

強相関電子系の諸問題における、ボゾン化法、共形場理論、そして厳密解の方法

京大理 藤本聡

1 序

強相関電子系の諸問題にあらわれる量子1次元電子系や1次元系にマップできるような1不純物問題に対して、ボゾン化法、共形場理論、および可解模型の手法を用いて、低エネルギーの臨界的性質を調べる方法について解説する。ここでは特に、重い電子系と関係のある1次元の近藤格子模型と通常の1不純物近藤問題、および多重チャンネル近藤問題を中心に話しをすすめる。強い電子相関の効果をいかに理論的に扱うかは、物性の理論において非常にチャレンジングな問題であるが、量子1次元系においては、種々の厳密な結果を得る方法が知られている。1次元のハバードモデルや $s = 1/2$ ハイゼンベルグスピンモデル、supersymmetric $t-J$ モデル、1不純物近藤問題などはベータ仮説による厳密解が存在する。しかし、ベータ仮説解では1体の物理量しか計算できない点が難点であった。一方、1次元系の低励起状態をボゾン系にマップすることによって、2体以上の相関関数等を計算する方法があり、ボゾン化法として古くから知られていた。さらにボゾン化法によって得られた結果が量子1次元系において、ユニバーサルな意味を持つことが Haldane によって1981年に指摘された。彼はこの量子1次元臨界系 (massless モードが存在する系) のユニバーサリティークラスを Luttinger 液体と名づけた。彼がこの概念を提唱して、しばらく後、場の理論の分野では、共形場理論が誕生する。これは量子1次元系もしくは古典2次元系における臨界的性質、すなわち、2体以上の相関関数の臨界指数等について厳密な知見を得る方法であり、可解でないモデルに対しても適用できるところが強みである。1次元の強相関電子系に対する共形場理論の応用では、川上・梁、Frahm-Korepin による、ハバードモデルや $t-J$ モデル等に対する臨界指数の厳密な導出が有名である。ここでは、紙面の都合上、詳しくふれないが、そこで明らかにされたことは、これらの1次元電子系においては、低エネルギー状態が、電荷部分とスピン部分に分離し、それぞれセントラル・チャージ $c = 1$ のガウシアンモデル、すなわち、free boson と同じ、ユニヴァーサリティー・クラス (いわゆる Tomonaga-Luttinger 流体) に属するというのである。相関関数の長距離領域における臨界指数も、そのユニヴァーサリティー・クラスによって決定される。ここでセントラル・チャージとは量子1次元および古典2次元臨界系のユニヴァーサリティー・クラスを特徴づける量であり、大雑把に言えば、系のギャップレスモードをあらわすボゾンの自由度の数である。Haldane によって提唱された Tomonaga-Luttinger 流体という概念は、共形場理論によってミクロに基礎づけられたと言える。第2節でボゾン化法、Tomonaga-Luttinger 流体と共形場理論の関係等について説明する。

1次元の電子系はギャップレスモードが存在する限り、その低励起状態は Tomonaga-Luttinger 流体のクラスで表される。重い電子系のモデルである近藤格子モデルの1次元版も、金属相は Tomonaga-Luttinger 流体であることが知られている。これは最初、Ueda のグループによる数値計算で明らかにされ、後、ボゾン化法を使った議論でも、確認された。第3節でこれについて解説する。

1不純物近藤問題に対する共形場理論の応用としては、Affleck と Ludwig による仕事が重要である。彼らは、カレント代数と、境界のある共形場理論を用いて、通常の近藤効果における、局所フェルミ液体を再定式化するとともに、多重チャンネル近藤効果の非フェルミ液体状態における種々の物理量、比熱、帯磁率、電気抵抗の温度依存性、絶対零度における残留エントロピー、および相関関数の完全な表式等の厳密な結果を得た。さらに2不純物系に対しても、低エネルギーの固定点の性質を議論し、厳密な結果を得ている。第4節で、1不純物問題に対する彼らの理論の簡単なレビューをする。彼らの方法論は、近藤問題のスピン部分を $SU(2)$ の Kac-Moody 理論で記述するものである。不純物スピンと伝導電子の間にシングレットが形成されることによって、伝導

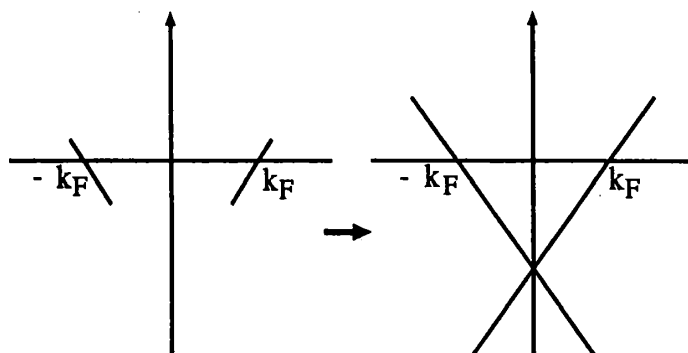


図 1: 分散関係の線形化

電子のスペクトルは変更を受ける。彼らはこの変更が、 $SU(2)$ の Kac-Moody 代数における fusion rule によって、支配されていると仮定することによって、有限サイズスペクトルを導出し、有限サイズスケールリング則を適用して、臨界指数を得ている。この有限サイズスペクトルは、また、1 チャンネルの通常の近藤問題の場合に、ペーテ仮説解から厳密に導出することができ、Affleck と Ludwig の結果を支持している。

