

乱流のマルチフラクタル構造における α の確率分布

電通大 細川 巖 (Iwao Hosokawa)

航技研 山本稀義 (Kiyoshi Yamamoto)

1. いとぐち

等方性乱流のマルチフラクタル構造は、一般次元 D_q と関連して次式の中に具現化されている。¹⁾

$$\int \rho(\alpha) r^{(\alpha-1+d)q} r^{-f(\alpha)} d\alpha \Rightarrow r^{(q-1)D_q} \text{ as } r \rightarrow 0 \quad (1)$$

α は乱流場のスケール指数、 d は空間次元、 $f(\alpha)$ は等 α 集合のフラクタル次元、 r はマクロスケール L によって規格化されている。ここで $\rho(\alpha)$ はしかるべき α の測度であるが、未定である。マルチフラクタルの理論において、いまだかつて $\rho(\alpha)$ がくわしく議論されたことはないのので、ここでその妥当なかたちを確定したい。

もしこれができれば、空間における α の分布確率が確定し、 α によって表現できる全ての変数のアンサンブル平均を計算することができる。

じっさいに、理論的に $f-\alpha$ スペクトルがわかっているときの α の確率分布をこのようにして計算し、数値実験などから得られる α の空間分布と比較することは興味があるので、それを試みる。

2. α の確率分布

例によって、式(1)の左辺を鞍部点法によって計算すると、

$$\text{左辺} = \int \rho(\alpha_1) r^{(\alpha_1-1+d)q} r^{-f(\alpha_1)} r^{-f''(\alpha_1)(\alpha-\alpha_1)^2/2} () d\alpha \quad (2)$$

ここで $q = f'(\alpha_1)$, $f''(\alpha_1) < 0$, () には $r \rightarrow 0$ で無視できる因子: $|\log r|^{1/2}$ を付け加えておく。こうすると、両辺ともに r の冪となり、形式が整う。(2)を計算し、(1)と等値すると、まず

$$(\alpha_1 - 1 + d)q - f(\alpha_1) = (q - 1)D_q \quad (3)$$

がえられる。これは良く知られた接触変換の基礎式である。さらに数因子が一致するためには、

$$\rho(\alpha_1) = |f''(\alpha_1)|^{1/2}/(2\pi)^{1/2} \quad (4)$$

でなければならない。

(4)を入れて、(1)を書き直すと、 $q = 0$ の場合、

$$\int [|f''(\alpha) \log r| / (2\pi)]^{1/2} r^{d-f(\alpha)} d\alpha = r^{d-D_0} \quad (5)$$

となる。左辺の被積分関数 ($= p(\alpha; r)$) は α の空間分布の確率を与える。 $d = D_0$ の場合には、右辺 = 1 となり α は全空間を満たして存在するが、 $d > D_0$ のときはそうではない。(例: β モデル。)

Lognormal model の場合、(5)から与えられる確率は、 $D_q = -\mu_q/2 + d$ ($\mu_q = \mu_q(q-1)/2$ と等価。) から出発して $f(\alpha)$ を算出し、

$$f(\alpha) = -(\alpha - 1 - \mu/2)^2/(2\mu) + d \quad (6)$$

を得るから、

$$p(\alpha; r) = r^{(\alpha-1-\mu/2)/2\mu} / [|\log r| / (2\pi\mu)]^{1/2} \quad (7)$$

となる。この時、明らかに $\int p(\alpha; r) d\alpha = 1$ 。

3. 数値実験との比較

乱流の $f - \alpha$ スペクトル (第2図) が分かっている時、(7)のように簡単な解析的フォームでなくても、 $p(\alpha; r)$ を示すことができる。第1図の実線は、等方性乱流の数値計算結果²⁾による $f(\alpha)$ から $p(\alpha; r)$ を計算したものである。点線は p モデル³⁾である。

一方、スケール r の subbox での平均散逸 ε_r から $\varepsilon_r / \varepsilon_L = (r/L)^{\alpha-1}$ の関係によって計算できる α の空間分布が、慣性領域の r において $\circ$, $\times$, $\triangle$, $\square$ によって示してある。

