

位相をもったある代数

井関 清志 (Kiyoshi Iseki)

A.Tarski の high school identity については, いろいろな結果だけが, 報告されているが, それらの多くはまだ公表されていないようである. W.Taylor [8] には, いくつかの結果だけが紹介されている.

high school identity からできている HSI-algebra の公理系はつぎの恒等式だけで, 与えられている.

この代数では, 三つの binary operation $+$, $\cdot$, ベキと一つの constant 1 からなり, 公理系は

$$(1) \quad x + y = y + x,$$

$$(2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$(3) \quad x \cdot 1 = x,$$

$$(4) \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

$$(5) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$(6) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$(7) \quad 1^x = 1,$$

$$(8) \quad x^1 = x,$$

$$(9) \quad x^{y+z} = x^y \cdot x^z,$$

$$(10) \quad (x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z,$$

$$(11) \quad (x^y)^z = x^{yz}.$$

である。すなわち、HSI-algebra は $+$ と $\cdot$ に関しては、multiplicative unit 1 をもった semiring である。一方、HSI-algebra 以外、ベキについての条件 (7) ~ (11) を満たすような代数系はいままでにでてこない。重要な二項演算については、J.Jezek, T.Kerka and P.Nenec [6] にみられるが、そこにも現れていない。条件 (9), (10), (11) は R.Dedekind が「数とはなにか、なんであるべきか」になかで、ベキについて証明した三つの恒等式そのものである。

HSI-algebra は等式だけからなり、さらにベキの演算をいろいろに決めることによって、つぎの例で、示すように、従来から知られている種々の代数系を含む。したがって、この代数は category theory の対象になると同時に variety としての取り扱いも可能になる。

例 1. 正の整数、有理数、実数の集合などは、もちろん普通の演算のもとで、HSI-algebra である。

例 2. $x^y = x$ とおくことによって、ベキの概念がなくなり、積について、unit をもつ semiring になる。このことか

ら semilattice, distributive lattice, Boolean algebra などはいずれもみな HSI-algebra の特別な場合とみられる。とくに Boolean algebra では,

$$x + (-y) = x^y.$$

例 3. $+$, $\cdot$ を lattice operation とし, x^y を pseudo complement (つまり $y \wedge z \leq x \Leftrightarrow z \leq x \rightarrow y (= x^y)$) にとれば, Heyting algebra がえられる。くわしくは, たとえば, S. MacLane and I. Moerdijk [7].

例 4. finite HSI-algebra については, 元の個数が 2, 3 の場合は完全に知られている。2-element HSI-algebra は 5 個, 3-element HSI-algebra は 44 個ある。くわしいことは S. Burris and S. Lee [1].

なお HSI-algebra の条件のうち, ordinal number で成立しないものは, 前半では, 交換律 (1) と (4) である。 x^y は ordinal number theory の意味で, y の連続関数である。また

$$(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega < 2^\omega 2^\omega = \omega^2.$$

したがって, (10) は成立しない。

一般に, HSI-algebra では, 0 の存在を仮定していない。0

0 の扱いとしては,

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 0 = 0$$

とすることには, 異議はなかろう. つぎにベキについては,

もとの HSI-algebra の元 x に対しては,

$$1) \quad x^0 = 1,$$

$$2) \quad 0^x = 0$$

とすることにも, 問題はなかろう. しかし 0^0 をどのように扱うかについては, すこし考えてみる必要がある.

$$1') \quad x \neq 0 \text{ ならば } x^0 = 1 \text{ で, } 0^0 = 0,$$

$$2') \quad x \neq 0 \text{ ならば, } 0^x = 0 \text{ で, } 0^0 = 1.$$

このように 0 を含むときには, 二つの代数がえられる. しかも上の命題では, いわゆる quasi identity が顔をみせる.

ここでつぎの問題が出てくる.

問題 1. 0 を含むこれらの algebra の class は variety でない真の quasi variety をつくっているか.

topology をもった quasi variety の topology をもった場合については, D.M.Clark and P.H.Krauss [2].

HSI-algebra に, $x + y$, $x \cdot y$ および xy のいずれも二変数の関数として連続になるように, T_2 -topology を入れる.

これを topological HSI-algebra という.

いろいろなことについては, W.W.Comfort, K.H.Hofmann and

D.Remus [3], K.H.Hofmann [5].

このとき Wallace の lemma をつかうとまず

1) compact HSI-algebra X において, A, B を X の subset とする. そのとき

(1) A, B が compact ならば, A^B がまた compact である.

