

無限ネットワークの分類

広島工大 村上温 (Atsushi Murakami)

島根大学 山崎稀嗣 (Maretsugu Yamasaki)

1. 準備

X を点 (node) の高々可算集合, Y を線 (arc) の高々可算集合, K を点と線の接続行列, つまり

$$K: X \times Y \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

とするとき, これらの組 $G := \{X, Y, K\}$ をグラフという. X と Y が共に有限集合の場合に G を有限グラフ, それ以外の場合には G を無限グラフという. 線 $y \in Y$ の端点 $e(y) := \{x \in X; K(x, y) \neq 0\}$ は異なる 2 点 $x^-(y)$ (始点) と $x^+(y)$ (終点) から成り, それらは条件:

$$K(x^+(y), y) = 1, \quad K(x^-(y), y) = -1$$

により定まる (セルフループをもたない) と仮定する.

以下では, G の任意の 2 点を結ぶパスが存在すること (連結性) を仮定する. 説明を省略した用語については [5] を参照.

グラフ G と Y 上の正の実数値関数 (抵抗) r の組 $N := \{G, r\} = \{X, Y, K, r\}$ をネットワークという. G が有限グラフのとき N を有限ネットワーク, G が無限グラフのとき N を無限ネットワークという.

点 $a \in X$ に接続する線の集合を $Y(a) = \{y \in Y; K(a, y) \neq 0\}$, a の隣接点の集合を $X(a)$, 線 $y \in Y$ の両端点の集合を $e(y)$ で表す. $Y(x)$ が全ての x について有限集合である場合に, N は局所有限であるという. 集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す. 互いに素な空でない X の空でない部分集合 A, B に対し, A と B を結ぶ線 $y \in Y$ の集合を記号 $A \ominus B$ で表す.

N が局所有限でない場合には無限個の線が接続する点の集合 X_∞ は空ではない. 更に詳しく言えば, 次の集合のいずれかは空ではないことに注意する:

$$X_\infty^{(1)} := \{a \in X; |X(a)| = \infty\},$$

$$X_\infty^{(11)} := \{a \in X_\infty^{(1)}; \text{全ての } x \in X(a) \text{ に対し } \{a\} \ominus \{x\} \text{ は有限集合}\},$$

$$X_\infty^{(12)} := X_\infty^{(1)} \setminus X_\infty^{(11)},$$

$$X_\infty^{(2)} := \{a \in X; |X(a)| < \infty, |Y(a)| = \infty\}.$$

各点 $a \in X_\infty$ が条件:

$$(*) \quad \sum_{y \in Y(a)} r(y)^{-1} < \infty$$

を満たすとき, N を殆ど局所有限なネットワークと呼ぶ (文献[3],[5])

この論文の目的は、局所有限なネットワークや殆ど局所有限なネットワークの分類 ([4],[6] 参照) に有用であった4つの計量の関係を調べることにより、一般的なネットワークの分類を試みることである。

X 上の実数値関数の全体を $L(X)$ とする. 関数 $u \in L(X)$ の台を $Su := \{x \in X; u(x) \neq 0\}$ とし, 台が有限集合であるような X 上の実数値関数の全体を $L_0(X)$ で表す.

記号 $L(Y), L_0(Y)$ の意味も同様. Y 上の非負実数値関数の全体を $L^+(Y)$ とする.

関数 $w \in L(Y)$ のエネルギーを

$$H(w) := \sum_{y \in Y} r(y)w(y)^2$$

により定義する. エネルギー有限な $w \in L(Y)$ の集合 $L_2(Y; r)$ は内積

$$H(w, w') := \sum_{y \in Y} r(y)w(y)w'(y)$$

に関してヒルベルト空間となる.