2 Tomonaga-Luttinger 液体とボゾン化法

Haldane は、量子 1 次元系の低エネルギー状態を記述する、ユニヴァーサリティークラスとして、Luttinger 液体という概念を導入した。[1] これは、Tomonaga モデル や Luttinger モデル などの 1 次元電子系の可解模型が電子間相互作用の存在にもかかわらず自由ボゾン系にマップできることから、すべての量子 1 次元系のギャップレス励起が、これらの可解模型と同じ自由ボゾンのユニヴァーサリティークラスに属することを主張したものである。(最近では、Tomonaga-Luttinger 液体とも呼ばれる。このネーミングは勿論、Landau の フェルミ液体とのアナロジーに基づいている) 実は、Luttinger モデルの持つ普遍的な意味については、Luther と Peschel もかなり昔に指摘していたのだが、[2] 励起モードの速度の間に成り立つ、Luttinger liquid relation と呼ばれる関係式や、有限サイズスペクトルと臨界指数との間の普遍的な関係について具体的に指摘したところが Haldane の業績である。特に有限サイズスペクトルと臨界指数との間の普遍的な関係については、後に Cardy 達によって示された共形場理論における有限サイズスケールリングの結果を先取りしていたという点で注目値する。

Haldane の議論は基本的にはボゾン化法を少し拡張したものである。以下で簡単にボゾン化法についてまとめておく。

2.1 アーベルボゾン化法について

通常のボゾン化法は $U(1)$ の対称性をもったボゾンでフェルミオンをあらわすので、アーベルボゾン化法と呼ばれる。[3] ボゾン化法の基本は、フェルミ面の近傍で、分散関係を線形化し、それを無限大のエネルギーのところまで引き延ばすところにある (図 1)。電子の演算子を 2 つのフェルミ点に対応した右向きと左向きの成分に分離して、 $c_s(x) = \exp(k_F x) c_{sL}(x) + \exp(-k_F x) c_{sR}(x)$ と書く。($s = \uparrow, \downarrow$) これらのフェルミオンの演算子に対して、位相場、 $\phi_{sL(R)}$ を導入し、 $c_{sL} = \exp(i\sqrt{4\pi}\phi_{sL})$ 、 $c_{sR} = \exp(-i\sqrt{4\pi}\phi_{sR})$ とする。分散関係を無限大のエネルギーのところまで引き延ばしたために、2 つの演算子の距離が近くなると紫外発散が生じる。この帰結として、位相場の間の交換関係が導か

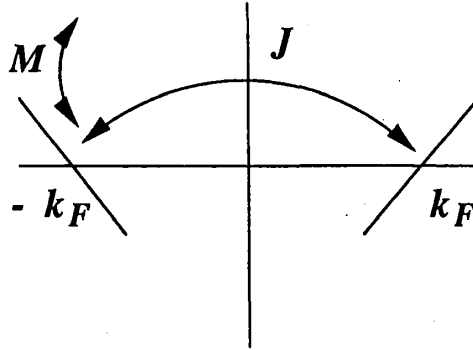


図 2: Tomonaga-Luttinger 液体の Topological 励起

れ、 $[\phi_{sL}(R)(x), \phi_{sL}(R)(x')] = (-)i \text{sgn}(x-x')/4$ 、 $[\phi_{sL}(x), \phi_{sR}(x')] = i/2$ となる。さらに電荷とスピンの自由度に対応した位相場、 $\phi_{\rho L}(R) = (\phi_{\uparrow L}(R) + \phi_{\downarrow L}(R))/\sqrt{2}$ 、 $\phi_{\sigma L}(R) = (\phi_{\uparrow L}(R) - \phi_{\downarrow L}(R))/\sqrt{2}$ を導入すると、電荷とスピンの自由度を分離して表すことができる。これらの位相場を使って、ハミルトニアンは、次のように表される。

$$H = \int dx \left[\frac{v_{\rho}}{2K_{\rho}} (\partial_x \phi_{\rho})^2 + \frac{v_{\rho} K_{\rho}}{2} \Pi_{\rho} \right] + \frac{g_1}{\alpha} \int dx \cos(\sqrt{8\pi} \phi_{\rho} + (4k_F - G)x) \\ + \int dx \left[\frac{v_{\sigma}}{2K_{\sigma}} (\partial_x \phi_{\sigma})^2 + \frac{v_{\sigma} K_{\sigma}}{2} \Pi_{\sigma} \right] + \frac{g_2}{\alpha} \int dx \cos(\sqrt{8\pi} \phi_{\sigma}). \quad (1)$$

ここで v_{ν} ($\nu = \rho, \sigma$) は電荷とスピンの励起の速度、 $\phi_{\nu} \equiv \phi_{\nu L} + \phi_{\nu R}$ 、 $\Pi_{\nu} \equiv \partial_x \theta_{\nu}$ 、 $\theta_{\nu} \equiv \phi_{\nu L} - \phi_{\nu R}$ である。1 行目の cosine 項は Umklapp 散乱の寄与で half-filling からずれたとき ($4k_F \neq G$) には、振動項のために、低励起に効かなくなる。2 行目の最後の項は後方散乱からの寄与で、スピン部分に $SU(2)$ の対称性があるとき、低エネルギーで無視できる。したがって、低励起状態は残りのガウシアンモデルで記述され、相互作用の効果は、 v_{ν} と K_{ν} の値の繰り込むとして取り入れられる。 v_{ρ} と v_{σ} は相互作用の効果によって異なった値を取るのも、電荷とスピンの自由度はそれぞれ分離して、各々 free boson で記述されることになる。簡単に言うとボゾン化法とは、massless モードが存在する場合に、そのモードの自由度の数だけボゾンを用意して、それによって、低励起状態を記述する方法なのである。このボゾンの非ゼロモードは particle-hole 励起に対応している。ゼロモードは Haldane によって topological 励起と呼ばれ、特別な意味を持つ。 ϕ_{ν} の zero-mode は 1 次元フェルミ系の 2 つのフェルミ点に粒子を付与したり、抜き取ったりする励起の数をあらわし、 θ_{ν} のゼロモードは一方のフェルミ点から他方のフェルミ点に粒子を移動する励起の数をあらわす。(図 2) これらのゼロモードをそれぞれ、 M_{ν} 、 J_{ν} とすると、有限サイズのエネルギースペクトルは M_{ν} 、 J_{ν} を用いて次式のように表される。

