

# 高階線型常微分方程式の変形における virtual turning point の役割について, II – 野海 - 山田方程式系の new Stokes curve について –

京都大学数理解析研究所 佐々木俊介 (Shunsuke SASAKI)  
RIMS, Kyoto University

## 1 序文

西川[N] によるある高階 Painlevé 方程式の完全 WKB 解析の研究において, 次の事実が発見された:

非線型方程式の Stokes curve の交点の近傍において, 変形パラメータ  $t$  が非線型方程式の Stokes curve 上にないにもかかわらず, 付随する Lax pair の Stokes geometry に, 2つの turning point が Stokes curve で結ばれるという意味での退化が生じる.

この現象は西川現象と呼ばれ, その後 [KKNT1][KKNT2] において理論的解明が行われてきた. このような現象が他の “高階 Painlevé 方程式” でも起こるのではないかと考えることは自然である.

そこで, 本論文ではその 1つである, 野海 - 山田方程式系の中の 1つの方程式  $(NY)_4$  を題材に, 計算機による具体的な計算結果をもとに同様の現象が起こる様子について観察を行う.

本論文で扱う方程式は次のものである:

$$(NY)_4 : \begin{cases} \frac{du_0}{dt} = \eta[u_0(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) + \alpha_0] \\ \frac{du_1}{dt} = \eta[u_1(u_2 - u_3 + u_4 - u_0) + \alpha_1] \\ \frac{du_2}{dt} = \eta[u_2(u_3 - u_4 + u_0 - u_1) + \alpha_2] \\ \frac{du_3}{dt} = \eta[u_3(u_4 - u_0 + u_1 - u_2) + \alpha_3] \\ \frac{du_4}{dt} = \eta[u_4(u_0 - u_1 + u_2 - u_3) + \alpha_4] \end{cases} \quad (1)$$

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_4 = \eta^{-1}, \quad u_0 + \cdots + u_4 = t, \quad \eta : \text{large parameter}. \quad (2)$$

これは次の Lax pair の両立条件として導かれる:

$$(L)_4 : \frac{\partial}{\partial x} \psi = \eta A \psi, \quad (3)$$

$$(D)_4 : \frac{\partial}{\partial t} \psi = \eta B \psi \quad (4)$$

ただし

$$A = -\frac{1}{x} \begin{pmatrix} \epsilon_1 & u_1 & 1 & & \\ & \epsilon_2 & u_2 & 1 & \\ & & \epsilon_3 & u_3 & 1 \\ x & & & \epsilon_4 & u_4 \\ xu_0 & x & & & \epsilon_5 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$B = \begin{pmatrix} q_1 & -1 & & & \\ & q_2 & -1 & & \\ & & q_3 & -1 & \\ & & & q_4 & -1 \\ -x & & & & q_5 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

ここで  $\epsilon_j, q_j$  は  $\alpha_j, u_j$  とそれぞれ次のような関係にある:

$$\alpha_j = \epsilon_j - \epsilon_{j+1} + \eta^{-1} \delta_{j,0}, \quad q_{j+2} - q_j = u_j - u_{j+1}.$$

この方程式を含む野海 - 山田方程式系の WKB 解析に関する (局所的な) 一般論は [T] で議論されたが, その大きな特徴は,  $P_1, P_{11}$ -hierarchy の場合と異なり, 付随する

Lax pair のサイズが 3 以上であるという点である。そのため線型方程式の Stokes geometry に new Stokes curve や virtual turning point が現れ、それらを含めて Stokes geometry の変化を考えなければならないことが [S] において示された。そこで本論文では [S] の続編として、その結果を用いて非線型方程式  $(NY)_4$  の Stokes geometry について議論していく。

## 2 西川現象と非線型方程式の new Stokes curve

本節ではまず、 $P_I$  および  $P_{II}$ -hierarchy の場合の Stokes geometry について簡単に復習しておく。これらの方程式は付随する Lax pair のサイズが 2 であり、線型方程式の Stokes geometry が比較的容易にわかるため、それをもとに非線型方程式の Stokes geometry が研究されてきた。

序文で述べた西川現象は [KKNT1] において詳しく調べられ、以下のように説明された。

非線型方程式の Stokes curve の交点では線型方程式の Stokes geometry は 2 つの turning point が Stokes curve で結ばれるという退化が 2ヶ所で同時に起こることになる。この 2 組のペアが 1 つの turning point  $a$  を共有し、かつ  $a$  から出て他の turning point  $b_1, b_2$  と結ばれている 2 本の Stokes curve が隣り合っているとき、その交点は Lax-adjacent であるといい、そうでないとき non-Lax-adjacent であるという。

Lax-adjacent な交点の近傍では、 $b_1$  と  $b_2$  が Stokes curve で結ばれる点が存在し、そのような点の全体は交点から片側に伸びる曲線 (curved ray) を成す。この曲線は線型の場合からの類推により new Stokes curve と呼ばれ、その満たすべき条件が線型方程式の Stokes geometry との関係を用いて明らかにされた。

一方、non-Lax-adjacent な交点の近傍ではそのような現象は観察されない。

ここで、Lax-adjacent な交点の近傍でも、(実線の) new Stokes curve の現れる領域とは反対側の領域 (“virtual turning point” に近い領域) では、次のような mechanism によって線型方程式の Stokes geometry に退化が起こらない (new Stokes curve が点線である) ことがわかる ([KKNT1, Remark 4.1])。

点線の部分では、turning point  $b_1$  と  $b_2$  が  $a$  から出る Stokes curve によって区切られる異なる領域に存在しており、それらから出る Stokes curve はそれぞれの領域から外に出ることができない。そのため  $b_1$  と  $b_2$  を結ぶ (Stokes curve の定義に現れる形の) 積分の虚部が消えているにもかかわらず、Stokes curve で結ばれないのである。

さらに [KKNT2] では非線型方程式の virtual turning point が一般的な形で定義され, 上の new Stokes curve は線型の場合と同様, virtual turning point から出る Stokes curve (の一部分) に他ならないことが示された. この概念を用いて (点線の new Stokes curve を含めた) 非線型方程式の Stokes geometry が詳しく論じられ, complete Stokes geometry の具体例が示されているが, ここではこれ以上深入りしないことにする.

### 3 2本の第1種 Stokes curve の交点

本節以降では,  $(NY)_4$  の Stokes curve どうしのいくつかの交点に注目し, そのまわりでの  $(L)_4$  の Stokes geometry の変化を観察する. 以下で用いる図は論文の末尾にまとめておいた.

Fig. 1 に示すように, 2つの第1種 turning point  $\tau^{(1)} = -0.0347 + 0.1545i$  および  $\tau^{(2)} = 0.3094 + 0.4662i$  から出る Stokes curve  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$  が  $t = t_0 = 0.3101 + 0.2789i$  において交わっている. 本節ではこの交点  $t_0$  に注目し, そのまわりでの Stokes 図形の変化について調べる. なお, 本節で扱う図は方程式のパラメータを  $\alpha_0 = 1 - 0.35i$ ,  $\alpha_1 = 0.45 - 0.7i$ ,  $\alpha_2 = -0.5 - 0.2i$ ,  $\alpha_3 = -1.05 + 0.25i$  とおいたものである. Fig. 1 の  $t_j$  における  $(L)_4$  の Stokes curve の図が Fig. 2, ..., 5 それぞれの  $(j)$  に対応している.

Fig. 2(0) は交点  $t_0$  における  $(L)_4$  の Stokes curve の図である.  $t_0$  が turning point  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$  からかなり離れているため, [S] で見たような切り替えを経て多くの virtual turning point が退化に関与している.

この図で simple turning point  $s_1^{(0)}$  が virtual turning point  $v_1^{(1)}$  と Stokes curve で結ばれ, 一方で別の virtual turning point  $v_1^{(2)}$  とも結ばれていることに気づく. このうち  $s_1^{(0)}$  と  $v_1^{(1)}$ ,  $s_1^{(0)}$  と  $v_1^{(2)}$  が結ばれているという退化が, それぞれ  $t$  が  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$  上にあることによるものである.

$P_I, P_{II}$ -hierarchy の場合に, 非線型方程式の2本の Stokes curve に対応する退化にともに関与している turning point (“hinging turning point”) が線型方程式の Stokes geometry の変化を調べる上で中心的であったことを思い起こせば, この simple turning point  $s_1^{(0)}$  がこの場合中心的な役割を果たすのではないかと考えられる.

次に、この場合にすべての virtual turning point あるいはすべての ordered crossing point を考えるのはあまりに数が多く複雑すぎるので、考察の対象とする turning point の範囲を明確にしておく必要がある。

[S] で見たように、“3 本の Stokes curve が 1 点で交わる” という configuration が典型的な退化のパターンであることに注意すると、 $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$  それぞれに対して 3 組の turning point のペアを考えるのが妥当であろう。すなわち、 $t$  が  $\Gamma^{(1)}$  上にあることによる退化に関する turning point として Fig. 2(0.1) の 6 つの turning point を pick up し、 $t$  が  $\Gamma^{(2)}$  上にあることによる退化に関する turning point として Fig. 2(0.2) の 6 つの turning point を pick up する。 $(s_1^{(0)})$  が共通なので) ひとまずこれら 11 個の turning point を “relevant な” turning point と考えることにする。Fig. 2 ではすべての ordinary turning point と relevant なすべての virtual turning point, およびそれらから出る Stokes curve を描いているが、非常に複雑なので、以下 Fig. 3, 4, 5 にその注目すべき部分のみを描いた図を示しておく。

まず  $v_1^{(1)}$ ,  $s_1^{(0)}$ ,  $v_1^{(2)}$  が結ばれている部分が  $t$  によってどのように変化するかを調べてみる。各  $t$  に対して対応する部分のみを描いたものが Fig. 3 である。この状況は真ん中の simple turning point  $s_1^{(0)}$  から出る隣り合った 2 本の Stokes curve がそれぞれ  $s_1^{(0)}$  と他の turning point を結んでいるという意味で、[KKNT1] でいう Lax-adjascent の場合と同様の configuration であると考えられる。

領域 I では (1)(3) に示すように、 $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$  が  $s_1^{(0)}$  の Stokes curve で区切られる同一の領域に存在する。従って  $P_I, P_{II}$ -hierarchy に対する経験に照らせば、 $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$  が Stokes curve で結ばれる点が存在することが期待される。

実際、(1) と (3) では  $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve の位置関係が入れ替わっており、その間の点  $t_2$  では  $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$  が結ばれていることがわかる。

一方、それとは反対側の領域 III (Fig. 3(7)(8)(9)) においては、 $v_1^{(1)}$ ,  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve はいずれも  $s_1^{(0)}$  の右下方向へ進み、特に変わったことは起こっていない。これは  $P_I, P_{II}$ -hierarchy の場合に、非線型方程式の new Stokes curve のうち交点から virtual turning point に近い部分では線型方程式の Stokes geometry の退化が観察されなかったのと同様の状況である。

このように、virtual turning point が絡む場合でも非線型方程式の Stokes curve 上ではない点で “両端の turning point が Stokes curve で結ばれる” という現象が起こることが確認された。このような現象は Fig. 1(3) に示した “new Stokes curve”  $\hat{\Gamma}$  の

うち実線部分 (交点  $t_0$  から右下部分) で観察されるが, この曲線については次節でより詳しく議論する.

しかし, この場合は両側が virtual turning point なので, (特定の方向に向かう) Stokes curve の本数の変化はこの部分では見られず, 非線型方程式の Stokes 現象を調べる上で線型方程式の Stokes curve の本数の変化が鍵になっていたことを思い起こせば, これだけでは  $t_2$  の前後で  $(NY)_4$  に Stokes 現象が起こるとは判断できない (実際, 後で紹介する non-adjacent の場合などを踏まえると, この部分の Stokes 係数は変化していないと考える方が自然なのではないかと考えている).

そこで次に, このときに他の turning point が Stokes curve で結ばれる様子を観察する. まずは  $\Gamma^{(1)}$  上で結ばれているペア  $s_2^{(1)}$  と  $v_2^{(0)}$  に注目する (Fig. 4).

Fig. 4(1)(2)(3) を見ると, Fig. 4(0) には描かれていない virtual turning point  $\hat{v}_2^{(2)}$  が現れていることがわかる.  $\hat{v}_2^{(2)}$  は  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve と  $v_3^{(1)}$  から出る Stokes curve の交点から定まる virtual turning point である (Fig. 4 には  $v_3^{(1)}$  は描かれていない. Fig. 2 参照).

$v_1^{(1)}$  が  $s_2^{(1)}$  から出る Stokes curve と  $v_3^{(1)}$  から出る Stokes curve の交点から定められていることに注意すれば,  $t_2$  においてそれらの交点が一致し,  $s_2^{(1)}$  と  $\hat{v}_2^{(2)}$  が Stokes curve で結ばれることがわかる. その前後 (1)(3) を比較すると  $s_2^{(1)}$  の左上および右上方向に伸びている Stokes curve の本数が変化しており,  $(L)_4$  の無限遠点 (もしくは原点) での monodromy data に真に変化をもたらしていると期待される.

ところが Fig. 4 では, この virtual turning point  $\hat{v}_2^{(2)}$  は領域 I, II ( $t = t_1, \dots, t_5$ ) でしか図に現れていない. これは領域 III, IV では  $v_1^{(2)}$  (これは元々  $\Gamma^{(2)}$  上での退化に関係した turning point であった) から出る Stokes curve が  $s_1^{(0)}$  の右下方向へ伸びているため,  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve とは (少なくともこの図の範囲では) 交わらず,  $\hat{v}_2^{(2)}$  を定める交点がなくなってしまうためである. この意味で  $\hat{v}_2^{(2)}$  は “相手側の” Stokes curve  $\Gamma^{(2)}$  の影響をうけた turning point であるといえる.

したがって, 交点から new Stokes curve を描き, virtual turning point を求めるという方法では, 領域 I, II という  $t_0$  の “半近傍” でしか virtual turning point  $\hat{v}_2^{(2)}$  を見つけられないことがわかる.  $\Gamma^{(2)}$  上の点  $t_0, t_6, t_{12}$  はその境界にあたり, いわば “半分隠れた” 状態になっている. 計算の都合上図には描かれていないが, 領域 I, II からの極限として考えればわかるように,  $v_2^{(0)}$  から出る Stokes curve 上,  $v_2^{(0)}$  より下方にあると考えられる.

この  $\hat{v}_2^{(2)}$  のように, (考えている点の近傍において) ある一部分の領域でのみ実線の new Stokes curve を定める virtual turning point として現れるような virtual turning point  $v$  を, 以下 napping virtual turning point と呼び, hat をつけて表すことにする. またそれが現れる領域, 現れない領域をそれぞれ  $v$  の awake region, sleeping region と呼ぶ.

*Remark.* 定義に戻ればわかるように virtual turning point の位置は (適当な領域で)  $t$  の解析関数であるから, sleeping region であっても napping virtual turning point 自体がなくなってしまうわけではない. 例えば  $\hat{v}_2^{(2)}$  を  $t$  の解析関数として考えれば,  $t_7$  では  $s_2^{(1)}$  から下に伸びる Stokes curve と  $v_2^{(0)}$  から出る Stokes curve の間, “new Stokes curve” 上の点  $t = t_8$  では  $s_2^{(1)}$  から出る Stokes curve 上にあり,  $t_9, t_{10}, t_{11}$  ではそれらの左側にあると考えられる. 次節の定理 2, 系 3 も参照.

ただしそこから出た Stokes curve が (ordered) crossing point がなくなったため実線にならず, ずっと点線のままであるから交点からたどる方法では見つけれないものである.

$t = t_2$  の前後での変化を観察するためには, 元々考えていたペア  $s_2^{(1)}, v_2^{(0)}$  だけでなく, それに napping virtual turning point  $\hat{v}_2^{(2)}$  を加えた “turning point の三つ組” (あるいはそれらから出る “3 本の Stokes curve の束”) として変化を追跡することが必要なのである.

一方, (7)(8)(9) では  $\hat{v}_2^{(2)}$  が図に現れないため, 実線の Stokes curve に関しては configuration の変化は観察されていない.

次に  $s_4^{(2)}, v_4^{(0)}$  のペアに対して上と同様の観察を行う (Fig. 5). この場合も  $d_5^{(1)}$  から右方へ出る Stokes curve と  $v_1^{(1)}$  から出る Stokes curve との交点から定められる napping virtual turning point  $\hat{v}_4^{(1)}$  が存在し,  $t = t_2$  で  $s_4^{(2)}$  と結ばれていることがわかる.  $\hat{v}_4^{(1)}$  に関しては  $\Gamma^{(1)}$  が awake region と sleeping region の境界に相当し, その上の点  $t_0, t_4, t_{10}$  では  $\hat{v}_4^{(1)}$  は  $v_4^{(0)}$  から出る Stokes curve 上  $v_4^{(0)}$  より左側に位置していると考えられる.

実は上で見た場合と同様, Fig.2(0.1)(0.2) に示されている他のペア  $v_3^{(1)}$  と  $v_3^{(0)}, d_5^{(2)}$  と  $v_5^{(0)}$  に対しても, それぞれ対応する napping virtual turning point  $\hat{v}_3^{(2)}, \hat{v}_5^{(1)}$  が存在し,  $t = t_2$  ではそれらがペアの片方の turning point と結ばれていることがわかる

(Fig. 2 参照. ただし  $\hat{v}_5^{(1)}$  は図の右方およそ  $0.26 - 0.26i$  の位置にあるため, 図には描かれていない).