関数 $u \in L(X)$ の離散微分 (差分) du とディリクレ和 $D(u)$ を

$$du(y) := -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y)u(x)$$

$$D(u) := \sum_{y \in Y} r(y)[du(y)]^2 = H(du)$$

と定義する. ディリクレ和が有限な X 上の関数の全体を $D(N)$ で表す. 関数 $u, v \in D(N)$ の相互ディリクレ和を

$$D(u, v) := \sum_{y \in Y} r(y)[du(y)][dv(y)] = H(du, dv)$$

と定義する. $D(N)$ は内積:

$$\langle u, v \rangle := D(u, v) + u(x_0)v(x_0)$$

($x_0 \in X$ は固定) に関してヒルベルト空間となる.

以下で, 点 $a \in X$ と N の無限遠点 ∞ とに関係した4つの計量を考える:

1. 点 a に関する無限遠点の容量:

$$(1.1) \quad d(a, \infty) := \inf\{D(u); u \in L_0(X), u(a) = 1\}.$$

2. 点 a と無限遠点との間の極值的長さ:

点 a から無限遠点への N 上のパス P とは, 点の集合 $C_X(P)$ と線の集合 $C_Y(P)$ 及び Y 上の関数 p (パス関数) の組で次の条件を満たすものとして定義する:

$$C_X(P) = \{x_k; k = 0, 1, 2, \dots\}, x_j \neq x_k (j \neq k)$$

$$C_Y(P) = \{y_k; k = 1, 2, \dots\}, y_j \neq y_k (j \neq k)$$

$$e(y_k) = \{x_{k-1}, x_k\} (k = 1, 2, \dots)$$

$$p(y) := \begin{cases} -K(x_{k-1}, y_k), & y = y_k \text{ のとき;} \\ 0, & y \in Y \setminus C_Y(P) \text{ のとき.} \end{cases}$$

点 a から無限遠点への N 上のパスの全体を $P_{a,\infty} = P_{a,\infty}(N)$ とする.

$$(1.2) \quad EL(a, \infty)^{-1} := \inf\{H(W); W \in EL(P_{a,\infty})\},$$

ただし, $EL(P_{a,\infty})$ は, すべてのパス $P \in P_{a,\infty}$ に対して

$$\sum_{y \in P} r(y)W(y) \geq 1$$

を満たす $W \in L^+(Y)$ の集合を表す.

$P_{a,\infty}$ が空集合の場合には, $0 \in EL(P_{a,\infty})$ より, $EL(P_{a,\infty}) = \infty$.

3. 点 a から無限遠点への単位フローの最小エネルギー:

点 $a \in X$ から無限遠点へのフローとは, 次の条件を満たす関数 $w \in L(Y)$ のことである:

(F.1) すべての $x \in X_\infty$ について $Sw \cap Y(x)$ は有限集合, ただし, $Sw := \{y \in Y; w(y) \neq 0\}$ は w の台.

(F.2) 点 a 以外ではキルヒホッフの第一法則を満たす:

$$\sum_{y \in Y} K(x, y)w(y) = 0 \quad \forall x \neq a$$

点 $a \in X$ から無限遠点へのフローの全体を $F_0(a, \infty)$ とする. $w \in F_0(a, \infty)$ に対し

$$I(w) := \sum_{y \in Y} K(a, y)w(y)$$

を w の強さという.

$$(1.3) \quad d^*(a, \infty) := \inf\{H(w); w \in F_0(a, \infty), I(w) = 1\}$$

$\{w \in F_0(a, \infty); I(w) = 1\}$ が空集合の場合には, $d^*(a, \infty) = \infty$ と約束する.

4. 点 a と無限遠点の間の極値的幅:

点 a と無限遠点の間の切断(カット) Q とは X を互いに共通点を持たない部分集合 $Q(a)$ ($Q(a)$ は a を含む有限集合) と $Q(\infty)$ に分割したとき生じる線の集合 $Q = Q(a) \oplus Q(\infty)$ を意味する. 点 a と無限遠点の間の切断の全体を $Q_{a,\infty}$ とする.

$$(1.4) \quad EW(a, \infty)^{-1} := \inf\{H(W); W \in EW(Q_{a,\infty})\},$$

ただし, $EW(Q_{a,\infty})$ は, すべての切断(カット) $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$\sum_{y \in Q} W(y) \geq 1$$

を満たす $W \in L^+(Y)$ の集合を表す.