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \left[v_{\rho M} M_{\rho}^2 + v_{\rho J} J_{\rho}^2 + v_{\sigma M} M_{\sigma}^2 + v_{\sigma J} J_{\sigma}^2 \right], \quad (2)$$

この M_{ν} と J_{ν} はフェルミ統計の要請から $(-1)^{N_s} = -(-1)^{J_s + M_s}$ ($s = \uparrow, \downarrow$ 、 N_s はスピン s の電子の総数) という条件を満たしている。すなわち、スピンと電荷の自由度は分離しているが、それぞれの量子数の選択則は統計性の要請で関係づけられているのである。 $v_{\rho M}$ 、 $v_{\rho J}$ はそれぞれの励起の速度である。上記のハミルトニアンのパラメータとの関係は、 $v_{\rho J} = v_{\rho} K_{\rho}$ 、 $v_{\rho M} = v_{\rho}/K_{\rho}$ である。この $v_{\rho J}$ と $v_{\rho M}$ の間には、 $v_{\rho J} v_{\rho M} = v_{\rho}^2$ という Luttinger liquid relation と呼ばれる関係が成り立つ。また、スピンの自由度に $SU(2)$ 対称性が存在する場合には、スピンの自由度に対応したガウシアンモデルのパラメータ K_{σ} が $K_{\sigma} = 1$ に固定される。

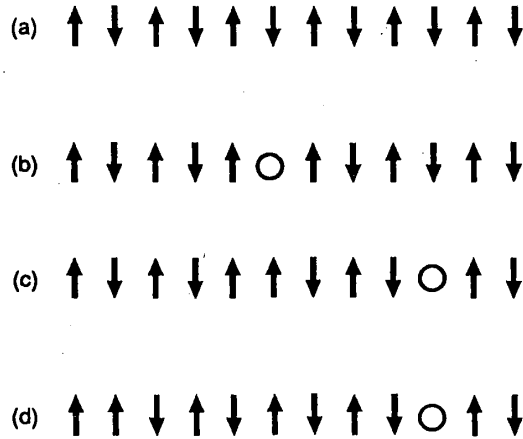


図 3: $U \rightarrow \infty$ の系にホールをドーピングしたときのスピノンとホロンへの分離。同じ向きのスピンの隣合わせに並んでいる部分がスピノン、孔の部分がホロンである。

ガウシアンモデルの相関関数は容易に計算できて、すべて巾の振舞いを示す。この臨界指数が上記の有限サイズスペクトルと関係していることは、共形場理論における有限サイズスケールリングの議論から明らかになる。

電荷とスピンの自由度の励起を Anderson の提唱した RVB 状態とのアナロジーから、それぞれホロン、スピノンと呼ぶのが慣習になっている。もとの電子系のフェルミ面を k_F とすると、ホロンとスピノンはそれぞれ、“フェルミ面”、 $2k_F$ 、 k_F を持つ。ここで言う“フェルミ面”とは運動量分布関数に特異性が現れる点のことである。Luttinger 液体では運動量分布にフェルミ液体に見られるような k_F での飛びはないが、巾異常の現れる点として“フェルミ面”を定義することができる。さらにこの“フェルミ面”に対して、Luttinger sum rule と同様に、sum rule が成り立つ。このことは、後述するように 1 次元の近藤格子模型における“フェルミ面”の大きさを議論する上で重要である。

1 次元系において電子がホロンとスピノンに分離することは、 $U \rightarrow \infty$ の強相関の極限で考えると理解しやすい。具体的なイメージを描くために量子ゆらぎの効果をしばらく忘れると、ハーフフィリングならば、図 3 (a) で示したように上向きスピンと下向きスピンの交互に並んだ状態になる。これにホールを導入する (図 3 (b)) と、ホールは動いてホロンとなる。ホールが動くと上向きスピンの隣合わせに並んだ部分が生じるので (図 3 (c))、これが動いてスピノンとなる (図 3 (d))。ただし、この説明は、量子揺らぎの効果を無視した極端に単純化されたものであることを注意しておく。実際には、空間的に広がった電荷とスピンの密度揺らぎが、それぞれ異なった速度を持って運動しているという描像に近いと考えられる。

この小節の最後に、Tomonaga-Luttinger 液体のバルクな性質についてまとめておく。比熱 γ 、スピン帯磁率 χ_s 、電荷帯磁率 χ_c はそれぞれ、ホロンとスピノンの速度 v_ρ 、 v_σ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{v_\rho} + \frac{1}{v_\sigma} \right), \\ \chi_s &= \frac{1}{2\pi v_\sigma}, \\ \chi_c &= \frac{2K_\rho}{\pi v_\rho}.\end{aligned}\tag{3}$$

1 次元ハバードモデルではベレーテ仮説解から、 γ 、 χ_s 、 χ_c を求めることができるので、これより

逆に Luttinger 液体のパラメーター v_F , v_F , K_F を知ることができる。[4]

2.2 共形場理論から見た Tomonaga-Luttinger 液体

通常の相転移理論によれば、転移近くにおける臨界系ではスケール不変性が仮定される。この仮定をさらに強めて局所的なスケール不変性を仮定することが、共形場理論の基礎である。局所的なスケール不変性が共形不変性に他ならない。古典 2 次元系および量子 1 次元系 (1+1 次元) においては、共形不変性の帰結として Virasoro 代数という無限個の生成子を持った、無限次元リー代数の対称性が存在することになる。この無限次元の対称性が、2 体以上の相関関数の臨界指数を完全に決めてしまう。共形場理論において基本的役割を果たすのは、共形変換 $z \rightarrow w(z)$, $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$ ($z = x + it$, $\bar{z} = x - it$) のもとで、次のように変換されるプライマリー場である。

$$\Phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^\Delta \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}} \Phi(w, \bar{w}). \quad (4)$$