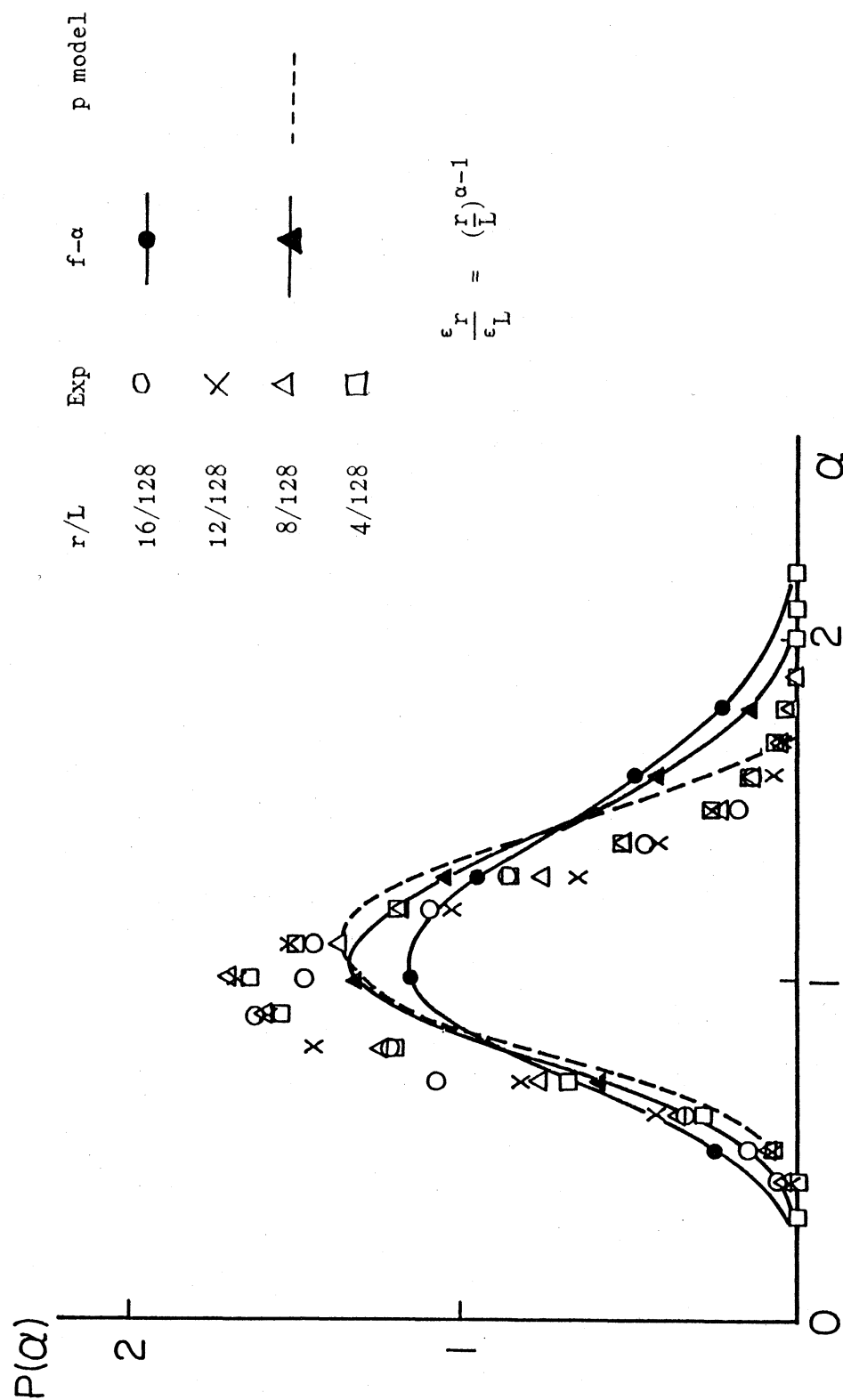
少なくとも、 α の値域は見事に一致しているが、ピークの位置がずれている。理論的には、ピークが $\alpha = 1$ より右にある方が正しい。(7)がそれを示している。Meneveau & Sreenivasan⁴⁾が述べているように、又第2図が示すように、Lognormal model はピーク近傍で正しいのである。