N が殆ど局所有限である場合には, $d(a, \infty)$ と $EL(a, \infty)$; $d^*(a, \infty)$ と $EW(a, \infty)$; $EL(a, \infty)$ と $EW(a, \infty)$ のいずれの組も逆数関係があることが知られている ([2]).

2. 計量の一般的な関係

この節では点 $a \in X$ を固定する:

Lemma 2.1. $u \in L_0(X)$, $w \in F_0(a, \infty)$ が条件: $u(a) = 1$, $I(w) = 1$ を満たせば, $1 \leq H(w)D(u)$ が成り立つ.

証明. u と w に関する仮定から

$$1 = \sum_{y \in Y} K(a, y)w(y) = \sum_{x \in X} u(x) \sum_{y \in Y} K(x, y)w(y).$$

この2重和は有限和であるから, 和の順序を取り替えてシュワルツの不等式を使えば

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{y \in Y} w(y) \sum_{x \in X} K(x, y)u(x) \\ &\leq [H(w)]^{1/2} [D(u)]^{1/2} \quad \square \end{aligned}$$

このことを用いて次の結果を得る:

Theorem 2.2. $1 \leq d(a, \infty)d^*(a, \infty)$.

Theorem 2.3. $EL(a, \infty)^{-1} \leq d(a, \infty)$.

証明. $d(a, \infty)$ の実行可能解 u に対して $W := |du|$ と選べば, W は $EL(a, \infty)^{-1}$ の実行可能解であることが示され, $H(W) = D(u)$ が成り立つことから求める不等式を得る. $\square$

Theorem 2.4. $EW(a, \infty)^{-1} \leq d^*(a, \infty)$.

証明. $w \in F_0(a, \infty)$, $I(w) = 1$, $Q = Q(a) \ominus Q(\infty) \in Q_{a, \infty}$ とし, $Q(a)$ の特性関数を u とする. 補助定理 2.1 により,

$$\begin{aligned} I(w) &= \sum_{x \in X} u(x) \sum_{y \in Y} K(x, y)w(y) \\ &= \sum_{y \in Y} w(y) \sum_{x \in X} K(x, y)u(x) \end{aligned}$$

従って

$$1 \leq \sum_{y \in Q} |w(y)|$$

すなわち, $W(y) := |w(y)|$ は $EW(a, \infty)^{-1}$ の実行可能解である. 従って,

$$EW(a, \infty)^{-1} \leq H(W) = H(w)$$

これから, 求める不等式が得られる. $\square$

Theorem 2.5. 次の関係式が成り立つ:

$$(2.1) \quad EL(a, \infty) \leq d^*(a, \infty)$$

証明. $d^*(a, \infty)$ が有限であると仮定してよい. 任意の正数 ϵ に対して

$$d^*(a, \infty) + \epsilon > H(w), w \in F_0(a, \infty), I(w) = 1$$

を満たす w が存在する. $e(Sw) := \cup\{e(y); y \in Sw\}$ の連結成分で a を含むものを X' , Sw の元で X' に両端点をもつものを Y' とすると, $N' = \langle X', Y' \rangle$ は局所有限な無限ネットワークである. このとき, w を Y' に制限すると, これは $d^*(a, \infty; N')$ に対する実行可能解となる. 従って

$$d^*(a, \infty) + \epsilon > H(w) \geq \sum_{y \in Y'} r(y)w(y)^2 \geq d^*(a, \infty; N')$$

他方, 局所有限なネットワーク上での関係式と極値的長さの一般的な関係から

$$EL(a, \infty) \leq EL(a, \infty; N') = d^*(a, \infty; N')$$

が成り立つ. 従って

$$d^*(a, \infty) + \epsilon > EL(a, \infty).$$

ϵ は任意であるから求める不等式が証明された. $\square$

局所有限な無限ネットワークの場合と同様にして次の結果を証明できる: ([1] 参照)

Theorem 2.6. $EL(a, \infty) = \infty$ が成り立つための必要十分条件は

$$(2.2) \quad \sum_{y \in P} r(y)W(y) = \infty \quad \forall P \in P_{a, \infty}$$

を満たす $W \in L^+(Y) \cap L_2(Y; r)$ が存在すること.