ここで $(\Delta, \bar{\Delta})$ はプライマリー場の共形次元と呼ばれ、プライマリー場の相関関数は、

$$\langle \Phi(z, \bar{z}) \Phi(0, 0) \rangle = \frac{1}{z^{2\Delta} \bar{z}^{2\bar{\Delta}}}, \quad (5)$$

となる。プライマリー場は完全系を成しており、臨界系においては全ての場は、プライマリー場で展開することができる。従って、プライマリー場の共形次元 $(\Delta, \bar{\Delta})$ によって任意の場に関する相関関数の臨界指数をあらわすことができる。

2 次元臨界系のユニバーサリティクラスはセントラルチャージ (c) と呼ばれる Virasoro 代数の中心拡大項にあらわれる数で決められる。Tomonaga-Luttinger 液体は $c = 1$ の共形場理論に従っている。この場合のプライマリー場は $e^{i\sqrt{4\pi}(m\phi \pm n\theta)}$ であり、その共形次元 $\Delta_{\pm}$ は、

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} m + \frac{n}{\sqrt{2K}} \right)^2, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} m - \frac{n}{\sqrt{2K}} \right)^2, \quad (6)$$

である。1 次元電子系の場合には電荷とスピンの自由度がそれぞれ $c = 1$ のガウシアンモデルになっており、ボゾン化法における、フェルミオン場と位相場との関係式から、電子の演算子に関する任意の N 体の相関関数がこのプライマリー場で表されることが分かる。

有限サイズスケーリングの議論によれば、このプライマリー場の共形次元、 Δ , $\bar{\Delta}$ 、および、臨界現象のユニバーサリティクラスを特徴づけるセントラルチャージ、 c 、は有限サイズスペクトルと次式で関係している。

$$\begin{aligned} E_g &= E_g^\infty - \frac{\pi v}{6L} c \\ E_{ex} &= E_{ex}^\infty + \frac{2\pi v}{L} (\Delta + \bar{\Delta} + n_+ + n_-). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで E_g は基底エネルギー、 E_{ex} は励起エネルギーである。したがって有限サイズスペクトルがわかればセントラルチャージ、共形次元がわかり、相関関数の臨界指数を得ることができる。上記の有限サイズスケーリング則は、以下で述べる近藤問題への応用においても有用である。(ただし、1 不純物問題の場合は、境界の存在する場合の有限サイズスケーリング則が適用される) 前節の Haldane の理論との関係は式 (2), (6), (7) を見比べると明らかなように $m = J_\perp / \sqrt{2} = (J_\uparrow \pm J_\downarrow) / 2$, $n = M_\perp / \sqrt{2} = (M_\uparrow \pm M_\downarrow) / 2$ である。

1 次元ハバードモデルや $t-J$ モデルが $c = 1$ の共形場理論に従っていることは、ペーテ仮説による厳密解から得られた有限サイズスペクトルから、(7) より、セントラルチャージ、共形次元を読みとると、それらがガウシアンモデルのプライマリー場全体の構成する共形タワーと一致していることから確認された。[4] したがって、臨界指数は (6) より、 K_F を用いて表される。たとえば、1 次元ハバードモデルの運動量分布関数 $|k - k_F|^\theta \text{sgn}(k - k_F)$ の指数は $\theta = (K_F - 1)^2 / 4K_F$ である。その他の相関関数の臨界指数の具体的な表式等は文献 [4] 等を参照していただきたい。

2.3 非アーベル・ボゾン化法と Wess-Zumino-Witten モデル

系に $SU(N)$ の対称性が存在する場合、この対称性を陽にたもった形でボゾン化を行なう方法がある。これを非アーベル・ボゾン化法といい、Witten によって導入され、その後、Affleck によって 1 次元量子スピン系に応用された。[5][6] $SU(N)$ の対称性がある場合、共形不変性だけではなく、Kac-Moody 代数という別の無限次元リー代数の対称性が存在する。非アーベルボゾン化法では、この無限次元リー代数を満足するカレント演算子で、系を記述するところがポイントである。簡単のために $N = 2$ の場合について説明する。カレント演算子の左向きと右向き成分を次式で定義する。

$$\bar{J}_{L(R)} = c_{L(R)\alpha}^\dagger \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} c_{L(R)\beta}. \quad (8)$$

このカレント演算子は次の $SU(2)$ の Kac-Moody 代数と呼ばれる無限次元リー代数を満足する。

$$[J_L^a(x), J_L^b(x')] = f^{abc} J_L^c(x') \delta(x - x') + \frac{\delta_{ab} k}{2\pi} \delta'(x - x'). \quad (9)$$

$\bar{J}_R$ についても同様の関係が成り立つ。ここで、 f^{abc} は $SU(2)$ の構造定数である。右辺最後の項はアーベルボゾン化法の場合と同様に、紫外発散から生じた、アノマリーの寄与であり、そこにあられる k は、Kac-Moody 代数のレベルと呼ばれ、系の対称性から決まる整数値である。1 次元ハバードモデルのスピン部分や $s = 1/2$ のハイゼンベルグモデルの場合はレベル $k = 1$ である。あとで説明する多重チャンネル近藤効果の場合にはレベルが高い ($k > 1$) 例があらわれる。さて、このカレント演算子を用いて、 $SU(2)$ の対称性を持った電子系のスピン部分は、(相互作用によってギャップが開かない限り) 次のように表される。

$$H_s = \frac{2\pi v}{2+k} \int dx [\bar{J}_L(x) \cdot \bar{J}_L(x) + \bar{J}_R(x) \cdot \bar{J}_R(x)]. \quad (10)$$