以上, napping virtual turning point が 4 個見つけられ, これらをあわせると turning point の三つ組が 5 つ, 計 15 個の turning point が退化に関係していることがわかった.

このように, 非線型方程式の new Stokes curve を考える際には, 一方の Stokes curve 上での退化に関係する turning point のペアだけではなく, それに相手側の Stokes curve との “相互作用” から作り出される napping virtual turning point を加えた “三つ組” として変化を考えなければならない.

また napping virtual turning point  $\hat{v}_2^{(2)}$  および  $\hat{v}_3^{(2)}$  の sleeping region は  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve が  $s_1^{(0)}$  の右下方向へ伸びている領域すなわち領域 III, IV であり (Fig. 6(1)),  $\hat{v}_4^{(1)}$  および  $\hat{v}_5^{(1)}$  の sleeping region は  $v_1^{(1)}$  から出る Stokes curve が  $s_1^{(0)}$  の右下方向へ伸びている領域すなわち領域 II, III である (Fig. 6(2)). いずれの napping virtual turning point についても領域 III はその sleeping region に含まれていることから, Fig. 2 に示した範囲でやはり実線の Stokes curve の configuration は変化していないことがわかる.

*Remark.* 各 turning point の下付き添字は三つ組の番号を表し, 上付き添字は次の規則で番号づけられている: (i)  $\Gamma^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) 上で各三つ組の (0) と ( $j$ ) が結ばれる; (ii)  $\hat{\Gamma}$  上で (1) と (2) が結ばれる. 次節の定理 2, 系 3 も参照.

特に  $(NY)_4$  の Stokes curve の交点  $t_0$  では, ( $s_1^{(0)}$  を含まない) 各三つ組が 1 本の Stokes curve 上に並ぶことになる. これまでに見てきた場合との大きな違いは, 真ん中の hinging turning point が virtual turning point であるという点である.

$P_I, P_{II}$ -hierarchy のように ordinary turning point が他の 2 つの turning point を hinge している場合は, その近くを通る Stokes curve の進む方向が変わることによって, 非線型方程式の new Stokes curve 上 (virtual turning point から見て) 交点より遠方では線型方程式の Stokes geometry に退化が起こり, 近くでは退化が起こらないという違いが生じていた. これに対して virtual turning point が hinge している場合は, Stokes curve の進む方向が変わることはないが, その代わりここで調べたように napping virtual turning point の存在によって, 言い換えればある領域で実線として現れていた Stokes curve が点線になることによって, 同様の違いが作り出されているのである. (ここでは ordinary turning point が hinge している箇所に注目してその近



くでの退化の様子を観察したが) そこから遠く離れたところでの様子など, このような mechanism がここで調べた以外の場合にもすべて同様に働くかどうかはまだ確かめられていないが, 驚くべき mechanism と言えよう.

*Remark.* 例えば上の議論では  $v_3^{(1)}$  を ordinary turning point と同じように扱ったが, これはその左上にある double turning point  $d_6$  から出る Stokes curve と右下にある simple turning point  $s_7$  から出る Stokes curve の交点から定められたものであり (Fig. 7), (図には描かれていないが)  $\Gamma^{(1)}$  上では  $d_6, s_7$  はそれぞれある virtual turning point と結ばれている. これらのペアに対しても napping virtual turning point が存在して三つ組が形成されていると予想されるが, 現時点ではまだ確認されていない.

また,  $d_6$  は元々  $t^{(1)}$  の近傍で ([T, Theorem 2.1] の状況で) simple turning point と結ばれていた double turning point であり,  $(NY)_4$  の new Stokes curve の理論において何らかの役割を持っている可能性もある.

#### 4 $(NY)_4$ の new Stokes curve

次に本節では, 前節で観察したような退化が起こる点が満たすべき条件について考察する.  $\nu_+^{(j)}, \nu_-^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) をそれぞれ  $\tau^{(j)}$  で重なる特性根とし,

$$I^{(j)}(t) := \frac{1}{2} \int_{\tau^{(j)}}^t (\nu_+^{(j)} - \nu_-^{(j)}) dt \quad (7)$$

( $j = 1, 2$ ) とおく ( $\nu_{\pm}^{(j)}$  の branch はそれぞれ  $\Gamma^{(j)}$  上で  $I^{(j)}(t) > 0$  となるようにとる).  $\Gamma^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) はそれぞれ  $\text{Im} I^{(j)}(t) = 0$  で定められている.

詳しい証明はここでは省略するが,  $\tau^{(j)}$  の近傍から Stokes geometry の変化を追跡し [S, §6] の議論を繰り返し用いることにより,

$$I^{(1)}(t) = \int_{s_1^{(0)}}^{v_1^{(1)}} (\lambda_1 - \lambda_2) dx = \int_{s_2^{(1)}}^{v_2^{(0)}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx = \int_{v_3^{(1)}}^{v_3^{(0)}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx \quad (8)$$

$$I^{(2)}(t) = \int_{s_1^{(0)}}^{v_1^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx = \int_{s_4^{(2)}}^{v_4^{(0)}} (\lambda_4 - \lambda_2) dx = \int_{d_5^{(2)}}^{v_5^{(0)}} (\lambda_1 - \lambda_4) dx \quad (9)$$

という関係式が成り立っていることがわかる. ただし  $x$ -平面の cut は積分路にひっかからないように適当に入れ, 特性根の番号を定めておく.

このとき, ordinary Stokes curve 上にないけれども  $(L)_4$  の Stokes geometry に退化が生じる点すなわち new Stokes curve 上の点は

$$\operatorname{Im} I^{(3)}(t) = 0, \quad I^{(3)}(t) := I^{(1)}(t) + I^{(2)}(t) = \int_{v_1^{(1)}}^{v_1^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (10)$$

を満たすと考えられる. これは [KKNT1] における非線型方程式の new Stokes curve の定義の自然な拡張になっており (下の Remark 参照), 実際, Fig. 1(3) に示した  $\hat{\Gamma}$  はこの関係式を用いて描いたものである. New Stokes curve 上にありながら交点より turning point  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$  に近い領域にある点  $t_8$  では  $(L)_4$  の Stokes geometry の退化は観察されないが, これも [KKNT1][KKNT2] で議論された場合と同様である.

*Remark.*  $I^{(3)}(\omega) = 0$  となる点  $t = \omega$  が存在すれば, (10)は

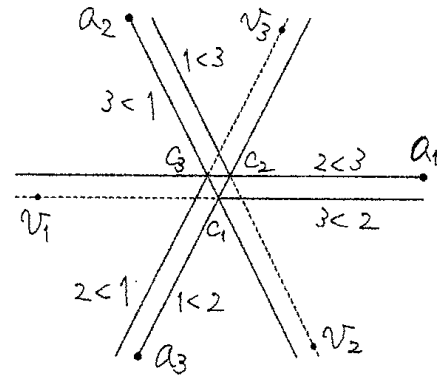
$$I^{(3)}(t) = \int_{\omega}^t (\nu_+^{(1)} - \nu_-^{(2)}) dt = \int_{\omega}^t (\nu_+^{(2)} - \nu_-^{(1)}) dt \quad (11)$$

と書き換えられる ( $\nu_+^{(j)} + \nu_-^{(j)} = 0$ ,  $j = 1, 2$  に注意). 実際に線型方程式の場合 ([AKKSST]) と同様の方法でこのような  $\omega$  を求めることができ, この場合は  $\omega = 0.0169 + 0.4211i$  となる. これは  $\omega$  が “virtual turning point” にあたる点であることを示しており, [KKNT2] の定義の拡張と考えられる.

次に線型方程式  $(L)_4$  の Stokes geometry との関係を考える. 鍵となるのは [S, 命題 6.1(ii)] を一般化した次の補題である:

補題 1.

3 つの turning point  $a_1, a_2, a_3$  から出てそれぞれ type  $2 < 3, 3 < 1, 1 < 2$  をもつ 3 本の Stokes curve が右図のように交わり (不等号の向きがすべて逆の場合も同様である), それらが作る ordered crossing point  $c_1, c_2, c_3$  は互いに十分近いとする. 交点  $c_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) から定まる virtual turning point を  $v_j$  とするとき,



$$\int_{a_1}^{v_1} (\lambda_3 - \lambda_2) dx = \int_{a_2}^{v_2} (\lambda_1 - \lambda_3) dx = \int_{a_3}^{v_3} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (12)$$

が成り立つ.

証明.  $x_0$  を  $c_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) の近傍の任意の点として

$$J(x_0) := \int_{a_1}^{x_0} (\lambda_3 - \lambda_2) dx + \int_{a_2}^{x_0} (\lambda_1 - \lambda_3) dx + \int_{a_3}^{x_0} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (13)$$

を考えると,  $J(x_0)$  は  $x_0$  によらないことがわかる. 一方

$$\begin{aligned} J(c_1) &= \int_{a_1}^{c_1} (\lambda_3 - \lambda_2) dx + \int_{a_2}^{c_1} (\lambda_1 - \lambda_3) dx + \int_{a_3}^{c_1} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \\ &= \int_{a_1}^{c_1} (\lambda_3 - \lambda_2) dx + \int_{v_1}^{c_1} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \\ &= \int_{a_1}^{v_1} (\lambda_3 - \lambda_2) dx \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つ. 同様にして

$$J(c_2) = \int_{a_2}^{c_2} (\lambda_1 - \lambda_3) dx \quad (15)$$

$$J(c_3) = \int_{a_3}^{c_3} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (16)$$

もいえる. 以上により主張は示された.  $\square$

補題 1 は一般の線型方程式に対して成り立つ有用な命題である. これを用いて以下の定理を証明する.

定理 2.

$t = t_0$  の近傍において次の関係式が成り立つ:

$$I^{(3)}(t) = \int_{v_1^{(1)}}^{v_1^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (17)$$

$$= \int_{s_2^{(1)}}^{v_2^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx = \int_{v_3^{(1)}}^{v_3^{(2)}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx \quad (18)$$

$$= \int_{s_4^{(2)}}^{v_4^{(1)}} (\lambda_4 - \lambda_2) dx = \int_{d_5^{(2)}}^{v_5^{(1)}} (\lambda_1 - \lambda_4) dx. \quad (19)$$

特に  $t$  が  $\hat{\Gamma}$  上にあるならば,  $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$ ,  $s_2^{(1)}$  と  $\hat{v}_2^{(2)}$ ,  $v_3^{(1)}$  と  $\hat{v}_3^{(2)}$ ,  $s_4^{(2)}$  と  $\hat{v}_4^{(1)}$ ,  $d_5^{(2)}$  と  $\hat{v}_5^{(1)}$  がそれぞれ  $(L)_4$  の Stokes curve で結ばれている. ただし各 napping turning point は, その sleeping region では awake region から解析接続によって得られたものと解釈する.

証明.  $v_1^{(2)}$ ,  $s_2^{(1)}$ ,  $v_3^{(1)}$  から出る Stokes curve が作る各交点から  $v_1^{(1)}$ ,  $\hat{v}_2^{(2)}$ ,  $\hat{v}_3^{(2)}$  が定められている (Fig. 8(1)) と考えて補題 1 を適用すると (17), (18) の各辺が等しいことがわかる.

同様に,  $v_1^{(1)}$ ,  $s_4^{(2)}$ ,  $d_5^{(2)}$  から出る Stokes curve が作る各交点から  $v_1^{(2)}$ ,  $\hat{v}_4^{(1)}$ ,  $\hat{v}_5^{(1)}$  が定められている (Fig. 8(2);  $d_5^{(2)}$  の右側にある交点に注目する) と考えて補題 1 を適用すると (17), (19) の各辺が等しいことがわかる.  $\square$

系 3.

$t = t_0$  の近傍において以下の (i)(ii) が成り立つ:

(i)

$$I^{(2)}(t) = \int_{v_2^{(0)}}^{\hat{v}_2^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx = \int_{v_3^{(0)}}^{\hat{v}_3^{(2)}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx. \quad (20)$$

特に  $t$  が  $\Gamma^{(2)}$  上にあるならば,  $v_2^{(0)}$  と  $\hat{v}_2^{(2)}$ ,  $v_3^{(0)}$  と  $\hat{v}_3^{(2)}$  がそれぞれ  $(L)_4$  の Stokes curve で結ばれている.

(ii)

$$I^{(1)}(t) = \int_{v_4^{(0)}}^{\hat{v}_4^{(1)}} (\lambda_4 - \lambda_2) dx = \int_{v_5^{(0)}}^{\hat{v}_5^{(1)}} (\lambda_1 - \lambda_4) dx. \quad (21)$$

特に  $t$  が  $\Gamma^{(1)}$  上にあるならば,  $v_4^{(0)}$  と  $\hat{v}_4^{(1)}$ ,  $v_5^{(0)}$  と  $\hat{v}_5^{(1)}$  がそれぞれ  $(L)_4$  の Stokes curve で結ばれている.

証明.  $I^{(3)}(t) = I^{(1)}(t) + I^{(2)}(t)$  に注意すると, (8)(17)(18) から (20) が, (9)(17)(19) から (21) が得られる.  $\square$

定理 2 および系 3 の関係式は, 前節での観察を正当化し, napping virtual turning point が解析的には通常の (virtual) turning point と同様の確かな実在であることを示しているだけでなく,  $\Gamma^{(1)}$  と  $\Gamma^{(2)}$  の交点  $t = t_0$  の近傍での  $(L)_4$  の Stokes geometry

が, それらの Stokes curve を定める積分  $I^{(1)}(t)$ ,  $I^{(2)}(t)$  およびこれらを加えた  $I^{(3)}(t)$  (これは new Stokes curve  $\hat{\Gamma}$  を定める積分である) という量によって統制されていることを示すものでもある. 非線型方程式  $(NY)_4$  と線型方程式  $(L)_4$  の Stokes geometry の関係を論じる上で非常に重要な, しかも非常に美しい関係式といえよう.

*Remark.* (11)から new Stokes curve  $\hat{\Gamma}$  は第 2 種であると考えられるが, 何らかの意味で “double turning point どうしが結ばれる” という解釈ができるかどうかはよくわかっていない.  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$  上での退化を利用して “double 相当の” virtual turning point のような概念を考えれば, “double 相当の” virtual turning point  $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$  が結ばれる, というのが自然のようにも思えるが, そのような概念が一般に定義できるのか,  $s_2^{(1)}$  と  $\hat{v}_2^{(1)}$  のような組み合わせの場合はどう解釈するのか等問題は多い.

また, [KKNT2] で議論された  $P_1$ -hierarchy の場合は Lax-adjascent な交点をもう 1 本の new Stokes curve が点線のまま通っているが, それに対応する new Stokes curve がこの場合に存在するか, 存在するとしてどのような意味を持っているかもわかっていない.

## 5 第 1 種 Stokes curve と第 2 種 Stokes curve の交点 (1)

次に第 1 種 Stokes curve と第 2 種 Stokes curve の交点について調べる. Lax pair のサイズが 2 のときは hinging turning point が double であるため, Lax-adjacent の場合とそうでない場合が存在した.

まず本節では Lax-adjascent と考えられる場合について考察する.

Fig. 9 は第 1 種 turning point  $\tau^I = -0.5791 + 0.7330i$  から出た Stokes curve  $\Gamma^{(1)}$  と第 2 種 turning point  $\tau^{II} = -1.4938 + 2.6774i$  から出た Stokes curve  $\Gamma^{(2)}$  の交点  $t = t_0 = -0.5814 + 0.5081i$  の近傍の図である. ここで方程式のパラメータは  $\alpha_0 = 1 - 0.39i, \alpha_1 = 0.4 - 0.7i, \alpha_2 = -0.52 - 0.12i, \alpha_3 = -1.05 + 0.25i$  ととっている.

Fig. 10(0) は交点  $t_0$  における  $(L)_4$  の Stokes curve の図である. ここでは double turning point  $d_1^{(0)}$  が virtual turning point  $v_1^{(1)}$  および  $v_1^{(2)}$  と結ばれており, それらを結んでいる 2 本の Stokes curve は隣り合っている (Fig. 11(0)). 従ってこれまでに見えてきた Lax-adjascent の場合と同様, 実線の new Stokes curve が伸びる場合ではないかと予想される.

そこで前節と同様, まず領域 I における  $(L)_4$  の Stokes geometry の変化を調べてみる.

Fig. 11(1)(3) では  $v_1^{(1)}$  から出る Stokes curve と  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve の位置関係が入れ替わっており, 実際その間の点  $t_2$  では  $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$  が結ばれている.

また, Fig. 12 には他のいくつかの turning point も含めた退化の様子を示しているが ( $-0.4 - 0.2i$  付近にある double turning point  $d_4^{(2)}$  から出た Stokes curve も図に描かれている), 前節と同様, いくつかの napping virtual turning point が現れてそれらが  $t_2$  で他の turning point と結ばれていることがわかる. 例えば  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve と  $s_3^{(1)}$  から出る Stokes curve の交点から  $\hat{v}_2^{(2)}$  が定まっているが, これが  $t = t_2$  で  $s_2^{(1)}$  と結ばれている.  $\hat{v}_2^{(2)}$  は  $v_1^{(2)}$  から出る Stokes curve が  $d_1^{(0)}$  から左に伸びる Stokes curve の上方にある領域, すなわち領域 I, IV でのみ図に現れ (awake region), 領域 II, III では現れていない (sleeping region). その境界となる Stokes curve  $\Gamma^{(2)}$  上では  $v_2^{(0)}$  から出る Stokes curve 上  $v_2^{(0)}$  より左側に位置している.