Kolmogorov の 1941 theory は $\alpha = 1$ で成立する。

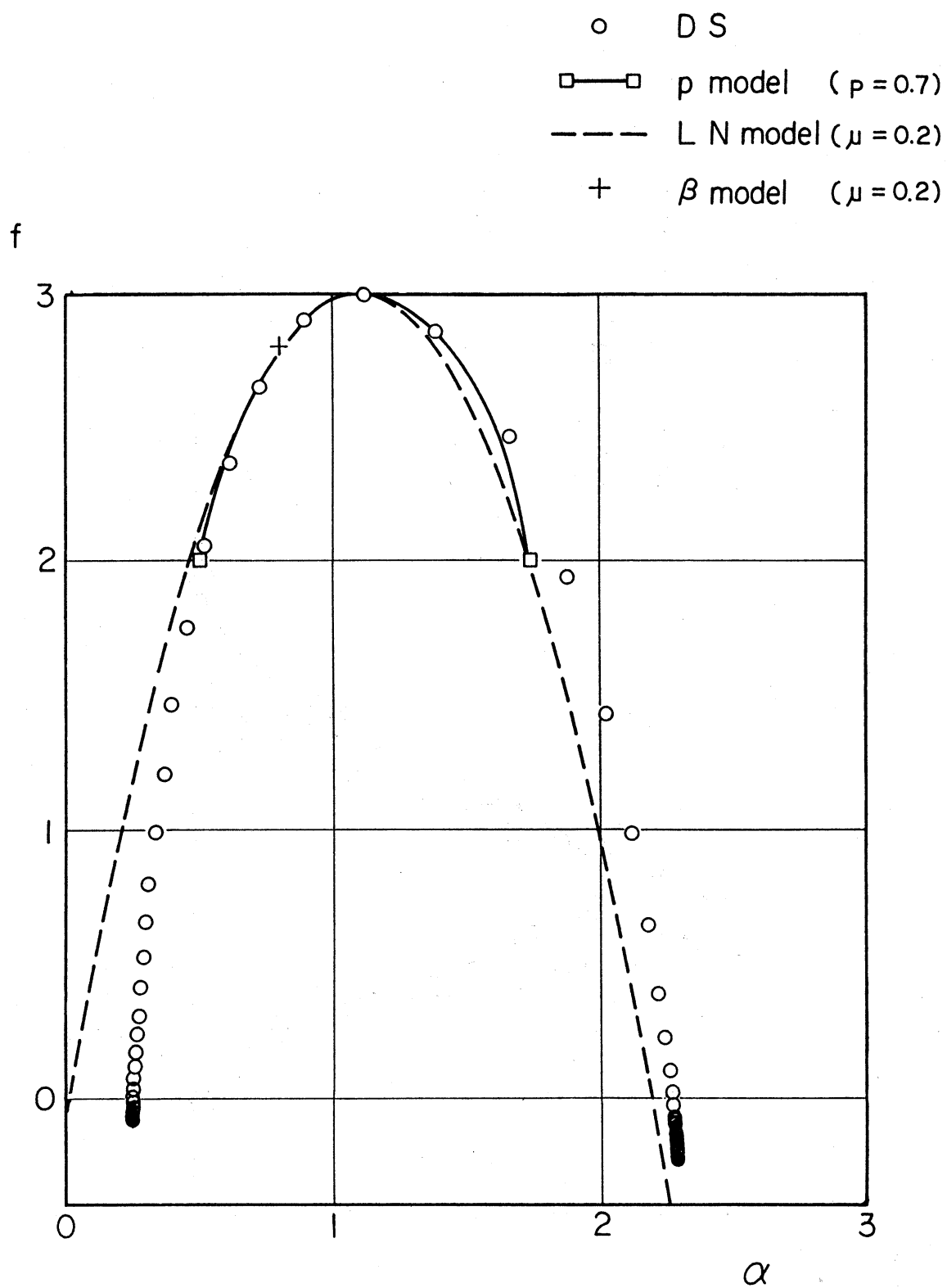
いまのところ、第1図の不一致がレイノルズ数の十分大きくないことによるのか、現実の乱流場が、本来、完全な自己相似性を持たないことに起因するのか、不明である。(マルチフラクタルの理論は $r \rightarrow 0$ において完全な自己相似性を前提している。)

参考文献

- 1) 細川：第45回物理学会講演予稿集（第4分冊），p. 87.
- 2) I. Hosokawa & K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan 59 (1990) 401.
- 3) C. Meneveau & K. R. Sreenivasan: Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.
- 4) C. Meneveau & K. R. Sreenivasan: Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 2 (1987) 49.



第 1 图



第 2 図