これはレベル k $SU(2)$ の Wess-Zumino-Witten モデルと呼ばれている。このハミルトニアンを表式から明らかに、右向きと左向きのカレント成分が完全に分離しており、共形不変性が保たれている。

このモデルのセントラルチャージ c とスピン j を持つプライマリー場の共形次元 Δ はそれぞれ、

$$c = \frac{3k}{2+k}, \quad \Delta = \frac{j(j+1)}{2+k}, \quad (11)$$

で与えられる。スピンの量子数は $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{k}{2}$ の値をとる。[7] $k = 1$ の場合には、 $c = 1$ となり、前述のガウシアンモデルと一致する。このとき、共形次元も一致していることは簡単に確認できる。すなわち、 $k = 1$ の場合は、 $SU(2)$ 対称性を持つスピン部分の Tomonaga-Luttinger 液体を記述している。ガウシアンモデルとの大きな違いは、 $SU(2)$ の対称性の存在のために連続に変わり得るパラメーターが速度 v 以外に存在しないということである。すなわち臨界指数は系の持つ対称性によって完全に決まってしまうのである。

参考文献

1. F. D. M. Haldane, J. Phys. C14 (1981) 2585.
2. A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B12 (1975) 3908.
3. R. Shankar, Int. J. Mod. Phys. B4 (1990) 2371.
4. N. Kawakami and S.-K. Yang, Prog. Theor. Phys. Suppl. 107 (1992) 59.
5. I. Affleck, Nucl. Phys. B265 (1986) 409.
6. I. Affleck, in *Fields, strings, and critical phenomena*, ed. E. Brezin and Zinn-Justin.
7. Kniznik and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B247 (1984) 83.

3 1次元近藤格子モデルへのボゾン化法の応用

1次元の近藤格子模型は、伝導電子と局在電子のスピンの1次元格子上で交換相互作用をしているモデルで、そのハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H = -t \sum_{i,\sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{i+1,\sigma} + \lambda_K \sum_i \vec{S}_{c,i} \cdot \vec{S}_{f,i}, \quad (\lambda_K > 0). \quad (12)$$

ここで、 $\vec{S}_c = c_{i,\alpha}^\dagger \vec{\sigma}_{\alpha,\beta} c_{i,\beta} / 2$ 、 $\vec{S}_f = f_{i,\alpha}^\dagger \vec{\sigma}_{\alpha,\beta} f_{i,\beta} / 2$ 、 c 、 f はそれぞれ伝導電子、局在電子の演算子である。このモデルについては、Ueda のグループにより、ある極限における厳密な議論、および数値的対角化法を使って、精力的に調べられ、その結果、half-filling においては結合定数 λ_K の大きさによらず常に、電荷とスピンの両方の励起にギャップを有する近藤絶縁体になり、half-filling からずれた場合には、伝導電子と局在 f 電子全体の寄与による大きなフェルミ面を持った、Tomonaga-Luttinger 液体であることが知られている。[1] ここでは、後者の half-filling からずれた場合について、前節で説明した、ボゾン化法の観点から説明する。[2]

スピン部分を扱うには、SU(2)の対称性を陽に保持した非アーベルボゾン化法が便利である。half-filling からずれた場合、ボゾン化したハミルトニアンは次のようになる。

$$\begin{aligned} H &= H_c + H_s, \\ H_c &= \int dx \left[\frac{v^{(c)}}{2K^{(c)}} (\partial_x \phi^{(c)})^2 + \frac{v^{(c)} K^{(c)}}{2} \Pi^{(c)} \right], \\ H_s &= \frac{2\pi v_c}{3} \int dx [\vec{J}_{c,L}(x) \cdot \vec{J}_{c,L}(x) + \vec{J}_{c,R}(x) \cdot \vec{J}_{c,R}(x)] \\ &\quad + \lambda_K \int dx (\vec{J}_{c,L}(x) + \vec{J}_{c,R}(x)) \cdot \vec{S}_f(x), \end{aligned} \quad (13)$$

ここで H_c 、 H_s はそれぞれ電荷、スピン部分である。カレント $\vec{J}_{c,L}$, etc は第2節で説明したレベル $k=1$ SU(2) の Kac-Moody 代数を満たしている。従って、Kac-Moody 理論における演算子積展開、

$$J_{c,L}^a(z) J_{c,L}^b(z') = \frac{\epsilon_{abc} J_{c,L}^c(z')}{2\pi(z-z')} + \frac{\delta_{ab}}{4\pi^2(z-z')^2}, \quad \text{etc.} \quad (14)$$

を使って、結合定数 λ_K に対するスケリング方程式を得ることができる。分配関数 $Z = \text{tr} e^{-\beta H}$ を λ_K について展開し、(14)式を適用して次式を得る。

$$\frac{d\lambda_K}{d \ln L} = \frac{(\lambda_K)^2}{2\pi v_c}. \quad (15)$$

これより、 λ_K が強結合領域にスケールされることがわかる。このため、スピンのモードにギャップが開く。では、スピンの massless モードは存在しないのであろうか？実はそうではなく、 c -電子と f -電子のスピンの自由度に対応した2つのスピノンの強い混成のために、スピノンの“フェルミ面”の組み換えが起こる。この新しいスピノンの“フェルミ面”にもう一度、スピノンを積み直さねばならないのである。(図4) このとき、スピノンの“フェルミ面”の sum rule が成立しているので、新しい“フェルミ面”は $k_F + \pi/2$ となる。したがって、大きな“フェルミ面”をもつスピノンの自由度が1つ残り、スピン部分は上述のレベル $k=1$ SU(2) Wess-Zumino-Witten モデルで表される。一方、電荷の自由度については相互作用から分離しているので電荷部分に massless mode が存在し、 $c=1$ のガウシアンモデルで記述される。ただし、相互作用が強結合領域にスケールされた結果、 $\pi/2$ の位相シフトが存在し、その帰結として、ホロンも大きなフェルミ面 $2k_F + \pi$ を持つ。このホロンとスピノンの“フェルミ面”を組み合わせることによって、電子の“フェルミ面”が得られ、運動量分布関数の $k_F + \pi/2$ のところに特異性が現れる。ゆえに、低励起における固定