同様に,  $v_1^{(1)}$  から出る Stokes curve と  $s_5^{(2)}$  から出る Stokes curve の交点から napping virtual turning point  $\hat{v}_4^{(1)}$  が定まり,  $t = t_2$  で  $d_4^{(2)}$  と結ばれている.  $\hat{v}_4^{(1)}$  の awake region, sleeping region はそれぞれ領域 I, II, 領域 III, IV である. なお,  $s_3^{(1)}$ ,  $v_3^{(0)}$  と三つ組をなしている napping virtual turning point  $\hat{v}_3^{(2)}$  および  $s_5^{(2)}$ ,  $v_5^{(0)}$  と三つ組をなしている napping virtual turning point  $\hat{v}_5^{(1)}$  は, それぞれおよそ  $2.37 + 0.78i$ ,  $-0.25 + 0.81i$  の位置にあるため図には描かれていない.

この場合,  $\Gamma^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) がそれぞれ  $\text{Im} I^{(j)}(t) = 0$ ,

$$I^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \int_{\tau^I}^t (\nu_+^{(1)} - \nu_-^{(1)}) dt \quad (22)$$

$$I^{(2)}(t) = \int_{\tau^{II}}^t (\nu_+^{(2)} - \nu_+^{(1)}) dt = - \int_{\tau^{II}}^t (\nu_-^{(1)} - \nu_-^{(2)}) dt \quad (23)$$

で定められているとすれば,

$$I^{(1)}(t) = \int_{d_1^{(0)}}^{v_1^{(1)}} (\lambda_1 - \lambda_2) dx \quad (24)$$

$$I^{(2)}(t) = \int_{d_1^{(0)}}^{v_1^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (25)$$

などが成り立つので,

$$\operatorname{Im} I^{(3)}(t) = 0, \quad I^{(3)}(t) := I^{(1)}(t) + I^{(2)}(t) = \int_{v_1^{(1)}}^{v_1^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (26)$$

が new Stokes curve を定める式となる. 前小節と同様,  $I^{(3)}(\omega) = 0$  となる点  $\omega$  (“virtual turning point”) を導入すれば

$$I^{(3)}(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega}^t (\nu_+^{(2)} - \nu_-^{(2)}) dt \quad (27)$$

と表すことができ, この場合は  $\omega \sim -0.91 + 1.22i$  となる.

またこの場合も, 前節と同様の napping virtual turning point が関係した積分関係式を導くことができる.

定理 4.

$t = t_0$  の近傍において次の関係式が成り立つ:

$$I^{(3)}(t) = \int_{v_1^{(1)}}^{v_1^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx \quad (28)$$

$$= \int_{s_2^{(1)}}^{\hat{v}_2^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx = \int_{s_3^{(1)}}^{\hat{v}_3^{(2)}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx \quad (29)$$

$$= \int_{d_4^{(2)}}^{\hat{v}_4^{(1)}} (\lambda_4 - \lambda_2) dx = \int_{s_5^{(2)}}^{\hat{v}_5^{(1)}} (\lambda_1 - \lambda_4) dx. \quad (30)$$

特に  $t$  が  $\hat{\Gamma}$  上にあるならば,  $v_1^{(1)}$  と  $v_1^{(2)}$ ,  $s_2^{(1)}$  と  $\hat{v}_2^{(2)}$ ,  $s_3^{(1)}$  と  $\hat{v}_3^{(2)}$ ,  $d_4^{(2)}$  と  $\hat{v}_4^{(1)}$ ,  $s_5^{(2)}$  と  $\hat{v}_5^{(1)}$  がそれぞれ  $(L)_4$  の Stokes curve で結ばれている. ただし各 napping turning point は, その sleeping region では awake region から解析接続によって得られたものと解釈する.

系 5.

$t = t_0$  の近傍において以下の (i)(ii) が成り立つ:

(i)

$$I^{(2)}(t) = \int_{v_2^{(0)}}^{\hat{v}_2^{(2)}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx = \int_{v_3^{(0)}}^{\hat{v}_3^{(2)}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx. \quad (31)$$

特に  $t$  が  $\Gamma^{(2)}$  上にあるならば,  $v_2^{(0)}$  と  $\hat{v}_2^{(2)}$ ,  $v_3^{(0)}$  と  $\hat{v}_3^{(2)}$  がそれぞれ  $(L)_4$  の Stokes curve で結ばれている.

(ii)

$$I^{(1)}(t) = \int_{v_4^{(0)}}^{\hat{v}_4^{(1)}} (\lambda_4 - \lambda_2) dx = \int_{v_5^{(0)}}^{\hat{v}_5^{(1)}} (\lambda_1 - \lambda_4) dx. \quad (32)$$

特に  $t$  が  $\Gamma^{(1)}$  上にあるならば,  $v_4^{(0)}$  と  $\hat{v}_4^{(1)}$ ,  $v_5^{(0)}$  と  $\hat{v}_5^{(1)}$  がそれぞれ  $(L)_4$  の Stokes curve で結ばれている.

証明は定理 2, 系 3 と全く同様なので省略する.

## 6 第 1 種 Stokes curve と第 2 種 Stokes curve の交点 (2)

最後に non-Lax-adjacent の場合について簡単に述べておく.

$\tau^I, \tau^{II}$  は前小節と同じものとし, 本節で扱う  $t$ -平面上の点などには tilde をつけて表す. Fig. 13 のように, “ $\Gamma^{(1)}$  の隣の” Stokes curve  $\tilde{\Gamma}^{(1)}$  が  $t = \tilde{t}_0 = -0.9776 + 1.3343i$  で  $\Gamma^{(2)}$  (これは前節で扱ったものと同じ曲線である) と交わっているが, こちらは Fig. 15 に示すように non-Lax-adjacent と考えられる (ただし  $s_2^{(1)}$  から上へ伸びる Stokes curve と  $s_3^{(1)}$  から右下へ伸びる Stokes curve の交点から定まり  $t_0$  で  $d_1^{(0)}$  と結ばれる virtual turning point  $v_1^{(1)}$  は, 右方非常に遠く, およそ  $1.79 + 0.64i$  の位置にあるため図には描かれていない).

前節と整合するように特性根の番号付けを定めると,  $\tilde{\Gamma}^{(1)}$  は

$$\operatorname{Im} \tilde{I}^{(1)}(t) = 0, \quad \tilde{I}^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \int_{\tau^I}^t (\nu_-^{(1)} - \nu_+^{(1)}) dt \quad (33)$$

で定められる. このとき

$$\operatorname{Im} \tilde{I}^{(3)}(t) = 0, \quad \tilde{I}^{(3)}(t) := \tilde{I}^{(1)}(t) - I^{(2)}(t) \quad (34)$$

で定められる曲線  $\hat{\Gamma}$  は new Stokes curve の 1 つの候補となる. 実際  $\tilde{I}^{(3)}(\tilde{\omega}) = 0$  で  $\tilde{\omega}$  を定義すると

$$\tilde{I}^{(3)}(t) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\omega}}^t (\nu_-^{(2)} - \nu_+^{(2)}) dt \quad (35)$$



となり, 数値計算によればこの (自然に求められる)  $\tilde{\omega}$  は前小節の  $\omega$  と一致しているようである (Fig. 16).

この場合は  $d_1^{(0)}$  の近傍に注目すれば, [KKNT1] で議論された場合と同様, “new Stokes curve”  $\hat{\Gamma}$  上でも特に変わったことは起こっていない.

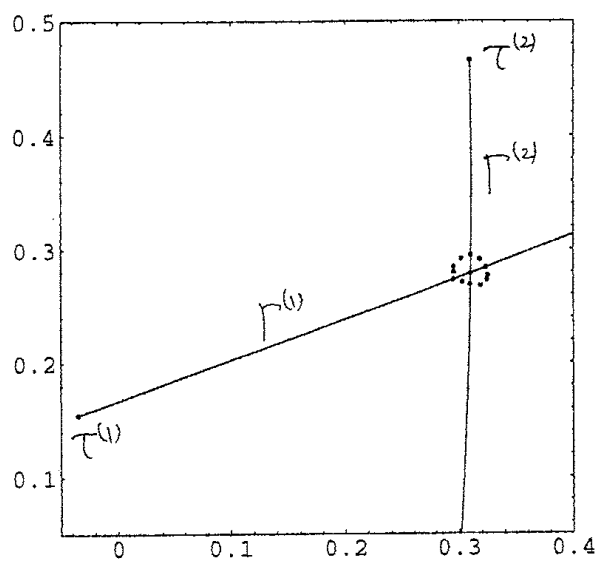
しかし, 実は Fig. 17 に示した部分にいくつか ordered crossing point が存在し, (1) と (3) で (図には描かれていないが) new Stokes curve の位置関係が入れ替わる箇所があると考えられる. このため (2) の前後で Stokes 係数に不連続な変化が生じている (従って  $t_2$  で  $(NY)_4$  に Stokes 現象が起こっている) 可能性がある. ここで  $(NY)_4$  に Stokes 現象が起きるかどうかを明らかにするためには  $(L)_4$  の各 Stokes curve 上での Stokes 係数, 特にそれらが実線であるか点線であるかの区別をより詳しく調べる必要があり, 現時点ではよくわかっていない.

## 参考文献

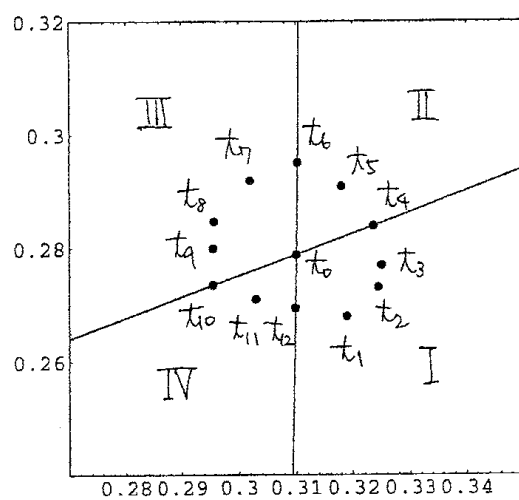
- [AKKSST] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei, A background story and some know-how of virtual turning points, RIMS Preprint No.1486, 2005.
- [KKNT1] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei, On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations, RIMS Preprint No.1443, 2004.
- [KKNT2] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei, On the complete description of the Stokes geometry for the first Painlevé hierarchy, 数理解析研究所講究録 1397 “Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis”, 京都大学数理解析研究所, 2004, 74-101.
- [N] 西川享宏,  $P_{II} - P_{IV}$  hierarchy の WKB 解析, 数理解析研究所講究録 1316 「高階 Painlevé 方程式の Stokes 図形の西川現象」, 京都大学数理解析研究所, 2003, 19-103.
- [S] 佐々木俊介, 高階線型常微分方程式の変形における virtual turning point の役割について, Master thesis, 2005.

- [T] Y. Takei, Toward the Exact WKB Analysis for Higher-Order Painlevé Equations – The Case of Noumi-Yamada Systems –, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 40(2004), 709-730.

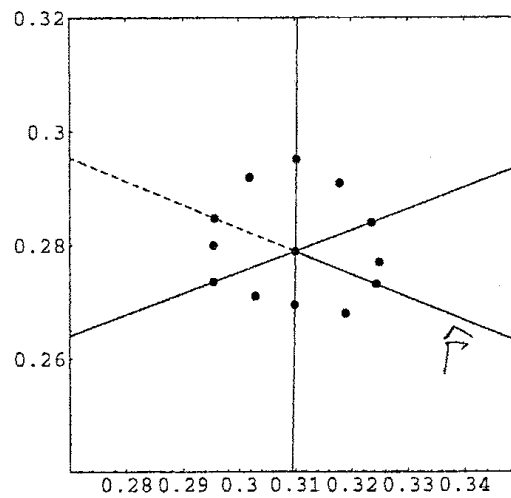
(1)



(2)



(3)

Figure 1 ( $t$ -plane)

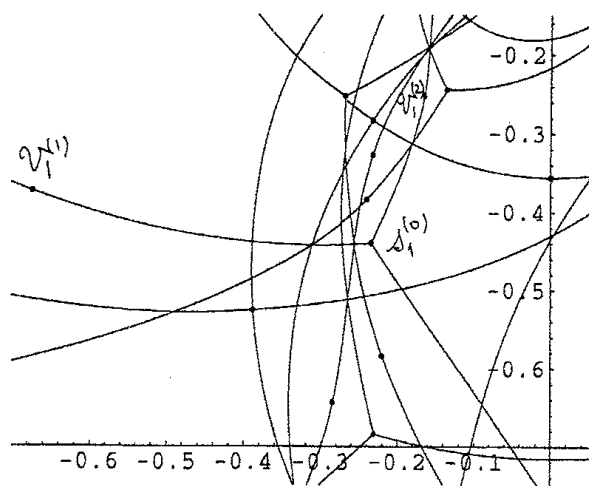
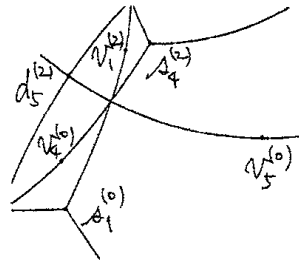


Figure 2(0)

(0.2)



(0.1)

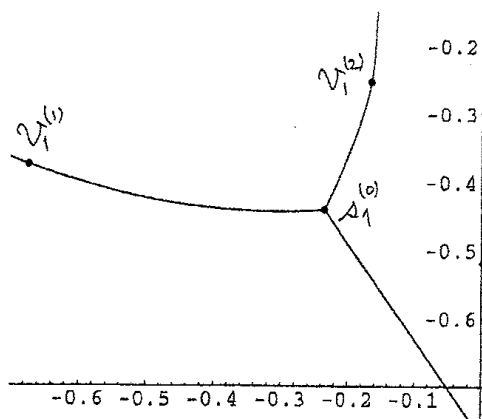
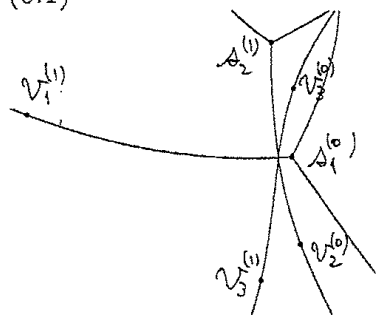


Figure 3(0)

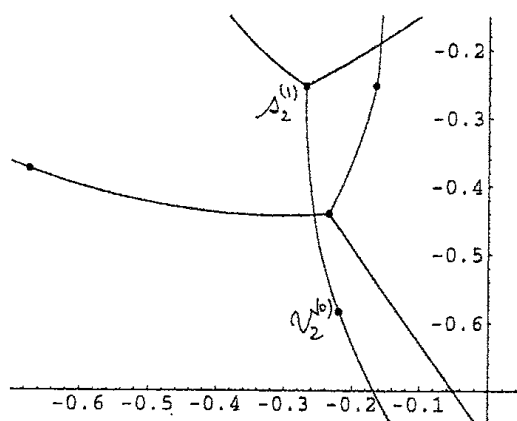


Figure 4(0)