(2) A, B がともに connected ならば, A^B がまた connected である.

(3) A, B がともに arcwise connected ならば, A^B がまた arcwise connected である.

さらにいくつかの関連した結果がえられる.

いま HSI-algebra の条件のうち, unit 1 の存在とその条件 (7), (8)を除いてみる. この新しい代数 X を compact であると仮定する.

X の closed subset A で,

$$(a) \quad A^A \subset A$$

となるものの全体を考える. X が compact であるから, このなかに minimal closed set A で上の条件 (a) を満たすものが存在する. $x \in A$ とすれば,

$$(A^x)^{A^x} = (A^{A^x})^x \subset (A^A)^x \subset A^x.$$

よって

$$A^x = A$$

さらに $A^A = A$ がえられる。

A の任意の元 x から、はじめて、 $y^x = x$ となる y が A のなかにとれる。この y に対して、おなじようにして、 $z^y = y$ となる (A の) 元 z が取れる。これらの元からなる点列を $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ とする。この点列がある点 a に収束すれば、

$$a^a = a$$

を満足する点が得られる。

これは一般には、いえそうにない。その理由は、和や積については、結合律が成り立っているので、これを利用して、 $a + a = a$ や $bb = b$ となる元の存在が証明できる。ベキについては、結合律がない。

いままでに知られている finite HSI-algebra では、 $a^a = a$ を満たす元 a が存在するものがはるかに多い。finite Gurevic algebra では、いままでに知られている具体例では、すべてに存在する。

問題 2. HSI-algebra で、unit 1 以外に、 $a^a = a$ を満足する a (power idempotent) が存在する条件を求めよ。

ここで Gurevic algebra [4]とは、Wilkie の等式

$$(P^x + Q^x)^y (R^y + S^y)^x = (P^y + Q^y)^x (R^x + S^x)^y$$

を満足する HSI-algebra のことである。ここで、 $P(x) = 1 + x$, $Q(x) = 1 + x + x^2$, $R(x) = 1 + x^3$, $S(x) = 1 + x^2 + x^4$.

topological HSI-algebra X の 1 の component を C とすれば、 C は closed set で、さらに

$$C^2 = C = CC.$$

0 をもった topological HSI-algebra H では、 $0^2 = 0$ または 1 であるから 0 の component を D とすれば、

$$D + D = D = DD.$$

D^2 はつねに connected set である。しかしここで、 0^2 の様子で二つの場合に分かれる。

1) $0^2 = 0$ のとき。

$$0 \in D^2 \rightarrow D^2 = D + D = D = DD$$

であるから、 H の任意の元 a

$$Da \subset D$$

となり、

$$D^H = D$$

が得られる。

2) $0^2 = 1$ のとき。

D^D は C と交わる。したがって

$$D^D \subset C$$

$a \neq 0$ ならば, 1 は a^D に属する。よって $a^D \subset C$ 。したがって

$$H^D \subset C.$$

0 をもった topological HSI-algebra H において, 0 と 1 を同時に含む connected set A が存在すれば, H の任意の元 x に対して

$$x = x1 = xA$$

$$0 = x0 \in xA.$$

よって任意の元 x と 0 を含む connected set が存在する。

H はこれらの connected set の和集合である。このことから, H 自身が connected set であることがわかる。

関連した結果は Malcev の結果 [9] である。

文 献

1. S.Burris and S.Lee, Small models of the high school identities, International Jour. of Algebra and Computation, 2(1992), 139-178.

2. D.M.Clark and P.H.Krauss, Topological quasi varieties, Acta Sci. Math., 47(1984), 3-39.
3. W.W.Comfort, K.H.Hofmann and D.Remus, Topological groups and semigroups, Recent Progess in General Topology, 1992, 59-144.
4. R.Gurevic, Equational theories of positive numbers with exponentiation is not finitely axiomatizable, Ann. Pure and Applied Logic, 49(1990), 1-30.
5. K.H.Hofmann, Continuous lattices, topology and topological algebra, Topology Proceedings, 2(1977), 179-211.
6. J.Jezek, T.Kepka and P.Nemec, Distributive groupoids, Pozpravy Ceskoslovenske Akademie 91(1981).
7. S.MacLane and I.Moerdijk, Sheaves in geomerty and Logic, Springer Universitext, 1992.
8. W.Taylor, Equational logic, Houston Jour. of Math., 9(1979), 1-83.
9. A.I.Malcev, On the general theory of algebraic systems, Mat. Sb. (N.S.) 35(77)(1954), 3-20.