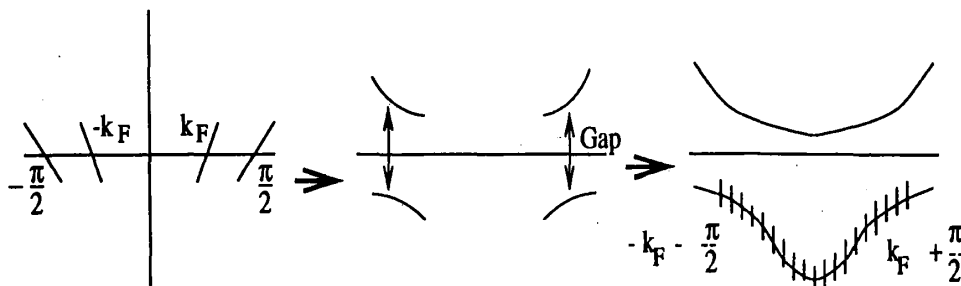


図 4: スピノンの”フェルミ面”の組み換え

点は、 c -電子と f -電子の両方の寄与からなる大きな“フェルミ面”を持った Tomonaga-Luttinger 液体になっている。

この固定点における種々の相関関数の長距離領域の振舞いも調べることができる。たとえば、 f -電子のスピン-スピン相関関数は

$$\langle S_f^+(x, 0) S_f^-(0, 0) \rangle \sim \frac{A_0}{x^2} + \frac{A_1}{x^{1+K_\rho}} \cos[(2k_F + \pi)x], \quad (16)$$

となる。すなわち、 $2k_F + \pi$ の構造のみ現れて、RKKY 的な $2k_F$ における構造は現れない。 $2k_F$ の RKKY 的な振舞いは短距離領域においてのみ現れるのである。

また、half-filling の場合についても、ボゾン化法で調べることができ、電荷とスピンの両方の励起にギャップが存在する近藤絶縁体になっていることが示され、Ueda のグループの結果を支持している。

参考文献

1. 上田和夫、常次宏一、日本物理学会誌, Vol. 48 (1993) 704, およびその参考文献。M. Sigrist, H. Tsunetsugu, K. Ueda, and T. M. Rice, Phys. Rev. B46 (1992) 13838; H. Tsunetsugu, Y. Hatsugai, K. Ueda, and M. Sigrist, Phys. Rev. B46 (1992) 3175; K. Ueda, T. Nishino, and H. Tsunetsugu, Phys. Rev. B50 (1994) 612; H. Tsunetsugu, M. Sigrist, and K. Ueda, Phys. Rev B47 (1993) 8345.
2. S. Fujimoto and N. Kawakami, J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) 4322.

4 1 不純物近藤問題と共形場理論

1 不純物近藤問題は、不純物スピンと伝導電子間の散乱を s 波散乱に限れば、1次元系に帰着することができ、ボゾン化法が適用できる。ただ、前節までの問題との重要な違いは、カレントが一方方向にしか流れないという点である。また、不純物スピンの存在のために並進対称性は破れているが、不純物スピンの効果を非自明な境界条件として扱うことによって、境界のある共形場理論を適用し、臨界的性質を調べることができる。このアプローチは Affleck と Ludwig によって発展させられた。[1] 以下に彼らの理論を簡単に紹介する。

4.1 Affleck と Ludwig の理論

4.1.1 固定点の性質

伝導電子のチャンネルが k で不純物スピンの s の近藤問題を考え、第2節で説明した、非アーベルボゾン化法を適用する。今、伝導電子は一方向にのみ流れるので電子の演算子を右向き成分と左向き成分に分けて、右向き成分 c_R のみ考える。これによるスピнкаレントを $\vec{J} = c_R^\dagger \vec{\sigma} c_R / 2$ とし、ハミルトニアンのスピン部分は次式のようになる。

$$H = \frac{v}{\pi} \int dx \left[\frac{1}{2+k} \vec{J}(x) \cdot \vec{J}(x) + 2\pi\lambda \vec{J}(x) \cdot \vec{S}\delta(x) \right]. \quad (17)$$

ただし、原点に不純物スピンがあるとして、不純物スピンの演算子を $\vec{S}$ とした。第一項は伝導電子の運動エネルギーで、これは、第2節で説明した Wess-Zumino-Witten model の右向き成分の部分と同じである。最後の項が伝導電子と不純物スピンとの相互作用をあらわすが、結合定数 λ が特定の値 $2/(2+k)$ をとるときには、不純物スピンをバルクのスピнкаレントに吸収することができる。新たなスピнкаレント、 $\vec{J}_n = \vec{J}_n + \vec{S}$ ($\vec{J}_n$ は $\vec{J}(x)$ のフーリエ成分) を導入すると、上記のハミルトニアンは