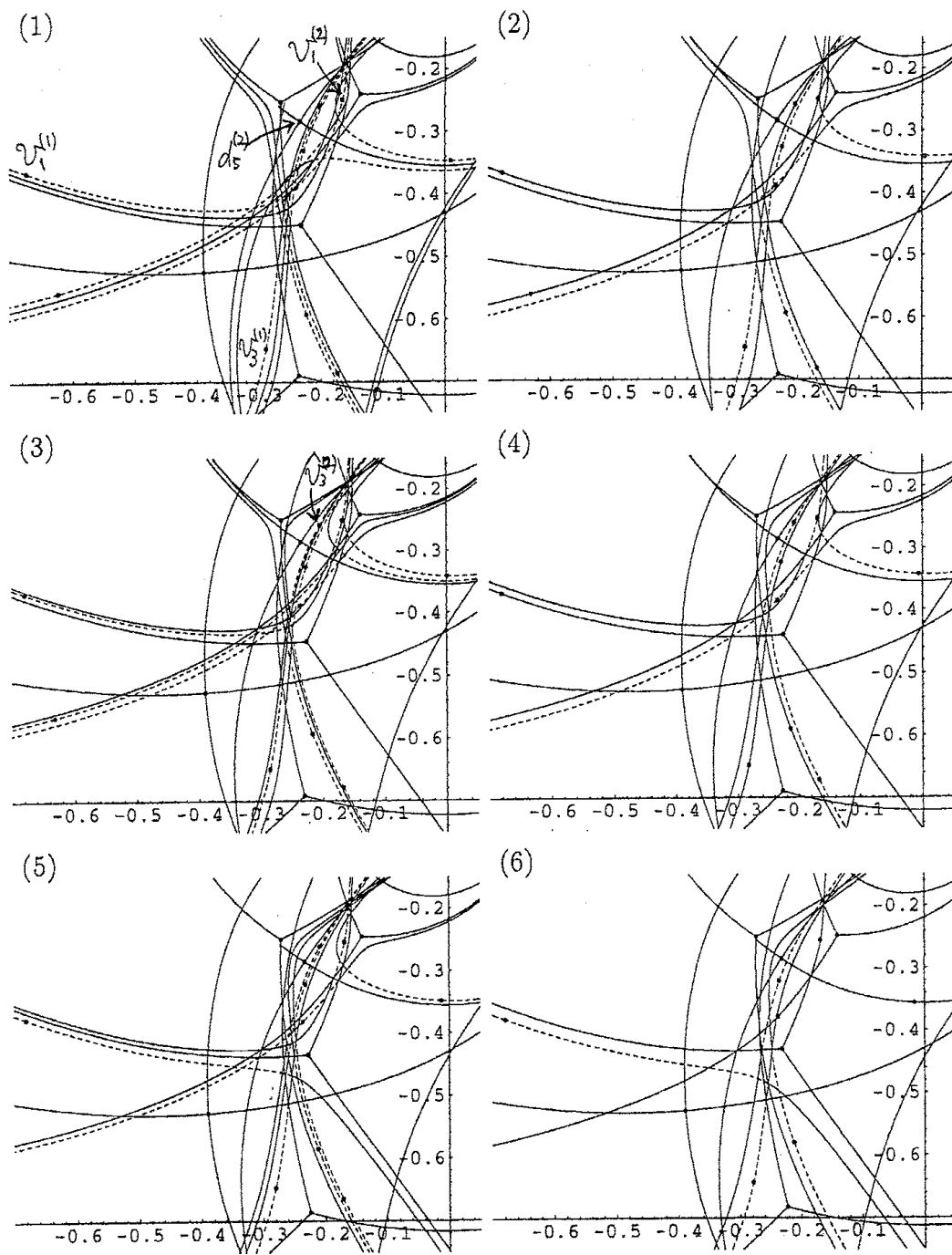


Figure 2

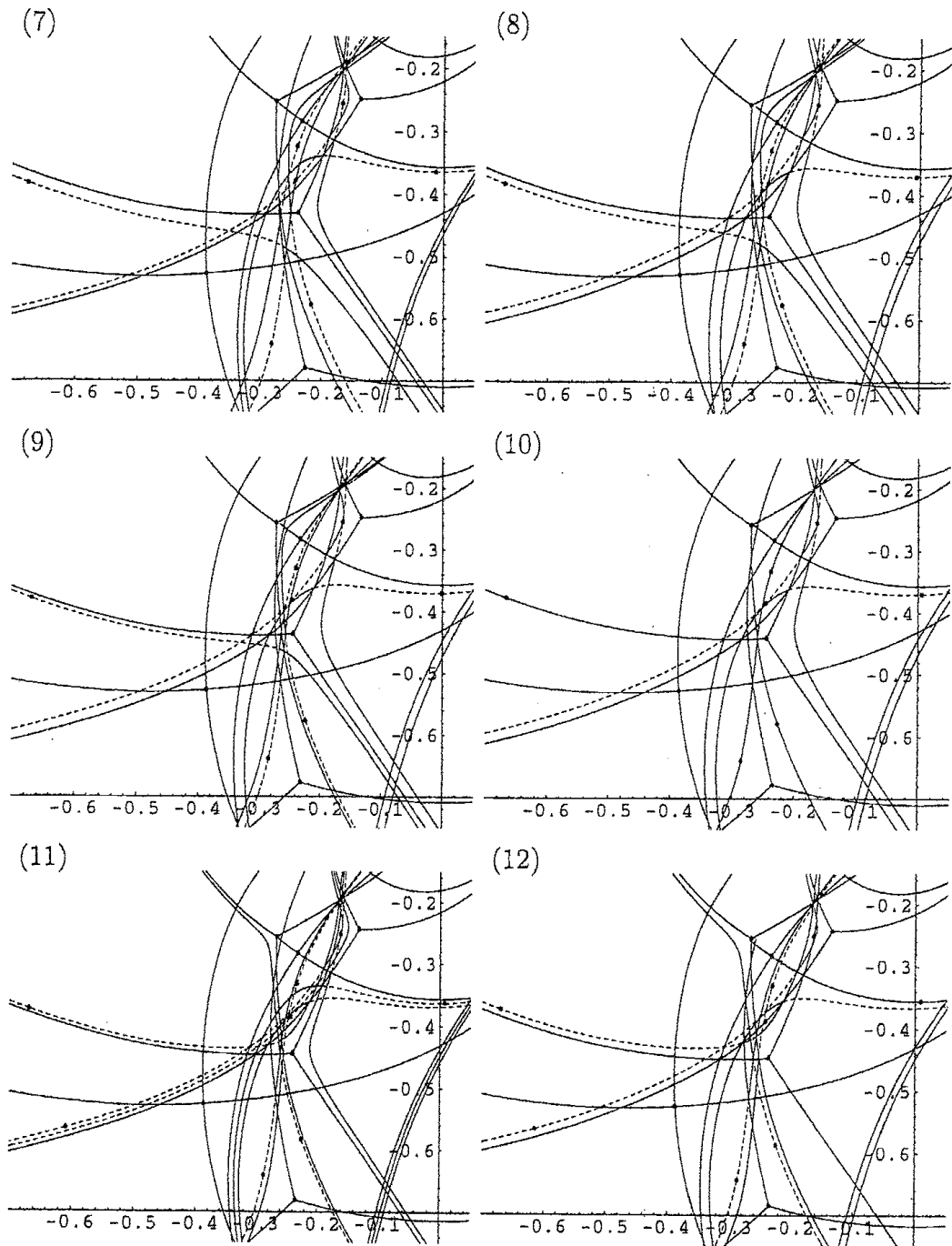


Figure 2

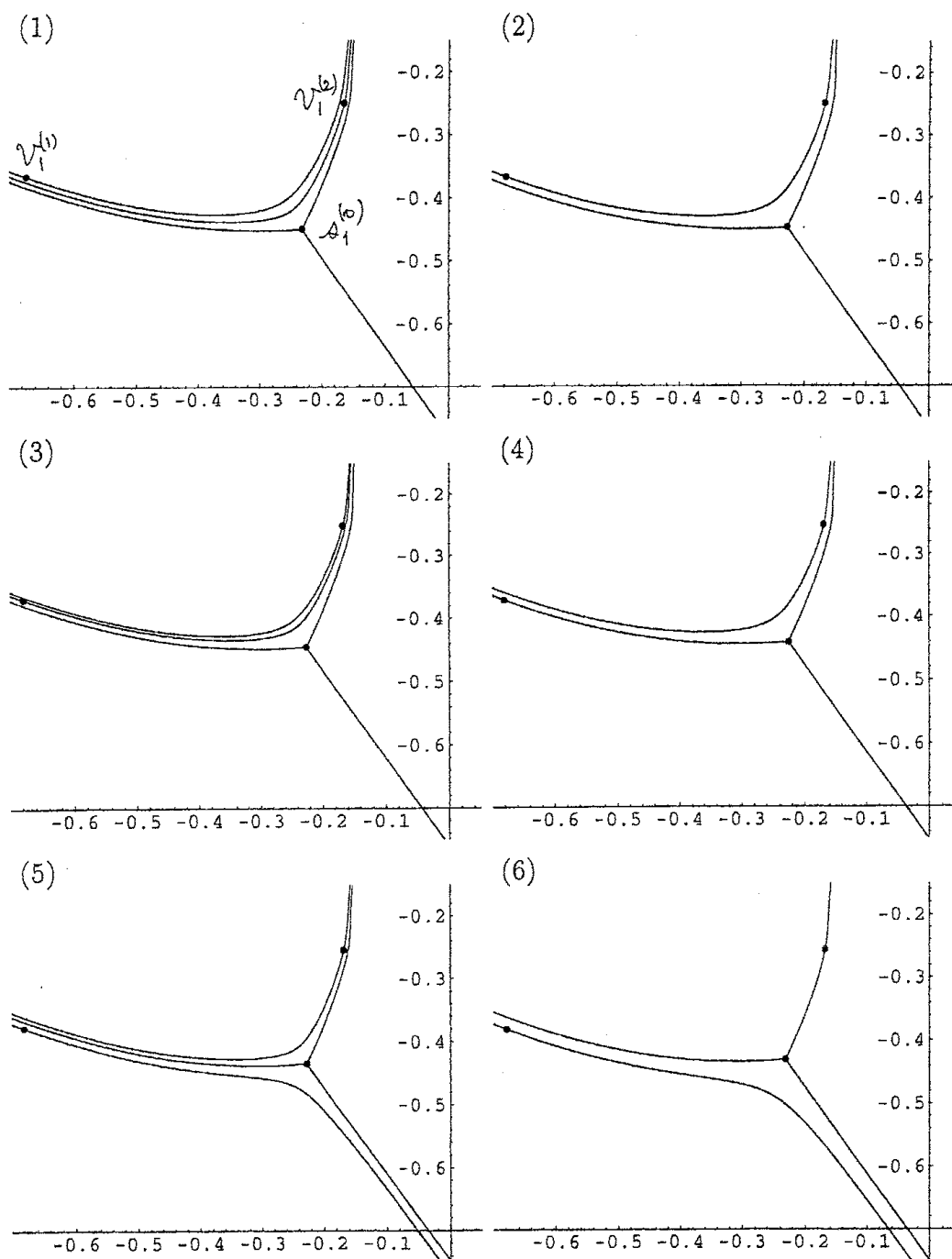


Figure 3

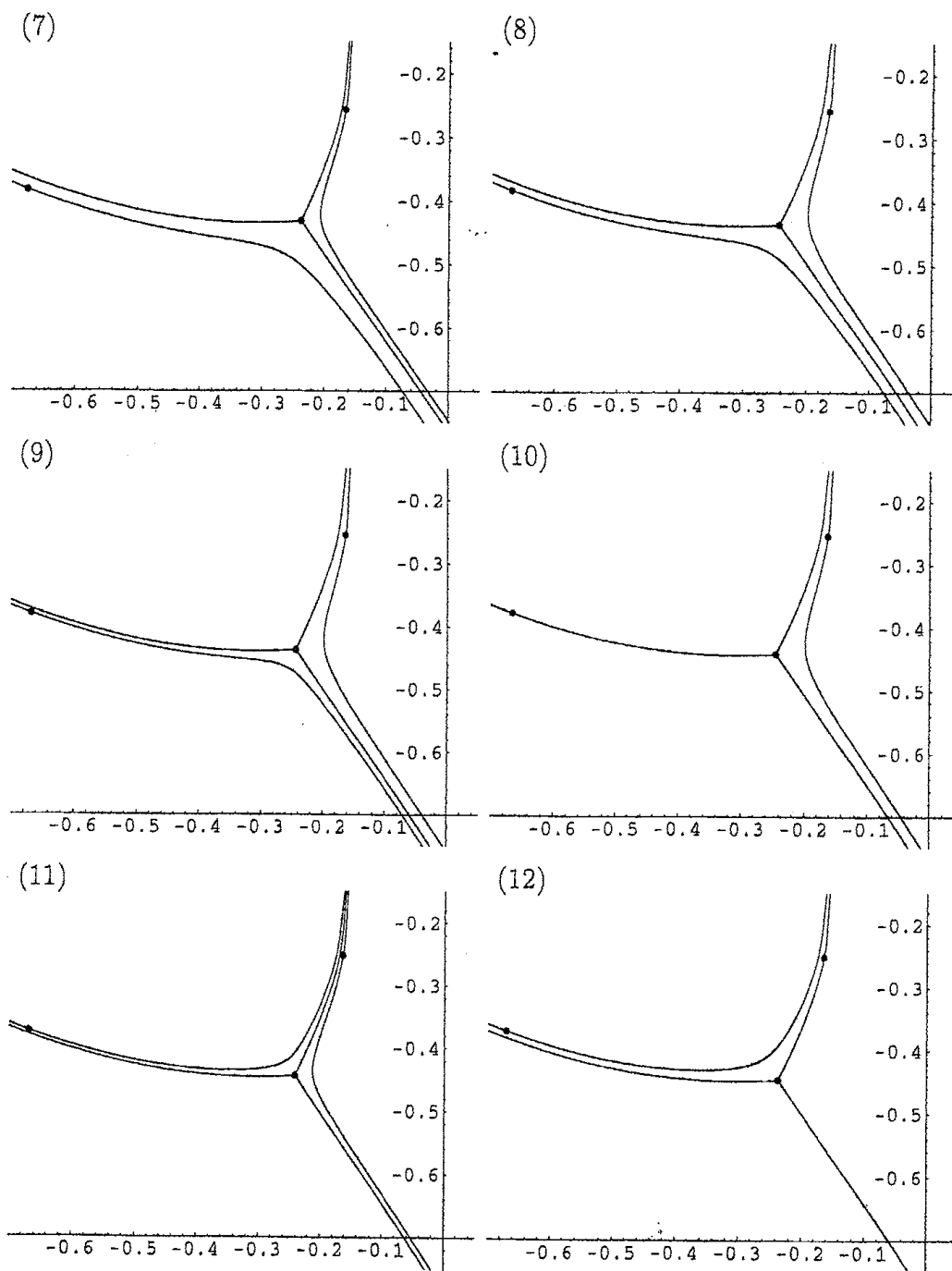


Figure 3



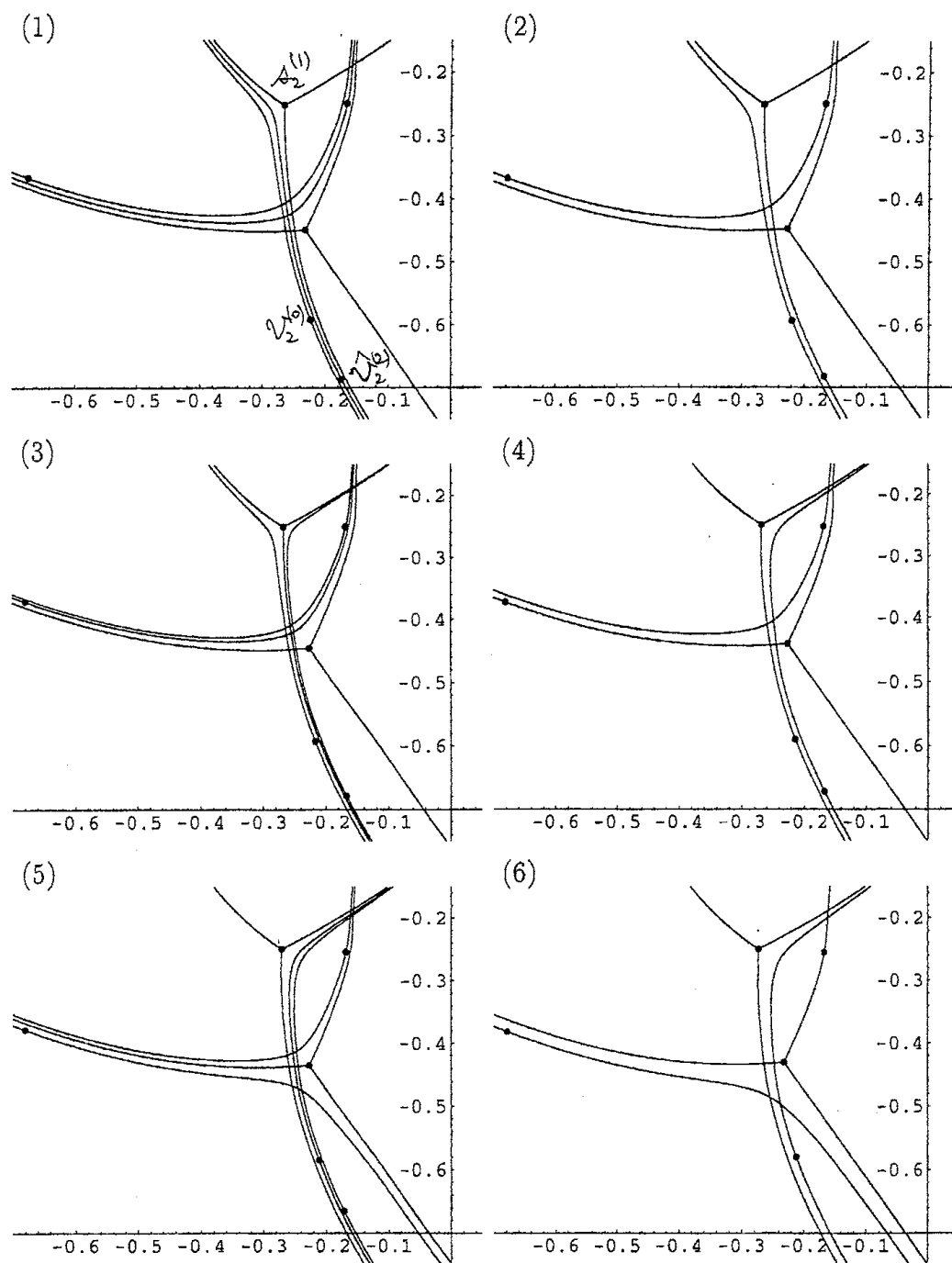


Figure 4

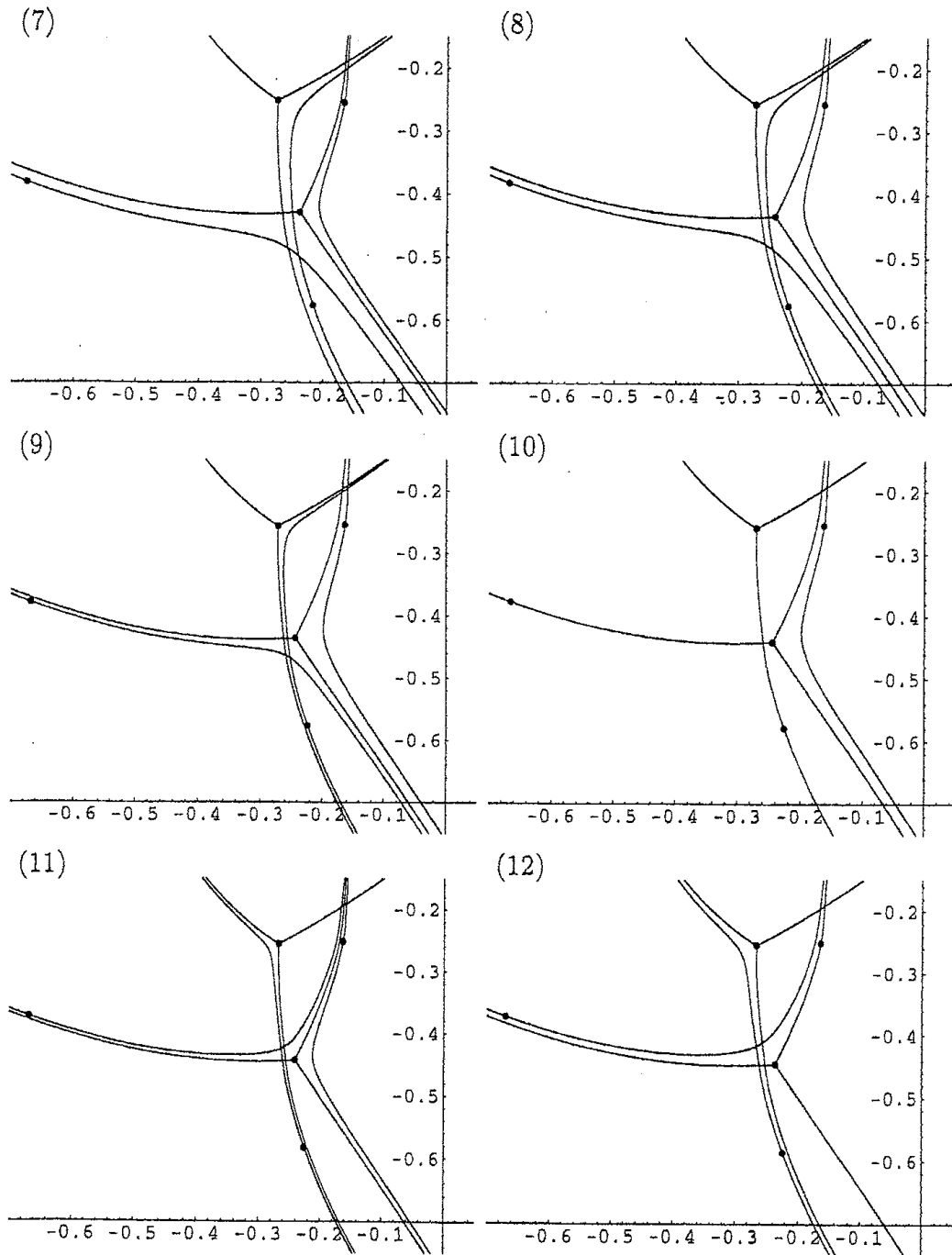


Figure 4

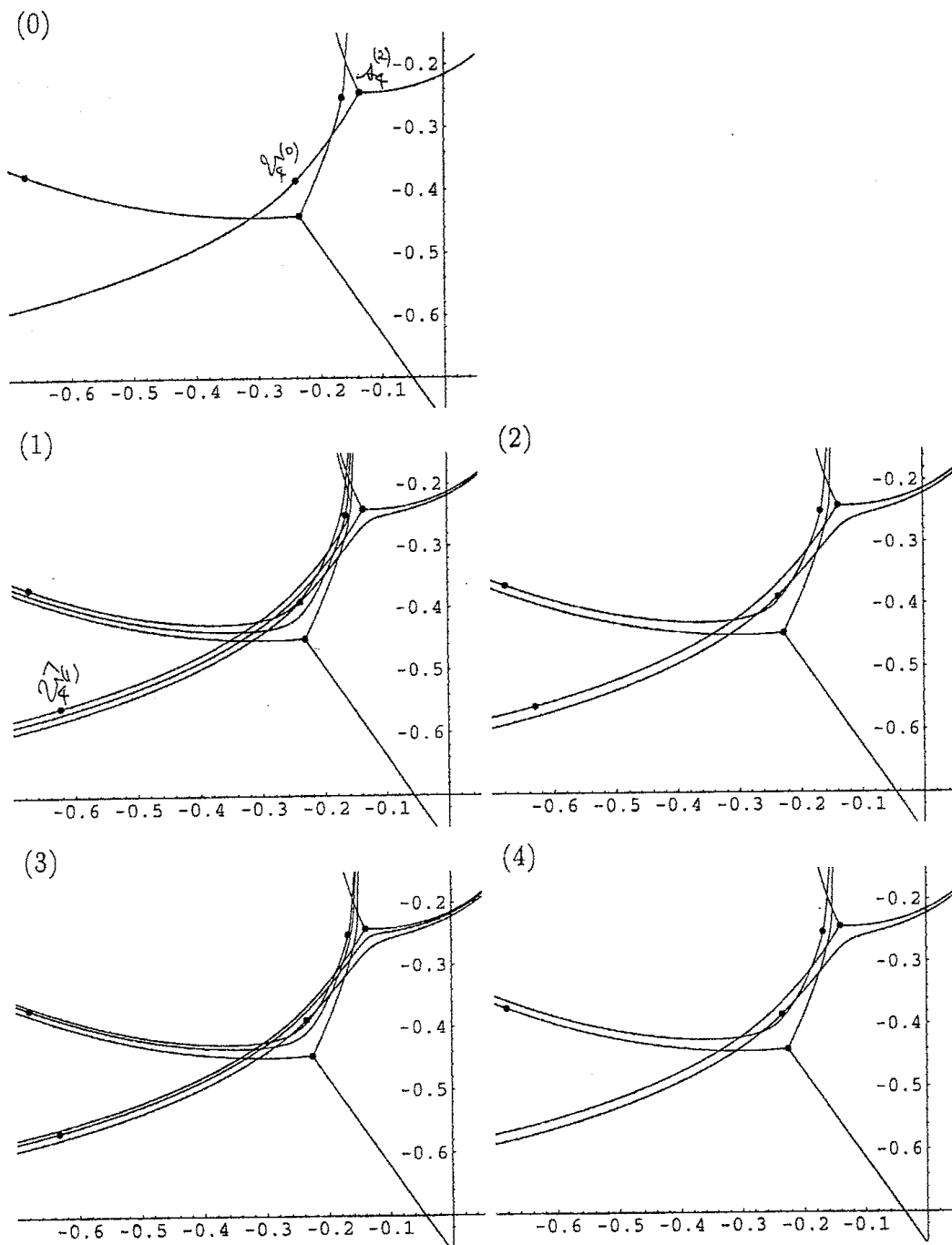