Theorem 2.7. $EW(a, \infty) = \infty$ が成り立つための必要十分条件は

$$(2.3) \quad \sum_{y \in Q} W(y) = \infty \quad \forall Q \in Q_{a, \infty}$$

を満たす $W \in L^+(Y) \cap L_2(Y; r)$ が存在すること.

3. 局所有限でない特性

Theorem 3.1. $d(a, \infty) = \infty$ となるための必要条件は

$$(3.1) \quad \sum_{y \in Y(a)} r(y)^{-1} = \infty$$

が成り立つこと.

証明. ϵ_a は点 a の特性関数とする. 関係式

$$d(a, \infty) \leq D(\epsilon_a) = \sum_{y \in Y(a)} r(y)^{-1}$$

から条件の必要性が分かる. $\square$

Theorem 3.2. $a \in X_\infty^{(11)}$ とする. (3.1) が成り立てば $d(a, \infty) = \infty$ となる.

証明. 条件 (3.1) を仮定する. $d(a, \infty)$ の実行可能解 u について, $u(a) = 1$, $u \in L_0(X)$ かつ $a \in X_\infty^{(11)}$ より

$$Y_0(a) := \{y \in Y(a); e(y) \setminus Su \neq \emptyset\}$$

は有限集合であるから

$$D(u) \geq \sum_{y \in Y(a) - Y_0(a)} r(y)^{-1} = \infty. \quad \square$$

Theorem 3.3. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$(3.2) \quad EW(a, \infty) \leq \sum_{y \in Q} r(y)^{-1}$$

証明. $EW(a, \infty)$ の実行可能解 W に対して

$$1 \leq \sum_{y \in Q} W(y) \leq [\sum_{y \in Q} r(y)^{-1}]^{1/2} [H(W)]^{1/2}$$

すなわち

$$1 \leq [\sum_{y \in Q} r(y)^{-1}] EW(a, \infty)^{-1}$$

これから、求める不等式が得られる。 $\square$

Lemma 3.4. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ とパス $P \in P_{a,\infty}$ は交わる。すなわち $C_Y(P) \cap Q \neq \emptyset$ 。

証明. Q を定める集合 $Q(a)$ の特性関数を $u_Q \in L(X)$, P のパス関数を $p \in L(Y)$ とする。 $Q(a)$ 上で $u_Q = 1$, $Q(\infty)$ 上で $u_Q = 0$ であるから $u_Q \in L_0(X)$. $p \in F_0(a, \infty)$ であるから Lemma 2.1 により

$$\begin{aligned} -1 &= \sum_{y \in Y} K(a, y)p(y) = \sum_{x \in X} u_Q(x) \sum_{y \in Y} K(x, y)p(y) \\ &= \sum_{y \in Y} p(y) \sum_{x \in Y} K(x, y)u_Q(x) \end{aligned}$$

従って、

$$1 \leq \sum_{y \in Q} |p(y)|$$

ゆえに、 $Sp \cap Q \neq \emptyset$. 言い換えれば $C_Y(P) \cap Q \neq \emptyset$. $\square$

Theorem 3.5. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$(3.3) \quad [\sum_{y \in Q} r(y)^{-1}]^{-1} \leq EL(a, \infty)$$

証明. $\sum_{y \in Q} r(y)^{-1} = \infty$ のときは、(3.3) は明らか。そうでないときを考える。 $y \in Q$ のとき $W(y) = r(y)^{-1}$, $y \in Y - Q$ のとき $W(y) = 0$ で定義された関数 W を考える。 Lemma 3.4 により、任意の $P \in P_{a,\infty}$ に対して

$$1 \leq \sum_{y \in C_Y(P)} r(y)W(y)$$

つまり、 W は $EL(a, \infty)$ に対する実行可能解である。従って

$$EL(a, \infty)^{-1} \leq H(W) = \sum_{y \in Y} r(y)W(y)^2 = \sum_{y \in Q} r(y)^{-1}$$