$$H = \frac{\pi v}{L(2+k)} \sum_n \vec{J}_n \cdot \vec{J}_{-n}, \quad (18)$$

となる。新たに導入されたカレント $\vec{J}_n$ もまた、レベル k $SU(2)$ Kac-Moody 代数 (9) を満足するので、式 (18) はレベル k $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten モデルとなる。Affleck と Ludwig はこれが固定点におけるハミルトニアンであると考えた。もともと不純物と結合していない自由なバルクの電子のスピン部分がレベル k $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten モデルで表されるのだが、 $SU(2)$ 対称性を持つ不純物と結合して、励起にギャップが生じるはずがないので、不純物と結合した固定点もレベル k $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten モデルで記述されるというのは容易に理解できる。では、不純物と結合した効果はどこに反映されるのであろうか。かれらはこの効果を非自明な境界条件の効果として取り入れた。すなわち、図5 (a) のような半無限平面を考え、共形不変でかつ $SU(2)$ 不変な境界条件として不純物スピンの効果を取り入れた。この非自明な境界条件の特徴は、図5 (b) のような有限サイズ l の系のエネルギースペクトルにおけるスピン部分と電荷部分、フレーバー (チャンネルの自由度) 部分との間に成り立つ量子数の選択則の変更としてあらわれる。つまり、スピン部分が不純物スピンを吸収したために、スピン部分の量子数に変動が生じるのである。この変更が $k = 2s$ や $k < 2s$ の場合には、 $\pi/2$ 位相シフトを生じさせ、 $k > 2s$ の場合には、非フェルミ液体的なエネルギースペクトルの起源となる。Affleck と Ludwig はこのスピンの量子数の変更が、Kac-Moody 代数におけるスピンの和則 (Kac-Moody fusion rules と呼ばれる) に従うと仮定した。これは次のように定義される。 $SU(2)$ Kac-Moody 理論において、スピン j および j' を持った、2つのプライマリー場、 $\phi_j, \phi_{j'}$ の演算子積展開を計算すると、展開にあらわれる演算子はスピン、 $|j-j'|, |j-j'|+1, \dots, \min\{j+j', k-j-j'\}$ を持つものだけであることが知られている。

$$\phi_j \cdot \phi_{j'} = \sum_{l=|j-j'|}^{\min\{j+j', k-j-j'\}} C_l^{j,j'} \phi_l. \quad (19)$$

これは通常の $SU(2)$ リー代数における直積表現の既約表現への分解に似ている。これより、Kac-Moody 代数におけるスピンの和則は、 $|j-j'|, |j-j'|+1, \dots, \min\{j+j', k-j-j'\}$ となる。Affleck と Ludwig はバルクの電子のスピンへの不純物スピンの吸収がこのルールに従うと考えた。不純物スピンの演算子自体は Kac-Moody 理論のプライマリー場ではないので、これはあくまで仮説であるが、数値繰り込み群によって計算されたエネルギースペクトルがこの fusion rule によって得られたスペクトルと一致することから、彼らはこれが正しいと考えた。これより、有

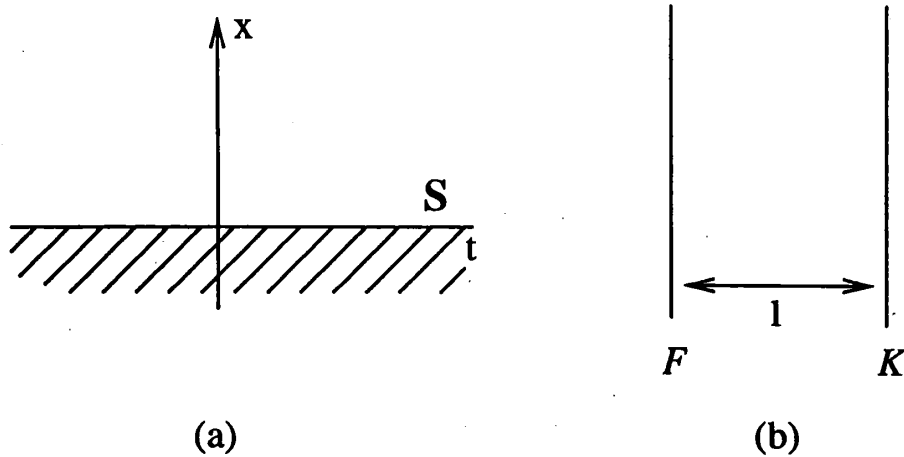


図 5: (a) $x = 0$ に不純物スピンの存在する半無限平面。(b) 有限サイズ l の系。F には自由境界条件、K には近藤効果による非自明な境界条件が課せられている。

限サイズスペクトルは次のようになる。

$$E = \frac{\pi v}{l} \left(\frac{Q^2}{4k} + \frac{j(j+1)}{2+k} + \frac{c_f}{2+k} \right). \quad (20)$$

ここで、 Q は電荷の数、 j は前述の fusion rule に従って、不純物スピンと合成した電子のスピンの量子数、 c_f はチャンネルの自由度に関係した量子数で、2チャンネルの場合には $c_f = j_f(j_f+1)$ ($j_f = 0, 1/2, 1$) となる。このスペクトルが正しいことは、筆者と Kawakami、Yang によって $k=1$ の場合にベータ仮説解による解析的な有限サイズスペクトルの計算から確かめられた。これについては後述する。

4.1.2 境界のある共形場理論から見た局所フェルミ液体

$k = 2s$ 、および $k < 2s$ の場合には、低エネルギーの固定点は局所フェルミ液体になる。このときエネルギースペクトルは $\pi/2$ の位相シフトを除いて、自由電子系と等しくなる。この場合、 k 個のチャンネルの全てが不純物スピンを吸収するので、上述の Kac-Moody fusion rule によれば、電子のスピンの量子数は次のように変更される。

$$j \rightarrow \frac{k}{2} - j. \quad (21)$$

これと電荷とフレーバー部分（チャンネル部分）の量子数の選択則を組み合わせると、(21) 式の量子数の変更は、電荷の量子数を、 $Q = p \pmod{2k} \rightarrow Q = p + k \pmod{2k}$ とシフトさせることに等しいことが分かり、これは $\pi/2$ の位相シフトに他ならない。