Figure 5

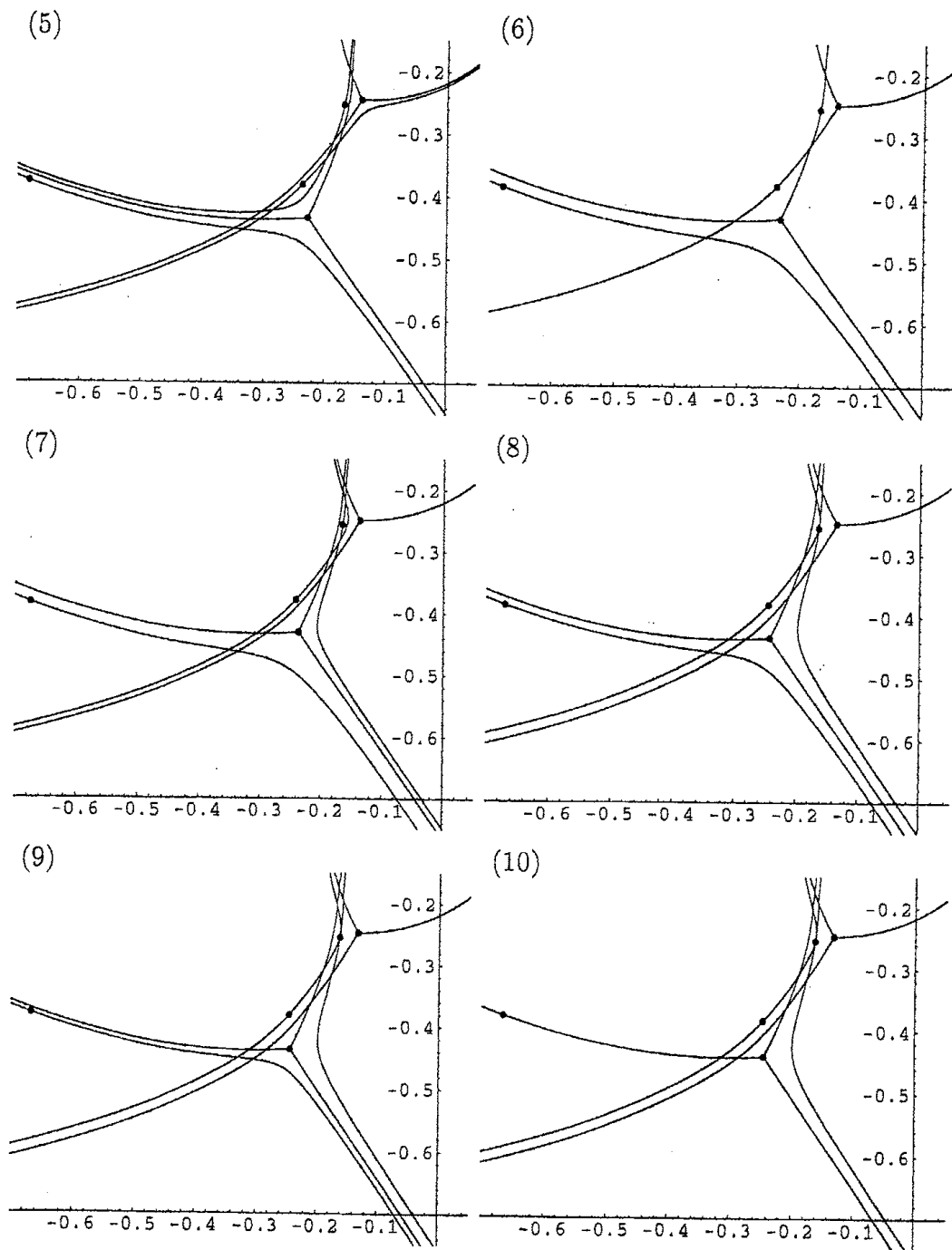


Figure 5

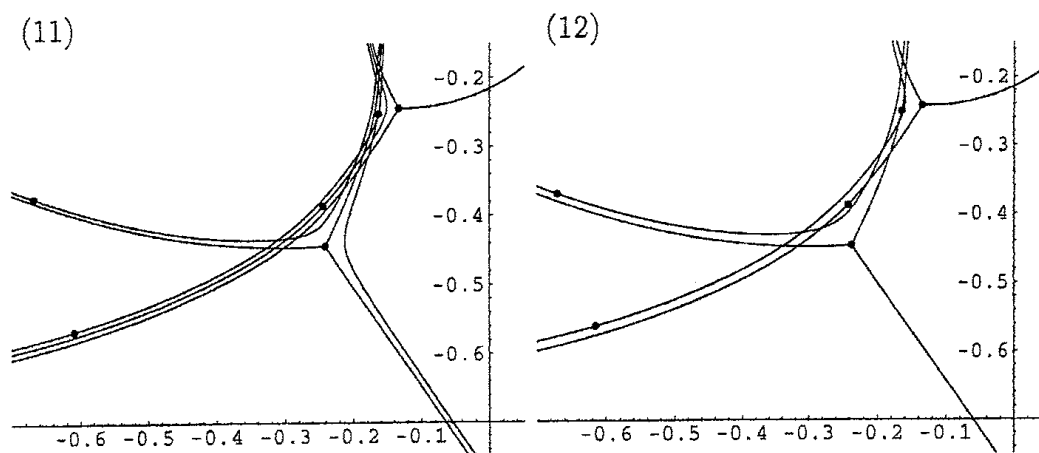


Figure 5

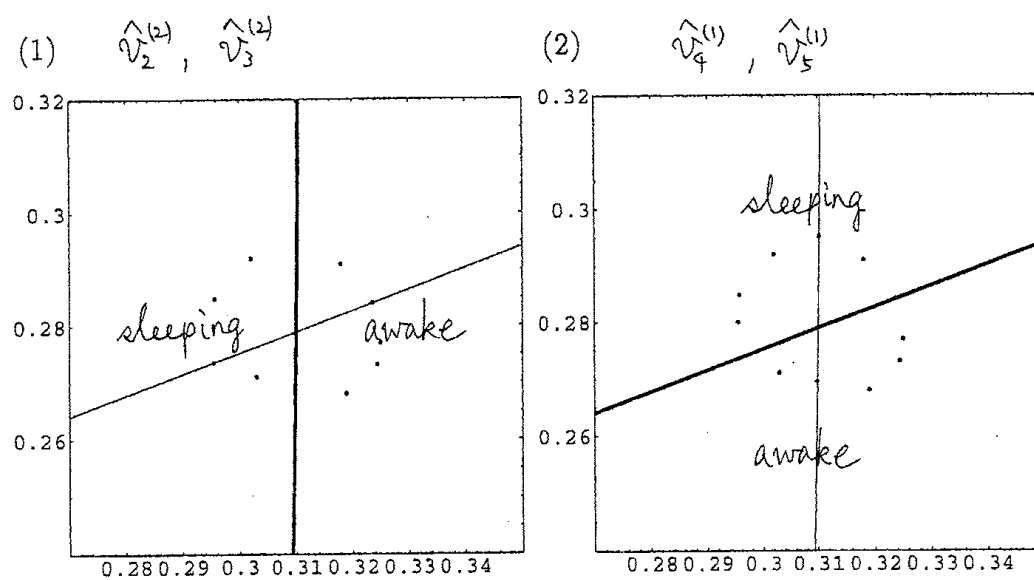


Figure 6 (t-plane)

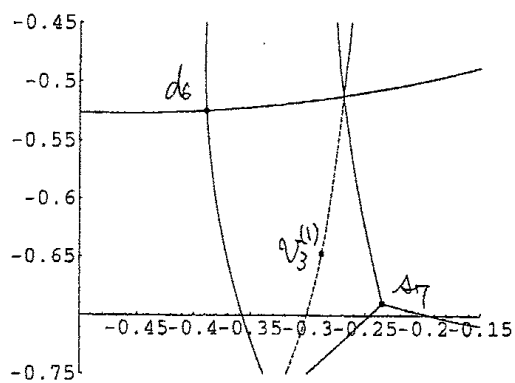


Figure 7

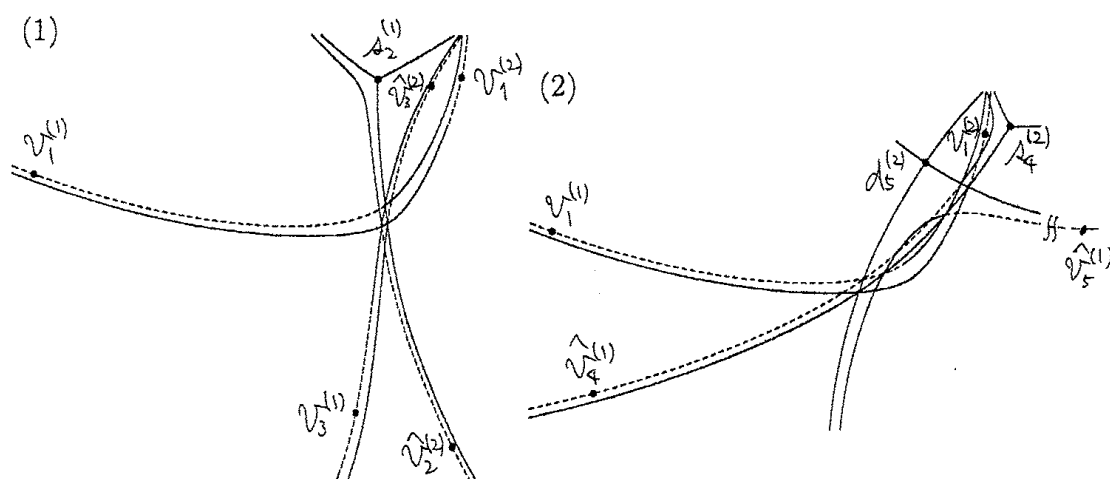
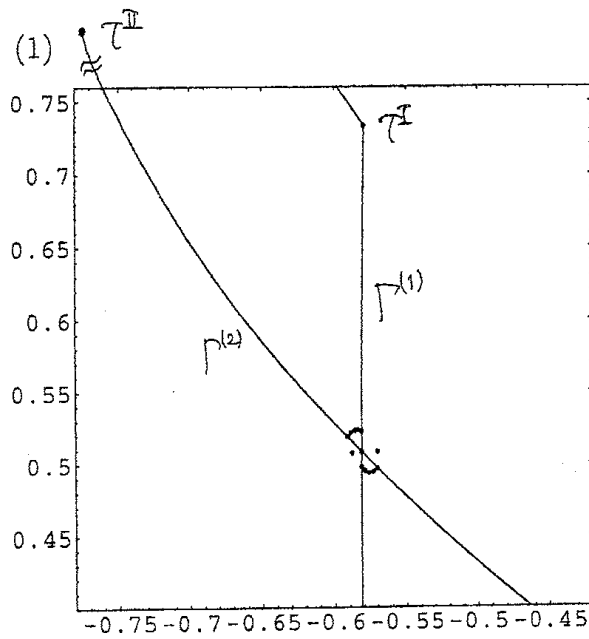
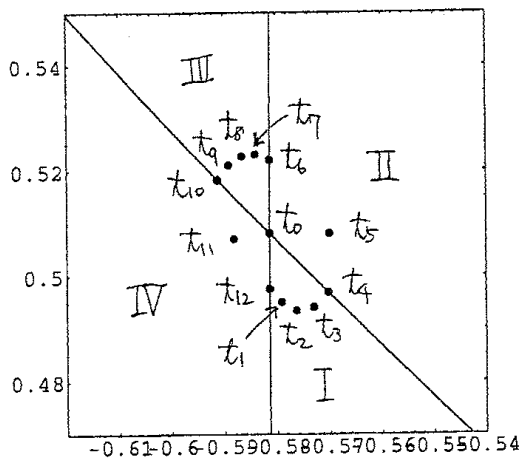