$\square$

Theorem 2.5 と Theorem 3.5 から次の結果を得る：

Theorem 3.6. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$(3.4) \quad [\sum_{y \in Q} r(y)^{-1}]^{-1} \leq d^*(a, \infty)$$

が成り立つ。特に

$$(3.5) \quad [\sum_{y \in Y(a)} r(y)^{-1}]^{-1} \leq d^*(a, \infty)$$

4. 特別な場合

Theorem 4.1. $EW(a, \infty) = \infty$ ならば, 任意のカット $Q \in Q_{a, \infty}$ に対して

$$(4.1) \quad \sum_{y \in Q} r(y)^{-1} = \infty$$

従って, 条件 (3.1) が成り立つ.

証明. Theorem 2.7 により条件 (2.3) を満たす $W \in L^+(Y) \cap L_2(Y; r)$ が存在する.
任意のカット $Q \in Q_{a, \infty}$ に対し

$$\infty = \sum_{y \in Q} W(y) \leq [\sum_{y \in Q} r(y)^{-1}]^{1/2} [H(W)]^{1/2}$$

$H(W)$ は有限であるから, (4.1) が成り立つ. $\square$

Theorem 4.2. $a \in X_\infty^{(11)}$ とする. 集合 $\{r(y); y \in Y(a)\}$ が有界ならば, $d(a, \infty) = EW(a, \infty) = \infty$ が成り立つ.

証明. $Y(a) = \{y_n; n = 1, 2, \dots\}$ とする. 仮定より

$$M = \sup\{r(y_n); n = 1, 2, \dots\} < \infty.$$

各 n に対し $W(y_n) = 1/n$, $y \in Y \setminus Y(a)$ に対し $W(y) = 0$ で定義される関数 W を考える. 任意のカット $Q \in Q_{a, \infty}$ に対し, $Q(a)$ は有限集合であるから, Q はある番号から先の $Y(a)$ の要素をすべて含む. 従って, 条件 (2.3) が満たされる. 更に

$$H(W) = \sum_{y \in Y(a)} r(y) W(y)^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ゆえに, Theorem 2.7 により $EW(a, \infty) = \infty$. $\square$

注意. 上の定理の証明は $Y(a) = \{y_n; n = 1, 2, \dots\}$ について, 条件

$$r(y_n) \leq M n^\alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

が成り立つときにも有効である.

Theorem 4.3. $d(a, \infty) < \infty$ とする. 条件:

$$\sum_Q r(y)^{-1} < \infty \quad \forall Q \in Q_{a, \infty}$$

が満たされれば, $d(a, \infty) \leq EW(a, \infty)$.

証明. $d(a, \infty) > 0$ の場合に証明すればよい.

$$D(N; a) := \{u \in D(N); u(a) = 1\}$$

は内積 $D(u, v)$ をもつヒルベルト空間であるから, $d(a, \infty) = D(\tilde{u})$ を満たす $\tilde{u} \in D(N; a)$ の存在が分かる. カット $Q \in Q_{a, \infty}$ を定義する集合 $Q(a)$ の特性関数を u_Q とすると,

$$u_Q \in L_0(X), \quad D(u_Q) = \sum_Q r(y)^{-1} < \infty.$$

従って, 最小解 $\tilde{u}$ の性質から

$$0 = D(\tilde{u}, \tilde{u} - u_Q)$$

が導かれる. ゆえに, $\tilde{W}(y) := |d\tilde{u}(y)|$ として,

$$d := d(a, \infty) = D(\tilde{u}, u_Q) \leq \sum_Q \tilde{W}(y).$$

すなわち, $\tilde{W}/d$ は $EW(a, \infty)$ の実行可能解である. ゆえに

$$EW(a, \infty)^{-1} \leq H(\tilde{W}/d) = D(\tilde{u})/d^2 = 1/d.$$

□

5. Examples

以下では具体的な無限グラフと抵抗の例を列挙し4つの計量の関係を明らかにする. グラフ $G = \{X, Y, K\}$ の定義では点の集合 X , 線の集合 Y と結合関数 K を与える. $\mathbf{N}$ は自然数全体の集合を表すものとする.