4.1.3 多重チャンネル近藤効果における非フェルミ液体的性質

多重チャンネル近藤効果においては $k > 2s$ の場合に、スクリーンされるべき不純物スピンの大きさよりも、伝導電子のチャンネルの数の方が大きくなり、通常近藤効果における強結合固定点とは異なる、非自明な固定点が存在する。この固定点において非フェルミ液体的な振舞いが現れる。物理量に現れる非フェルミ液体的な振舞いには、有限サイズスペクトル等の固定点そのものの性質を反映したものと、固定点からのずれを示す励起に現れるものがある。

有限サイズスペクトル (20) は $k > 2s$ の場合には、自由電子系とは、断熱的につながらない構造を有し、非フェルミ液体になっている。

熱力学的物理量にあらわれる非フェルミ流体的な温度依存性は、固定点からのずれをあらわす leading irrelevant operator によって決定される。非フェルミ液体的固定点におけるスピン部分はレベル k SU(2) Kac-Moody theory で記述されるので、この理論に含まれる演算子のうち、SU(2) の対称性を破らない、スピンとチャンネルの自由度について singlet な演算子だけが、ハミルトニアンの中に導入することができ、その中から、この leading irrelevant operator を見つけることができる。Affleck と Ludwig は SU(2) singlet な演算子の中でもっとも次元の小さい演算子、 $\vec{J}_{-1} \cdot \vec{\phi}$ が leading irrelevant operator であると考えた。ここで、 $\vec{\phi}$ はスピン 1 の Kac-Moody プライマリー場であり、 $\vec{J}_{-1}$ は Kac-Moody 代数のカレント演算子のフーリエ成分である。 $\vec{J}_{-1} \cdot \vec{\phi}$ は次元 $1 + 2/(2+k)$ を持つ。熱力学量の温度依存性は、自由エネルギーをこの leading irrelevant operator について、摂動計算することによって決めることができる。

スピン帯磁率と比熱はともに同じ特異な温度依存性を示し、

$$\chi_{imp}, \gamma_{imp} \propto \begin{cases} \ln \frac{T_K}{T} & k=2 \\ T^{-\frac{k-2}{k+2}} & k>2. \end{cases} \quad (22)$$

となる。この結果はベータ仮説解によるものと一致しており、Affleck 達の選んだ演算子が正しい leading irrelevant operator であることを示唆している。

さらに彼らは、電子の自己エネルギーをこの leading irrelevant operator について 1 次まで摂動計算して、電気抵抗の温度依存性も求めた。それによれば、電気抵抗は次のように振舞う。

$$\rho = A + B \left(\frac{T}{T_K} \right)^{\frac{2}{k+2}} \quad (23)$$

これは、ベータ仮説解や交換相互作用に関する摂動では計算できない量であり、共形場理論を用いて、はじめて得られた結果である。

4.2 ベータ仮説解から導出された有限サイズスペクトルと共形場理論の結果との関係——1 チャンネルの場合

近藤問題は 1 チャンネルの場合だけでなく、多重チャンネルの場合もベータ仮説で厳密に解くことができる。従って、ベータ仮説解から求めた有限サイズスペクトルを、Affleck と Ludwig による Kac-Moody fusion rule の仮説にもとづいたエネルギー・スペクトルと比較することができる。我々は 1 チャンネルの場合の有限サイズスペクトルをベータ仮説解から求めた。[2] それによると、Anderson model の場合、基底エネルギーの有限サイズ補正から、セントラルチャージは電荷とスピンの部分に対してそれぞれ $c=1$ であり、Tomonaga-Luttinger 液体と同じクラスになっていることがわかる。励起エネルギーについては次のようになる。

$$E = E_0 + \frac{1}{L} E_1 + \frac{1}{L^2} E_2, \quad (24)$$

$$\frac{1}{L} E_1 = \frac{2\pi v}{L} \left[\frac{1}{4} \left(\Delta N_h - 2 \frac{\delta_F}{\pi} \right)^2 + n_c^+ \right] + \frac{2\pi v}{L} [(\Delta S_h)^2 + n_s^+], \quad (25)$$

$$\frac{1}{L^2} E_2 = \frac{2\pi v}{L^2} \frac{\chi_c^{imp}}{\chi_c^h} \left[\frac{(\Delta N_h)^2}{4} + n_c^+ \right] + \frac{2\pi v}{L^2} \frac{\chi_s^{imp}}{\chi_s^h} [(\Delta S_h)^2 + n_s^+]. \quad (26)$$

ここで δ_F はフェルミ面における位相シフトであり、 ΔN_h 、 S_h はそれぞれバルクの電子の数及び、全スピンの z 成分である。 $\chi_{c(s)}^{imp}$ は不純物部分の電荷 (スピン) 帯磁率である。不純物問題なので

電子相関効果は $1/L$ のオーダーでは位相シフトにのみあらわれる。従って、これに有限サイズスケールリングを適用して、グリーン関数の臨界指数を読めとれば、カノニカルな指数のみがあらわれ、局所フェルミ液体になっていることがわかる。 $s-d$ モデルの場合の有限サイズスペクトルも計算することができ、結果は、上記の Anderson model のスペクトルにおいて、 $\delta_F = \pi/2$ とし、 E_2 のスピン部分のみを残した形になっている。この結果は Affleck 達の Kac-Moody fusion rules に基づいた結果と一致しており、(ただし、(20) と (24) ~ (26) において $2l = L$ である。) 彼らの共形場理論に基づく予想の正しさが厳密解から示されたといえる。

参考文献

1. I. Affleck and A. W. W. Ludwig, Nucl. Phys. B352 (1991) 849; B360 (1991) 641; Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 161; Phys. Rev. B48 (1993) 7279; A. W. W. Ludwig and I. Affleck, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 3160; Nucl. Phys. B428 (1994) 545.
2. S. Fujimoto, N. Kawakami, and S. -K. Yang, Phys. Rev. B50 (1994) 1046.