Figure 8



(2)



(3)

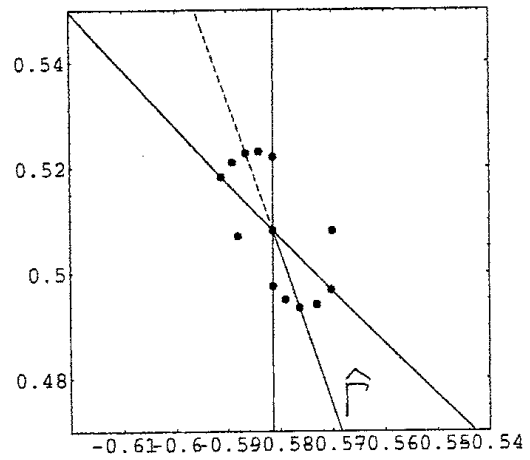


Figure 9 ( $t$ -plane)

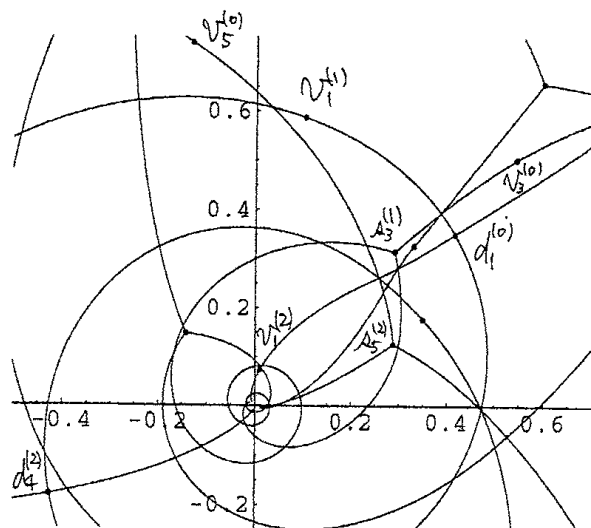


Figure 10(0)

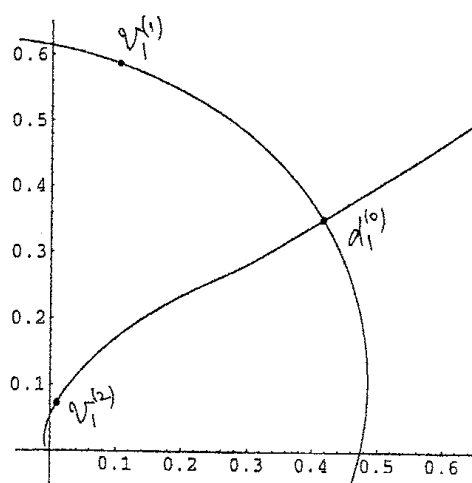


Figure 11(0)

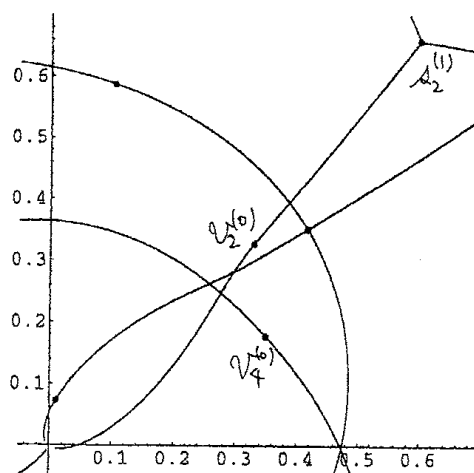


Figure 12(0)