1. 全ての $x \in X$ について, $P_{x, \infty} = \emptyset$, $\{w \in F_0(x, \infty); I(w) = 1\} = \emptyset$ である無限グラフ:

Graph 5.1. $X = \{x_n; n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$, $Y = Y(x_0) = \{y_n; n \in \mathbf{N}\}$,

$$K(x_0, y_n) = -1, \quad K(x_n, y_n) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には, $K(x, y) = 0$.

Graph 5.2. $X = \{x_0, x_1\}$, $Y = \{y_n; n \in \mathbf{N}\}$,

$$K(x_0, y_n) = -1, \quad K(x_1, y_n) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には, $K(x, y) = 0$.

Graph 5.2*. $X = \{x_0, x_1, x_{-1}\}$, $Y = \{y_0\} \cup \{y_n; n \in \mathbf{N}\}$,

$$K(x_0, y_n) = -1, \quad K(x_1, y_n) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N});$$

$$K(x_{-1}, y_0) = -1, \quad K(x_0, y_0) = 1$$

その他の場合には, $K(x, y) = 0$.

2. 全ての $x \in X$ に対して, $P_{x, \infty} \neq \emptyset$ となる無限グラフ:

Graph 5.3. $X = \{x_n, x'_n; n \in \mathbf{N}\} \cup \{x'_0\} (x_0 = x'_0 \text{ とする}), Y = \{y_n, y'_n; n \in \mathbf{N}\}$

$$K(x'_0, y'_n) = K(x'_0, y_1) = K(x_{n-1}, y_n) = -1$$

$$K(x'_n, y'_n) = K(x_n, y_n) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には, $K(x, y) = 0$.

Graph 5.4. $X = \{x'_0\} \cup \{x_n; n \in \mathbf{N}\}, Y = \{y_n, y'_n; n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\},$

$$K(x'_0, y'_n) = K(x_n, y_n) = -1, K(x_n, y'_n) = K(x_{n+1}, y_n) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には, $K(x, y) = 0$.

Graph 5.5. $X = \{x_0\} \cup \{x_n^{(k)}; n, k \in \mathbf{N}\}, Y = \{y_n^{(k)}; n, k \in \mathbf{N}\}, x_n^{(0)} = x_0,$

$$K(x_n^{(k-1)}, y_n^{(k)}) = -1, K(x_n^{(k)}, y_n^{(k)}) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には, $K(x, y) = 0$.

Example 5.6. G は Graph 5.1, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える.
 $a = x_0$ とするとき,

$$EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

は自明. Theorem 3.2 と Theorem 4.2 から

$$d(a, \infty) = EW(a, \infty) = \infty.$$

Example 5.7. G は Graph 5.1, $r(y_n) = n^2$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える.
 $a = x_0$ とするとき,

$$EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

は自明. Theorem 3.3 と Theorem 4.3 を利用することにより

$$d(a, \infty) = EW(a, \infty) = 0.$$

Example 5.8. G は Graph 5.2, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える.
 $a = x_0$ とするとき

$$d(a, \infty) = 0, \quad EW(a, \infty) = EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

$EW(a, \infty) = \infty$ の証明は, $Q_{a, \infty} = \{Y(a)\}$ だから, $W(y_n) = 1/n$ として, Theorem 2.7 を使う.

