(\Gamma_\alpha^{t_0}) > 1 - \varepsilon.$$

実際

$$\Gamma_\alpha^t = \left\{ a = (c, p_c(\cdot)) = \{(q_i, p_i)\} \in M : \begin{array}{l} q_i(\tilde{t}) > 2r_0 \text{ if } p_i < 0 \\ q_i(\tilde{t}) < -2r_0 \text{ if } p_i > 0 \end{array} \right. \\ \left. \text{for } q_i^{(0)} \in C \cap [-\alpha, \alpha], \forall \tilde{t} > t \right\}$$

によって定義すれば, proposition 7 によって, $\mu(\Gamma_\alpha^t) \nearrow 1$,

$t \searrow -\infty$ for $\forall \alpha > 0$. 従って, $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 = t_0(\varepsilon, \alpha) > 0$,

$\mu(\Gamma_\alpha^{t_0}) > 1 - \varepsilon$. (i) を示そう。このためには

$$\forall a, a' \in C_{\eta_\alpha(\cdot)} \cap \Gamma_\alpha^{t_0} \Rightarrow T_{t_0} a, T_{t_0} a' \in C_{\zeta_0(\cdot)}$$

を示せば十分である。

$a, a' \in C_{\lambda}(\cdot) \cap \Gamma_{\alpha}^{t_0}$ であるから, $[-\alpha, \alpha]$ の外にある a, a' の粒子の位置と速度は全く一致しており、一方, $[-\alpha, \alpha]$ の中にある a, a' の粒子数, 正速度の粒子数が一致しているのみならず, それらの位置は, 時刻 t_0 においては, 原点から少なくとも 2 α 以上離れている。従って, $\forall t \geq t_0$ に対して, $T_t a, T_t a'$ の non-negative な 0-crossing time を与える粒子は, 時刻 0 において, a, a' の $[-\alpha, \alpha]$ の外にあるものしかない。ところが, そのような粒子の位置と速度は全く一致しているから $T_{t_0} a$ と $T_{t_0} a'$ は ζ_0 の同一元に入る。 (p.e.d.)

⑨ 以上の formulation は全て 1 次元であったが, 多次元でモデルを考えると, 極端にむずかしくなつて, わずかに, K.L. Volkovyskiĭ - Ya. G. Sinai [13] の ideal gas と, O de Pazzis [7] の 2 次元での正方形の運動についての議論があるだけである。

[文 献]

- [1] Haitov A. : Limiting equivalence of various ensembles for one-dimensional statistical systems, Trudy Moskov Matem. Obshch. 28(1973), 215-260. (in Russian)
- [2] Halfina A.M. : The limiting equivalence of the canonical and grand canonical ensembles (low density case), Matem. Sborn. 80-1(1969), 3-51. = Math. USSR Sbornik 9(1969), 1-52.
- [3] Minlos R.A. : Gibbs limit distribution, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 1-2(1967), 60-73. = Funct. Anal. its Appl. 1-2(1967), 141-150.
- [4] ——— : Regularity of the Gibbs limit distribution, ibid. 1-3(1967), 40-53. = ibid. 1-3(1967), 206-217.
- [5] ——— and Haitov A. : Equivalence in the limit of thermodynamic ensembles in the case of one-dimensional classical systems, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 6-4(1972), 93-94. = Funct. Anal. its Appl. 6-4(1972), 337-338.
- [6] Pazzis O de : Ergodic properties of a semi-infinite hard rod systems, Commun. math. Phys. 22(1971), 121-132.
- [7] ——— : Dynamical theory of a bidimensional system with an infinite number of degrees of freedom, ibid. 29(1973), 113-130.
- [8] Rohlin V.A. : On the fundamental ideas of measure theory, Matem. Sborn. 25(1949), 107-150. = Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10(1962), 1-54.
- [9] Shiga T. and Takahashi Y. : Ergodic properties of the equilibrium processes associated with infinitely many Markovian particles, to appear.
- [10] Sinai Ya.G. : Ergodic properties of a gas of one-dimensional hard rods with an infinite number of degrees of freedom, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 6-1(1972), 41-50. = Funct. Anal. its Appl. 6-1(1972), 35-43.
- [11] ——— : Construction of the dynamics for one-dimensional systems of statistical mechanics, Teor. i Matem. Fiz. 11-2(1972), 248-258. (in Russian)
- [12] 十時 東生: flow と エントロピー , Seminar on Prob. vol. 20 (1964), 確率論セミナー.
- [13] Volkovyskii K.L. and Sinai Ya.G. : Ergodic properties of an ideal gas with an infinite number of degrees of freedom, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 5-3(1971), 19-21. = Funct. Anal. its Appl. 5-3(1971), 185-187.