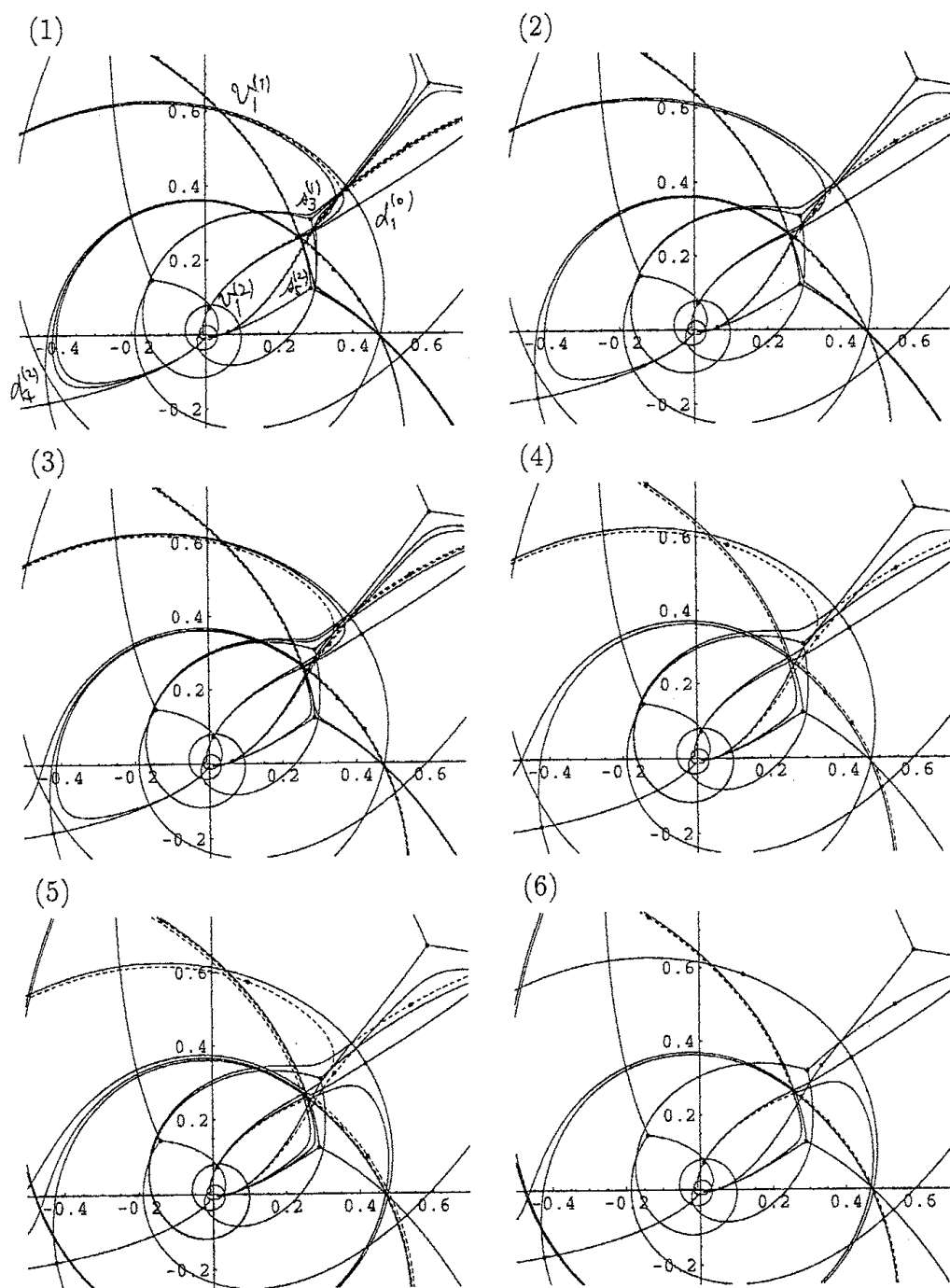


Figure 10

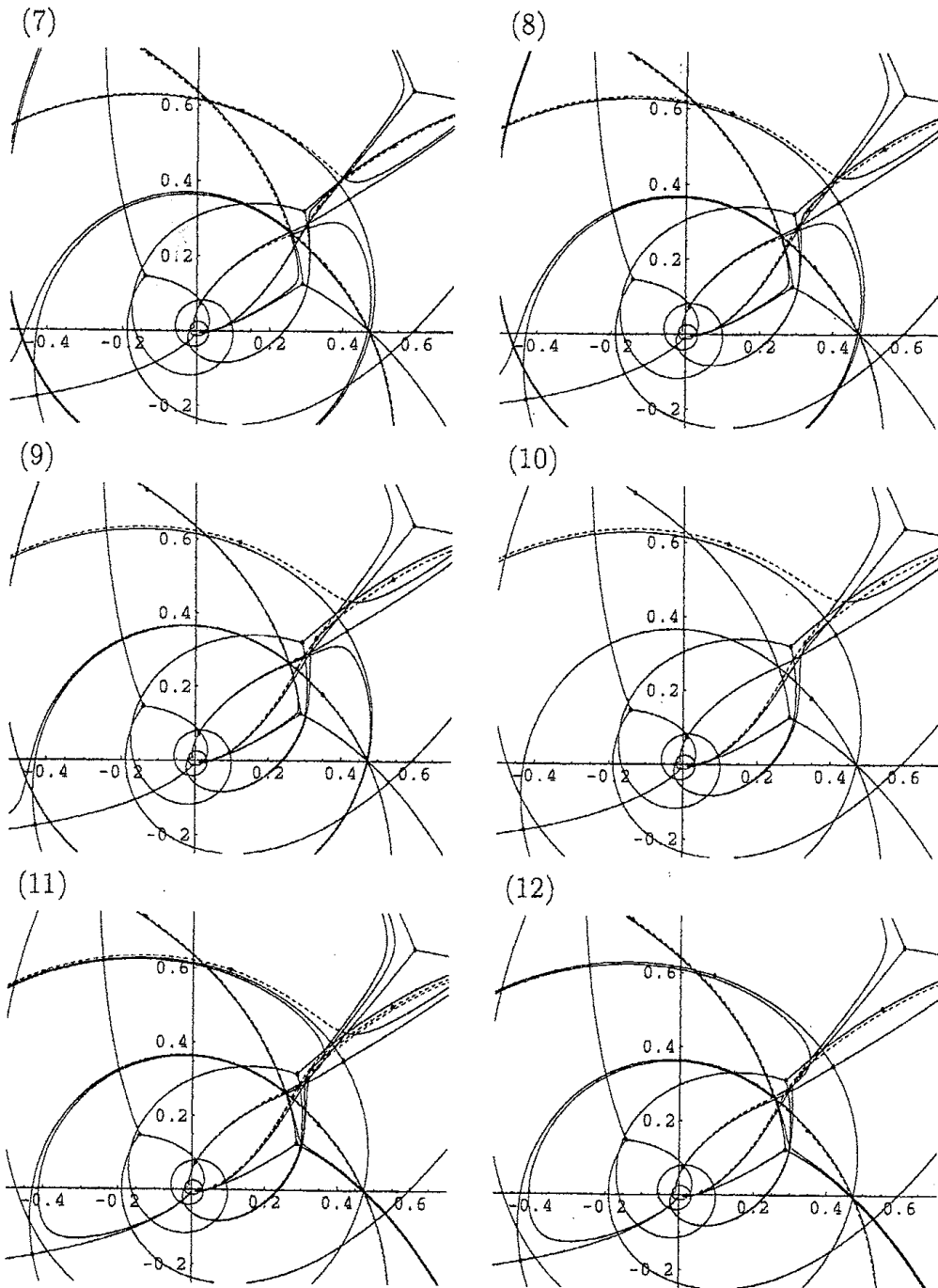


Figure 10

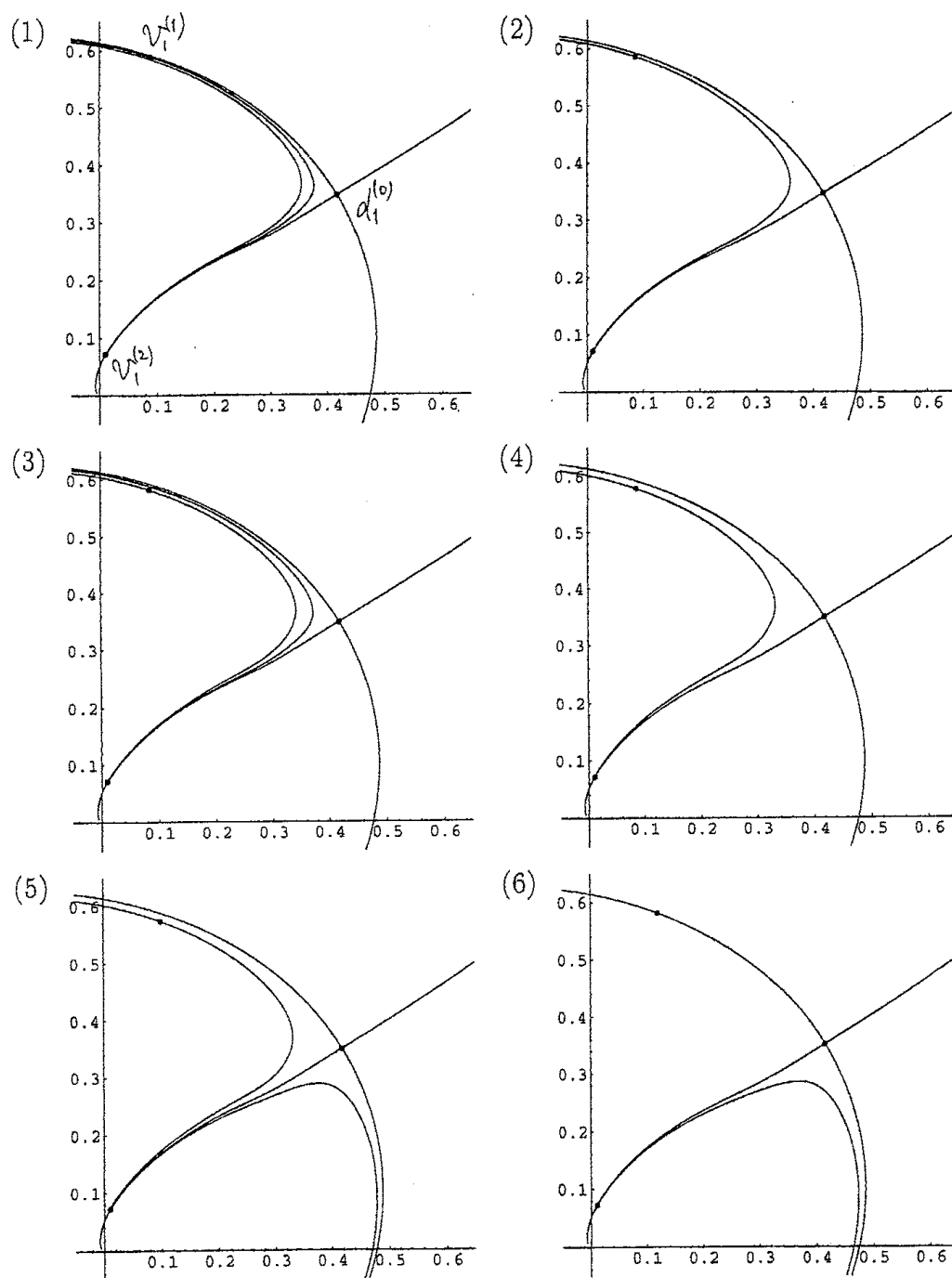


Figure 11

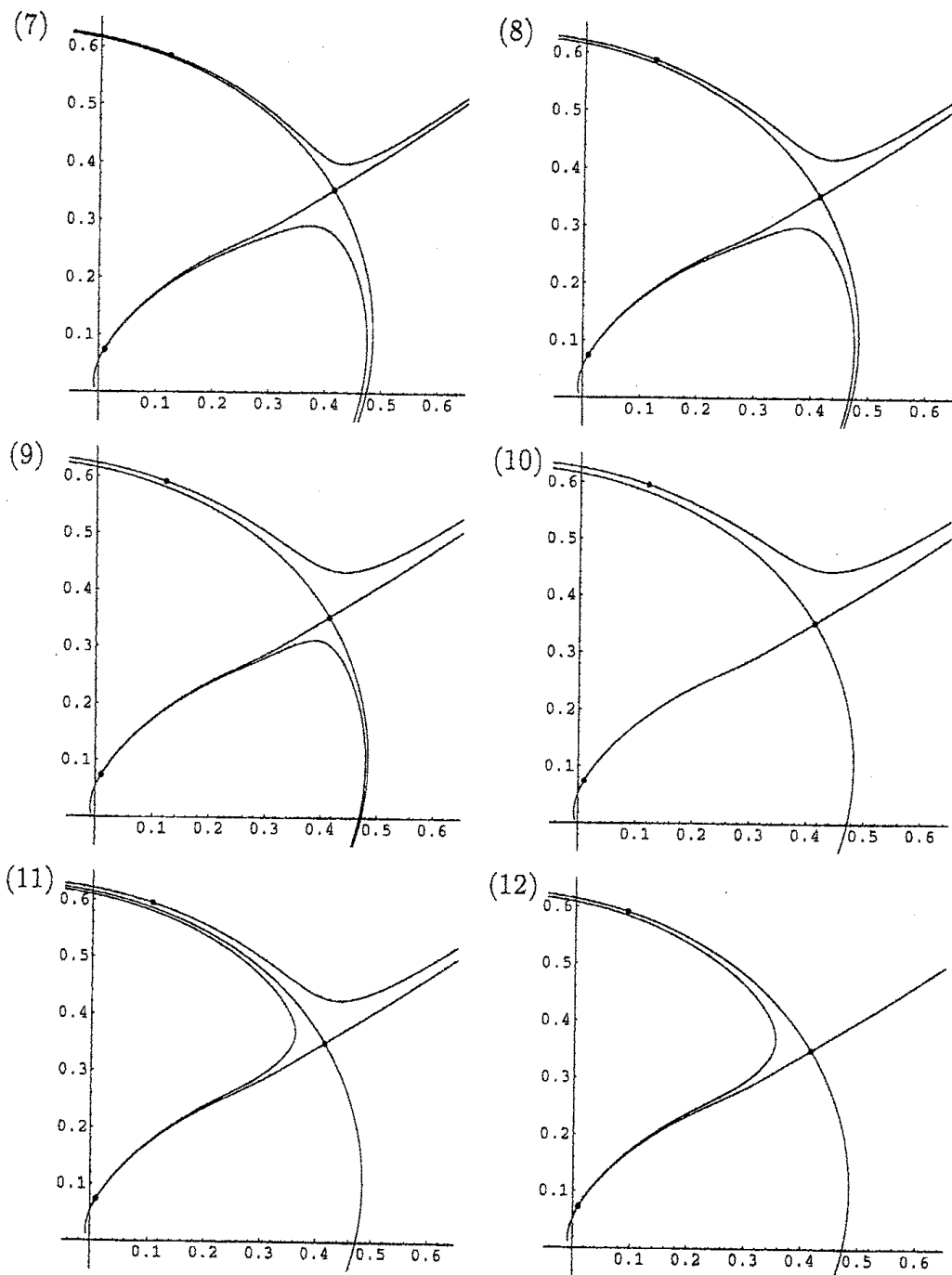


Figure 11

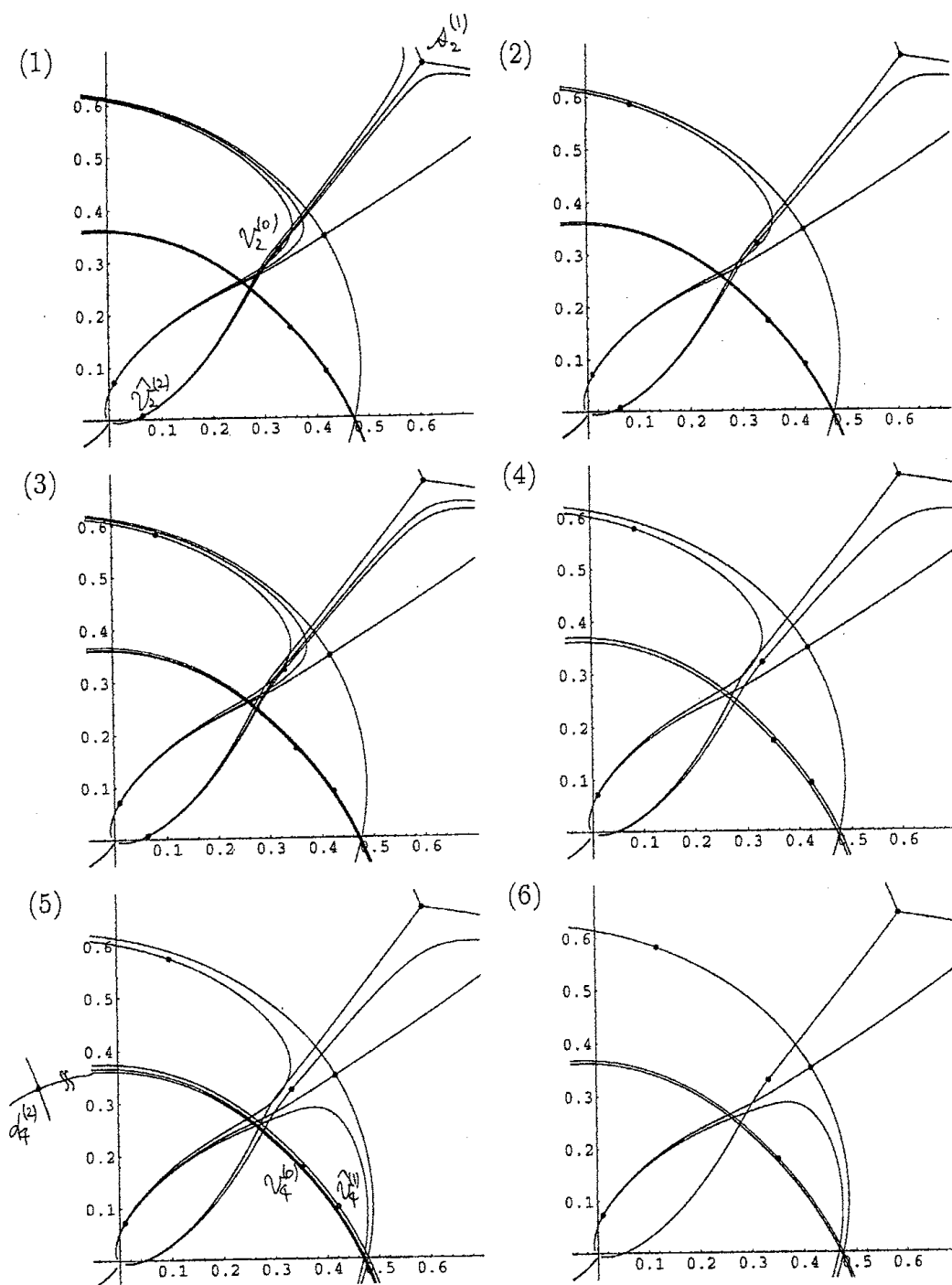


Figure 12

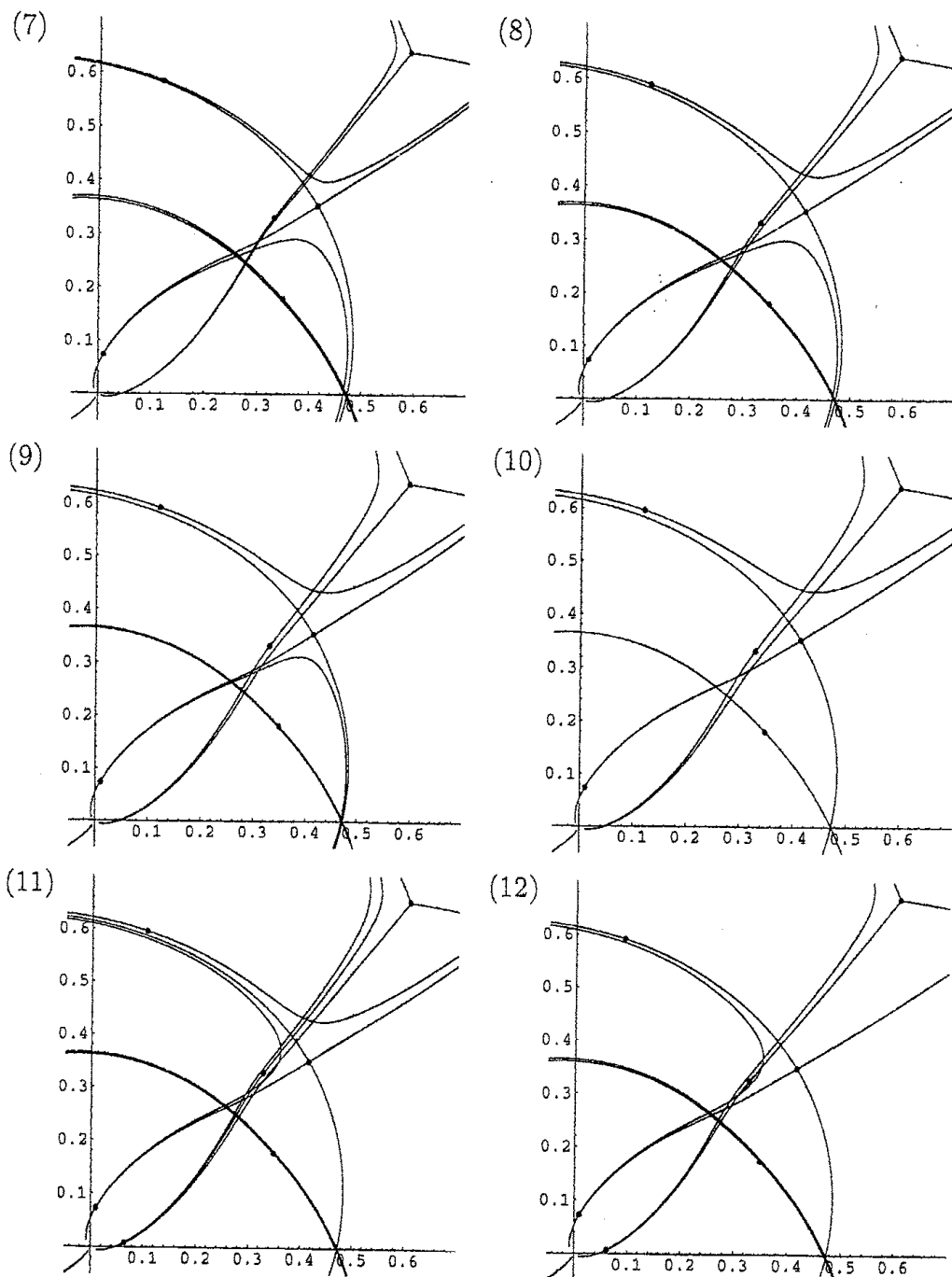
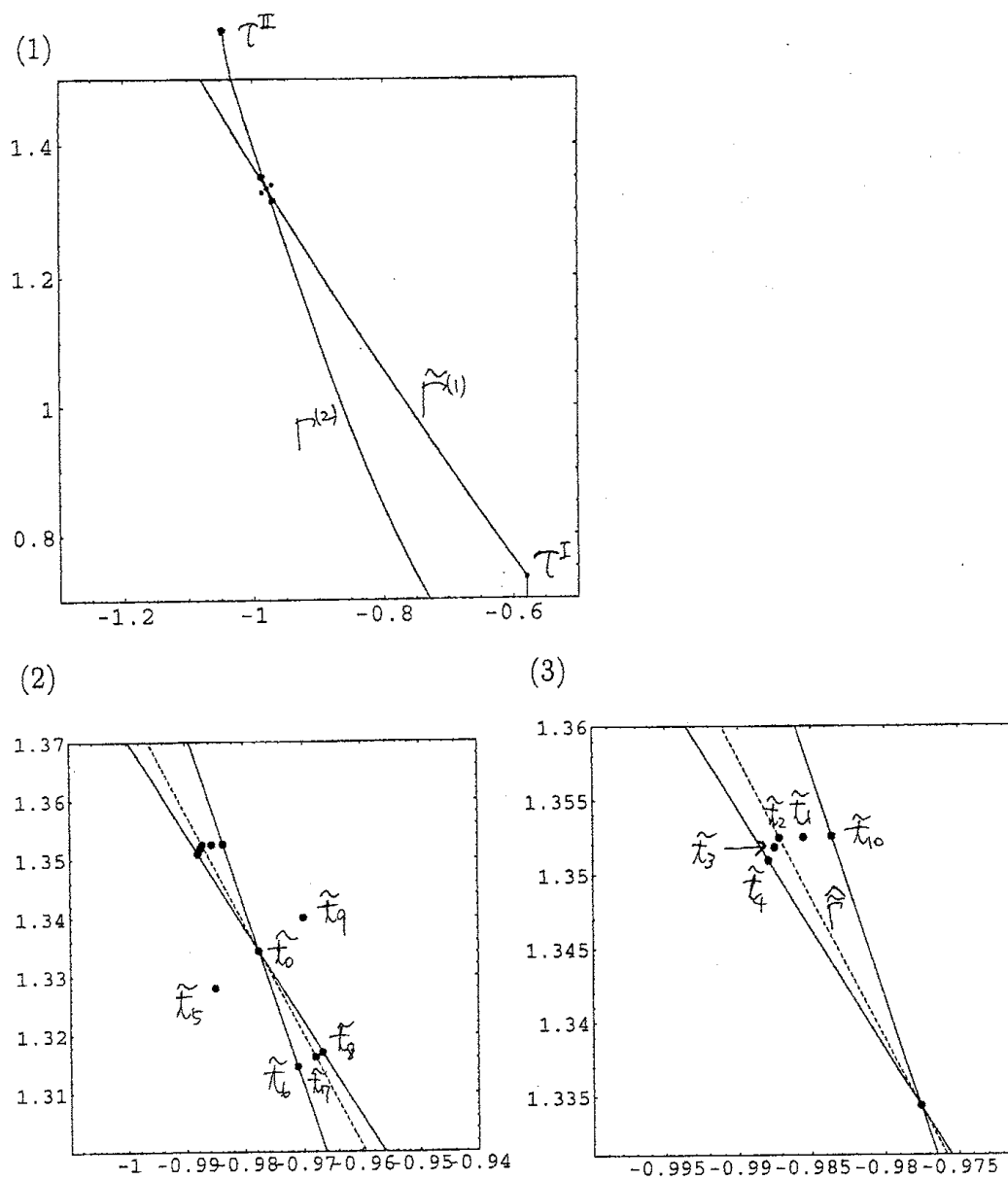


Figure 12

Figure 13 ( $t$ -plane)

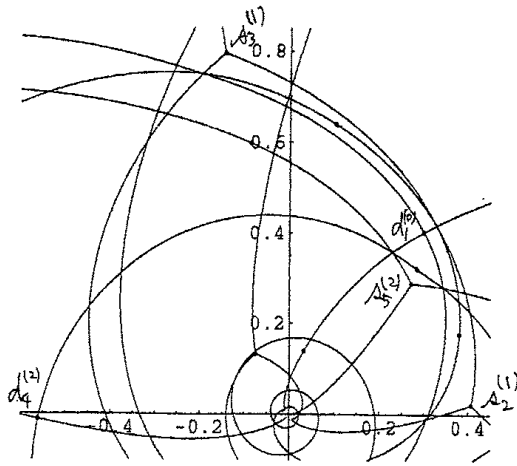


Figure 14(0)

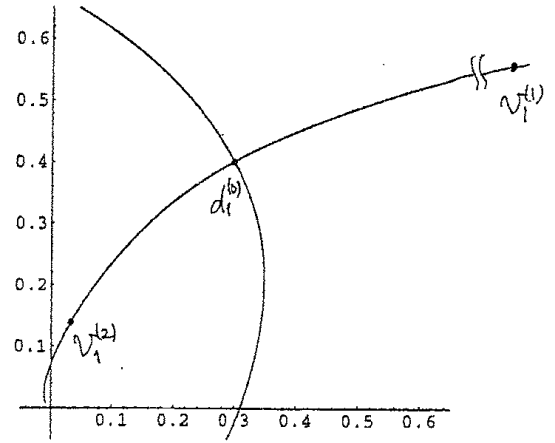
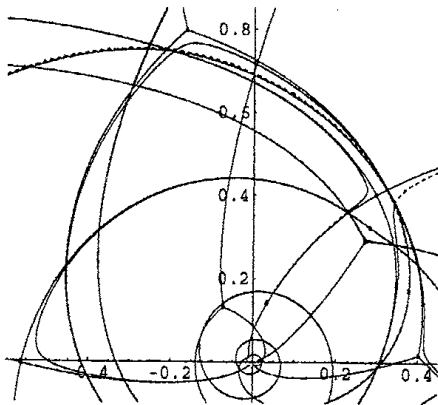


Figure 15(0)

(1)



(2)