Example 5.9. G は Graph 5.2*, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える.
 $a = x_0$ とするとき

$$d(a, \infty) = 0 < 1 = EW(a, \infty) < \infty = EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

Example 5.10. G は Graph 5.3, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える.
 $a = x'_0$ とするとき

$$d(a, \infty) = EW(a, \infty) = EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

Example 5.11. G は Graph 5.3, $a = x'_0, r(y'_n) = 1$ ($n \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n) < \infty$$

としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. このとき,

$$EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} r(y_n) < \infty = d(a, \infty) = EW(a, \infty).$$

Example 5.12. G は Graph 5.4, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える.
 $a = x'_0$ とするとき,

$$d(a, \infty) = EW(a, \infty) = EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

$EL(a, \infty) = \infty$ の証明は, $W(y_n) = 1/n, W(y'_n) = 0$ ($n \in \mathbf{N}$) として Theorem 2.6 を適用すればよい. Theorem 2.5 により $d^*(a, \infty) = \infty$ が分かる. $d(a, \infty)$ と $EW(a, \infty)$ の計算は Theorem 3.2 と Theorem 4.2 から分かる.

Example 5.13. G は Graph 5.4, $a = x'_0, r(y'_n) = 1$ ($n \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n) < \infty$$

としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. このとき

$$d^*(a, \infty) = EL(a, \infty) = 0 < \infty = d(a, \infty) = EW(a, \infty).$$

$d^*(a, \infty) = 0$ を証明するために, 次式で定義される関数列 $w_n \in L(Y)$ を考える:

$$w_n(y'_k) = \begin{cases} 1/n, & \text{if } n+1 \leq k \leq 2n; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$w_n(y_k) = \begin{cases} 0, & \text{if } 1 \leq k \leq n; \\ (k-n)/n, & \text{if } n+1 \leq k \leq 2n; \\ 1, & \text{if } k \geq 2n. \end{cases}$$

このとき, $w_n \in F_0(a, \infty)$ かつ $I(w_n) = 1$, さらに

$$d^*(a, \infty) \leq H(w_n) = n \frac{1}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} r(y_k) w_n(y_k)^2 + \sum_{k=2n+1}^{\infty} r(y_k)$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} r(y_k) w_n(y_k)^2 < \sum_{k=n+1}^{2n} r(y_k)$$

であることから $n \rightarrow \infty$ のとき $H(w_n) \rightarrow 0$ が導かれるので, $d^*(a, \infty) = 0$.

Example 5.14. G は Graph 5.5, $a = x_0$, $r(y_n^{(k)}) = 1/k^2$ ($n, k \in \mathbb{N}$) としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. このとき, $d(a, \infty) = EW(a, \infty) = \infty$,

$$d^*(a, \infty) = EL(a, \infty) = 0$$

次式で定義される関数列 $w_m \in L(Y)$ を考える:

$$w_m(y_n^{(k)}) = \begin{cases} 1/m, & \text{if } 1 \leq n \leq m, \quad k \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき $w_m \in F_0(a, \infty)$ かつ $I(w_m) = 1$, さらに

$$d^*(a, \infty) \leq H(w_m) = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$m \rightarrow \infty$ とすることにより, $d^*(a, \infty) = 0$. この現象は Example 5.13 と同じである.

参考文献

- [1] T. Kayano and M. Yamasaki, Boundary limit of discrete Dirichlet potentials, Hiroshima Math. J. 14(1984), 401-406.
- [2] T. Nakamura and M. Yamasaki, Extremal length of an infinite network which is not necessarily locally finite, Hiroshima Math. J. 7(1977), 813-826.
- [3] P. Soardi, Potential theory on infinite networks, Lecture Notes in Mathematics 1590, Springer-Verlag, 1994.
- [4] P. Soardi and M. Yamasaki, Classification of infinite networks and its application, Circuits Systems Signal Process 12(1993), 133-149
- [5] M. Yamasaki, Extremum problems on an infinite network, Hiroshima Math. J. 5(1975), 223-250.
- [6] M. Yamasaki, Parabolic and hyperbolic infinite networks, Hiroshima Math. J. 7(1977), 135-146.