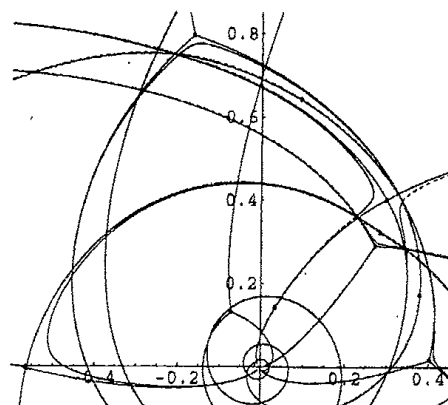


Figure 14



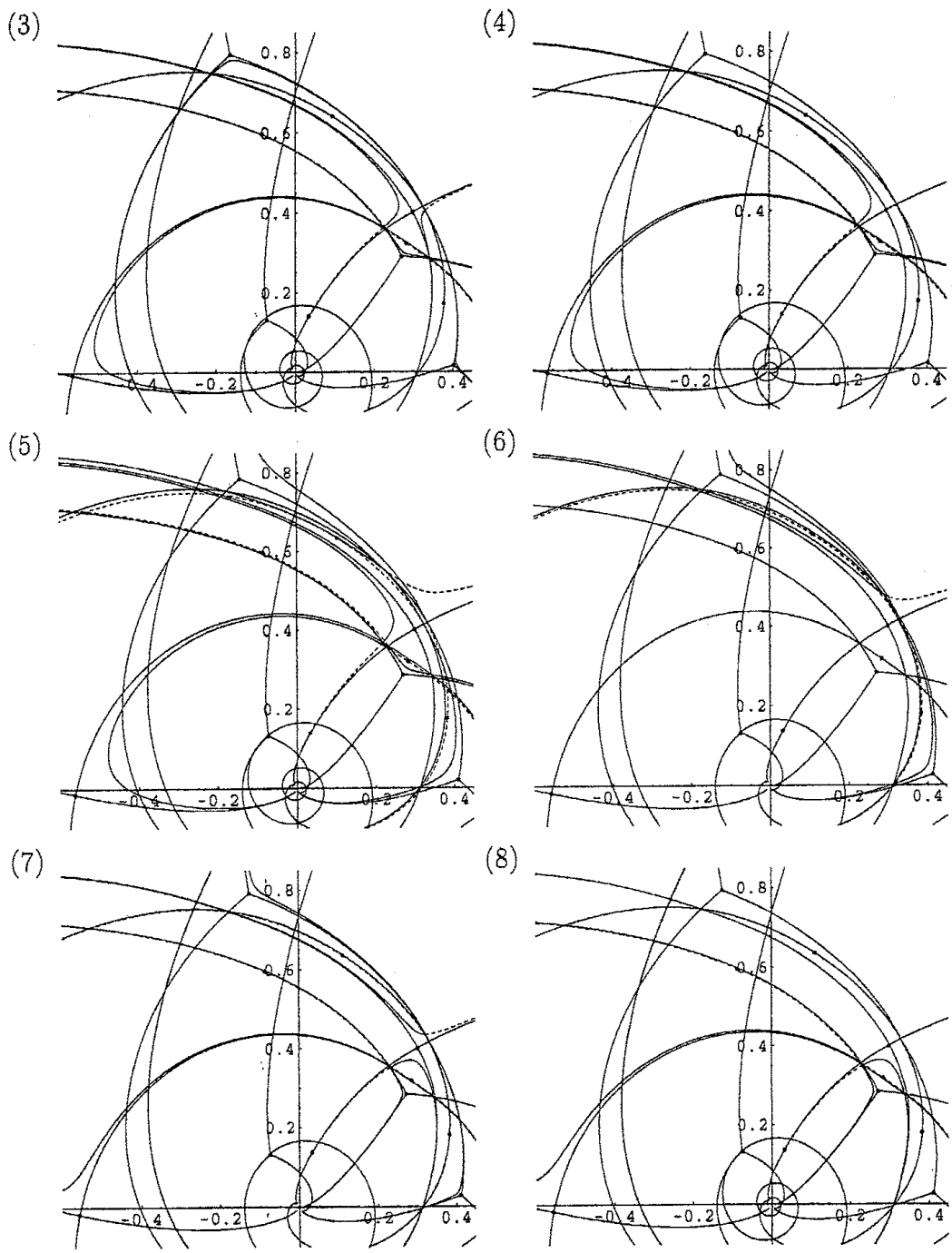


Figure 14

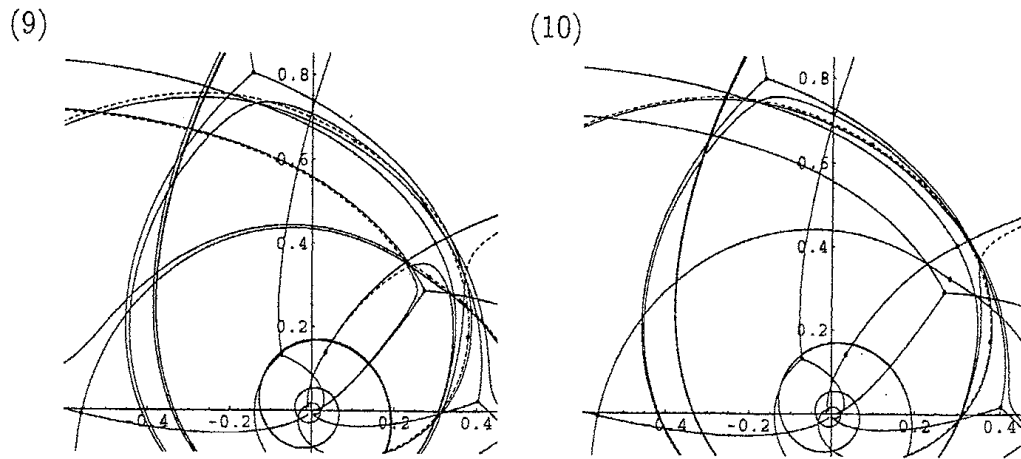


Figure 14

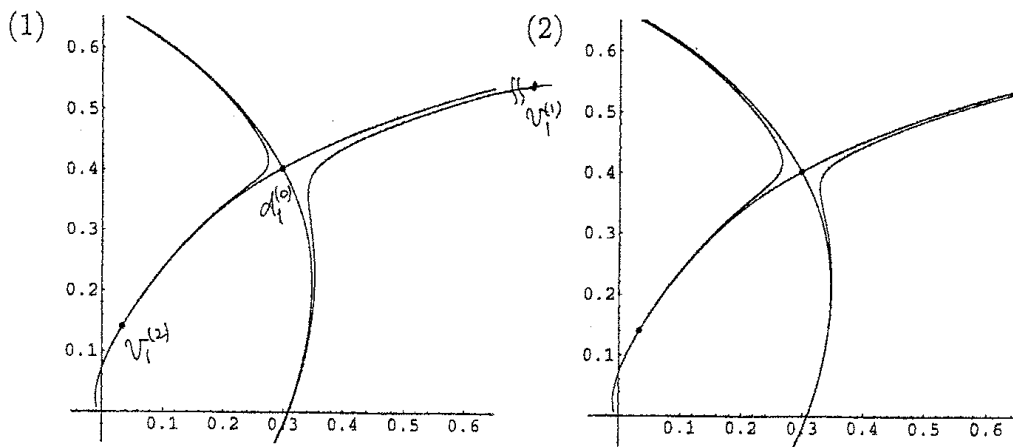


Figure 15

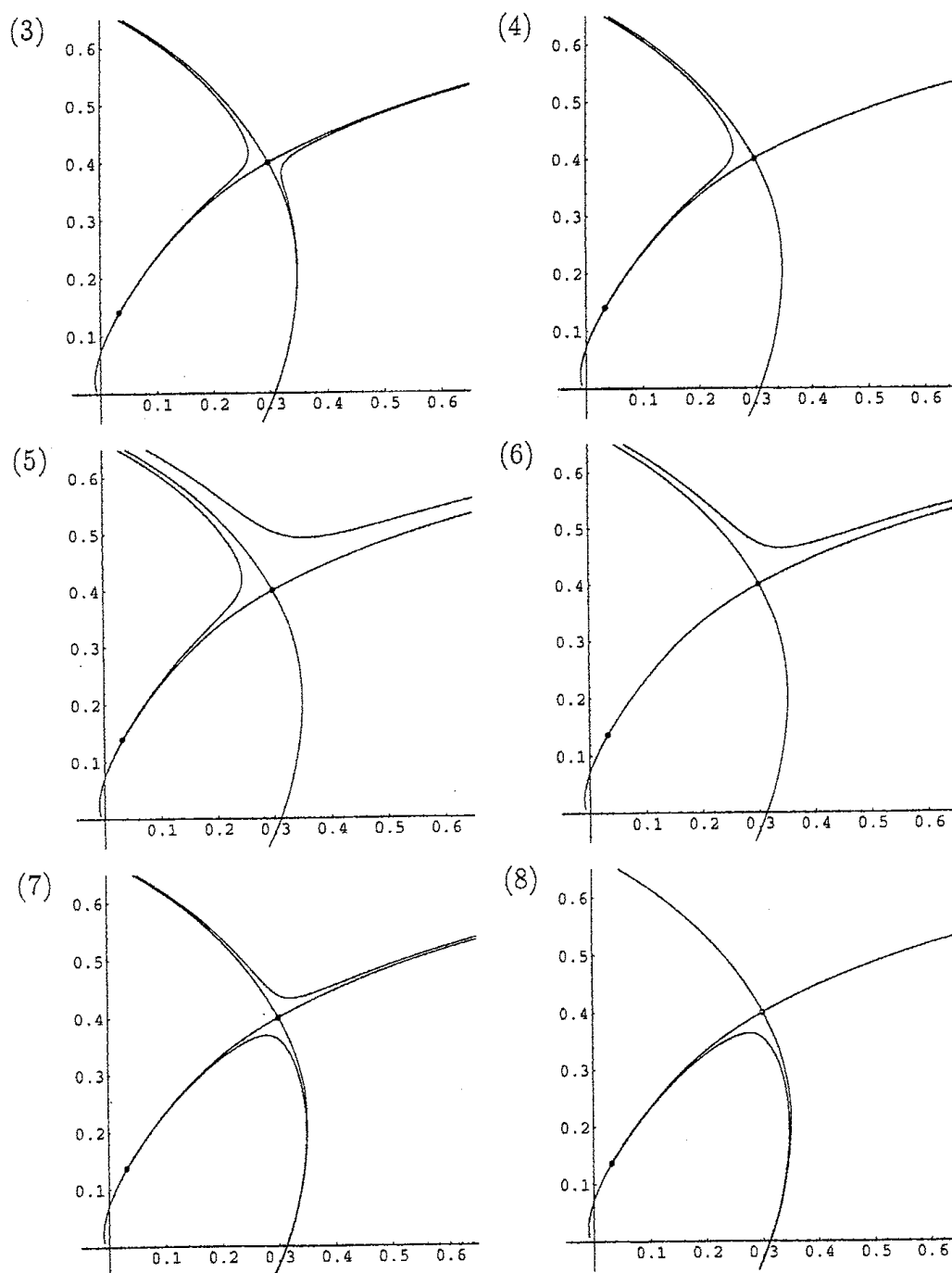


Figure 15

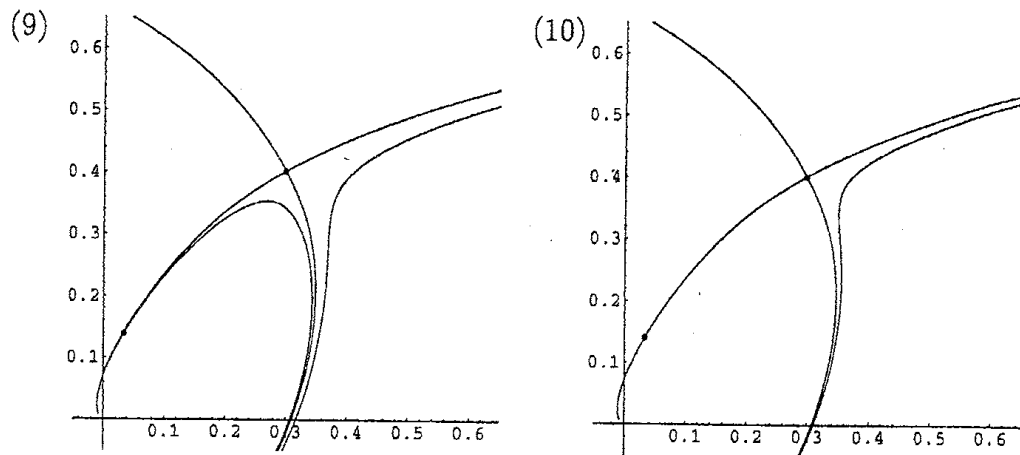
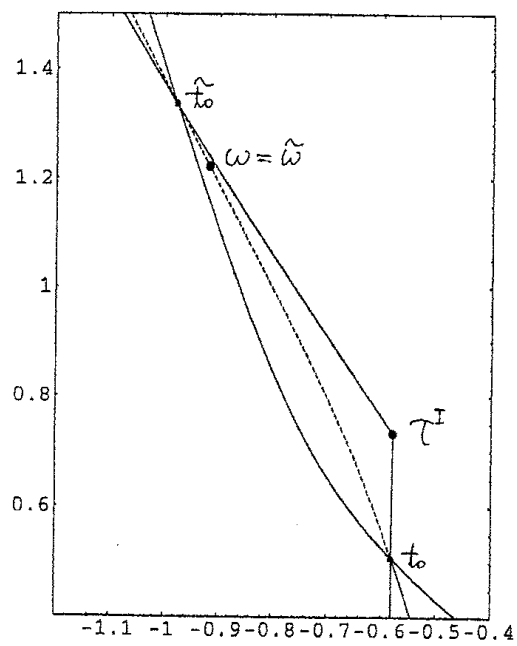


Figure 15

Figure 16 ( $t$ -plane)

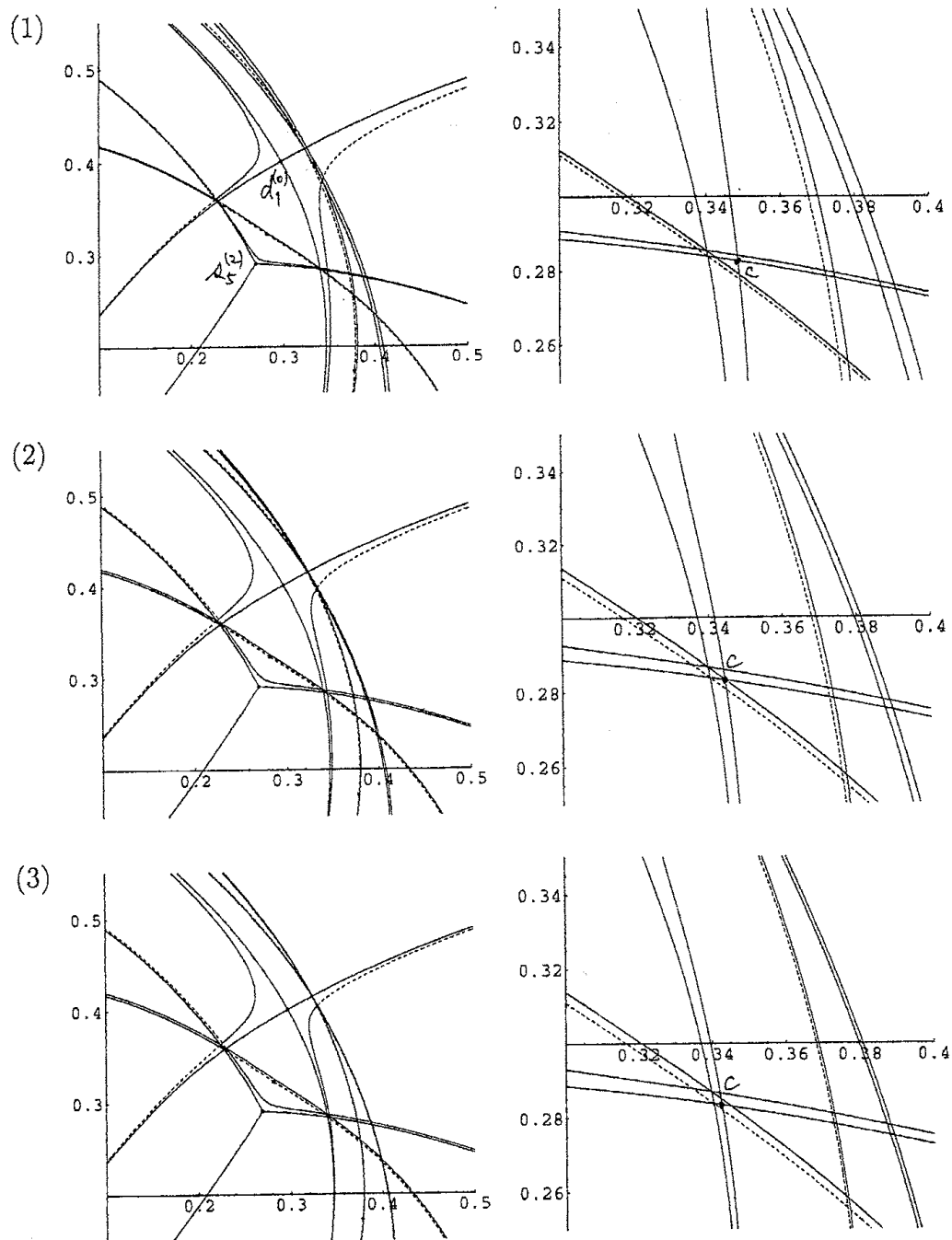


Figure 17