

## 有理曲線の輪を含む $V_{10}$ -曲面について

榎 一郎 (上智大 理工)

### §1. Introduction

コンパクト連結の2次元の複素多様体を単に曲面と呼ぶ。 $V_{10}$ -曲面とは、 $b_1=1$ の極小曲面のこと、すなわち、小平の曲面の分類表 [6, I, IV] において、その構造の標が空標、"?" となっている唯一の曲面のことである。例は、次のようにさまざまなものが知られている:

- 0)  $\mathbb{P}^2$ 上の橋田曲面 (の一部)      }  $[6, II]^*$
  - 1) Hopf 曲面
  - 2) 曲線なしの井上曲面 (三種類)  $[7]^*$
  - 3) 放物型井上曲面  $[8], [3 II], [2]^*$
  - 4) Hilbert モッソー型井上曲面  $[8, II], [9]^*$
- (それぞれ,  $[ ]^*$  において特徴付けが与えられる)

ている。) 一方, 加藤 [3, I] は 次のような概念を導入した。

定義 十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\Omega = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid 1 - \varepsilon < \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1 + \varepsilon\}$$

と置く。連結コンパクトな  $n$  次元複素多様体  $X$  に対し, 正則な包含写像  $\varepsilon: \Omega \hookrightarrow X$  があて,  $X - \varepsilon(\Omega)$  が連結となるとき,  $\varepsilon(\Omega)$  を  $X$  の GSS (global spherical shell) といい。

上にあげた例のうち,  $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$  の Hopf 曲面, 故物型井上曲面, Hilbert <sup>モジュラー</sup> 型井上曲面は GSS を含む。さらに別の  $\pi_1$ -曲面が, GSS を含む曲面として構成できる [3, II] [1] (§5 を見よ)。現在 (1981 年末) 知られている  $b_2 > 0$  の  $\pi_1$ -曲面の例は, GSS を含むものでつぎている。

ここでは, GSS の存在定理への第一歩として, 次の定理とその応用について述べる。

定理 1. GSS を含む曲面の任意の変形は, 再び, GSS を含む。

実際, これは, 弱い形ではあるが, 一種の存在定理であって, 次の定理の証明に応用

できる。

定理 2 [9].  $S$  を  $b_2 > 0$  の  $\mathbb{P}^1$ -曲面とする。このとき,  $S$  上の曲線  $C$  で  $b_1(C) \geq 2$  となるものがあれば,  $S$  は GSS を含む。

上の定理において,  $C$  は連結でなくてもよい。一般に,  $b_2 > 0$  の  $\mathbb{P}^1$ -曲面上の曲線は  $3 \geq b_1 \geq 0$  をみたす。  $b_2 = 0$  で曲線を含む  $\mathbb{P}^1$ -曲面は既に決定されている (§ 2, § 3 の事実を見よ)。

## § 2. $\mathbb{P}^1$ -曲面上の曲線

$S$  を  $\mathbb{P}^1$ -曲面,  $C$  を  $S$  上の任意の曲線とする。

$S$  の代数次元が 1 なら,  $S$  は楕円曲面で,  $b_2(S) = 0$ ,  $C$  の連結成分は全て (非特異) 楕円曲線 [5, II].

$S$  の代数次元が 0 なら, [5, I; TR. 5.1] の証明から,  $C$  の仮想種数  $\pi(C)$  に関して次がわかる:

$$1) \quad \pi(C) \leq g(S) - p_g(S) + 1 = 2$$

さらに,  $S$  の  $m$  次不分岐被覆 (これも代数次元 0 の  $\mathbb{P}^1$ -曲面) を考えて ( $m \geq 3$ ), 1) を用いると次がわかる。

2)  $C$  は正規交叉, 各既約成分は, 非特異有理曲線, 通常二重点をもつ有理曲線もしくは非特異楕円曲線のいずれか。

3)  $b_1(C) \neq 0$  なら,  $C$  は  $H_1(S, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  の生成元を代表するループを含む。

### §3. 楕円曲線を含む $\mathbb{P}^2$ -曲面

[6, II] と [2] の結果をあわせると, 次のようになる。

事実. 自己交点数 0 の因子 ( $\neq 0$ ) をもつ  $\mathbb{P}^2$ -曲面は, 楕円曲面, Hopf 曲面, 放物型井上曲面に限る。

この節では, これを用いて, 次を示す (筆者には, 中村郁夫 によって指摘された)。

命題. 楕円曲線を含む  $\mathbb{P}^2$ -曲面は, 楕円曲面, Hopf 曲面, 放物型井上曲面のいずれか。

注意. 全ての楕円曲面, Hopf 曲面は楕円曲線を含む。しかし, 放物型井上曲面  $S_{m,d,t}$  (記号は [2] のもの, とくに  $t \in \mathbb{Q}^n$ ) は,  $t=0$  のとき楕円曲線を含むが,  $t \neq 0$  のときは楕円曲線を含まない。

まず、次を示す。

井上の補題.  $S$  を楕円曲線  $E$  を含む  $b_1(S)=1$  の曲面とすると,  $S$  上の自明でない直線束  $F$  で

$c_1(F)_{\mathbb{R}} = 0$ ,  $F|_E$  は自明  
となるものがある。

☹ 完全列  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow 0$  から, 図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^1(S, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(S, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^1(S, \mathbb{C}^*) \\
 & & \parallel & & \parallel & & \downarrow r \\
 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{C} & & H^1(E, \mathbb{C}^*) \cong E
 \end{array}$$

をえる, ただし  $r$  は制限写像。この図式において, 群は全て複素 Lie 群, 写像は全て Lie 群の準同型になっている。(したがって  $H^1(S, \mathbb{C}^*)$  は  $\mathbb{C}^*$  を Lie 部分群を含む。よって  $\text{Ker}(r) \neq \{0\}$ .  $\text{Ker}(r) - \{0\}$  の元が求める  $F$  を定める。

命題の証明.  $S$  を  $\mathbb{P}_0$ -曲面,  $E \subset S$  を楕円曲線,  $F$  を井上の補題による  $S$  上の直線束,  $K$  を  $S$  の標準直線束とする。完全列  $0 \rightarrow \mathcal{O}(F-E) \rightarrow \mathcal{O}(F) \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$  から導かれるコホモロジー群の長完全列を考える。  $S$  は  $\mathbb{P}_0$  なので,  $\chi(S, \mathcal{O}(F)) = \chi(S, \mathcal{O}) = 0$  ([6 II]). よって次のいずれかがおこることがわかる。

i)  $H^0(S, \mathcal{O}(F)) \neq 0$

$$ii) \begin{cases} H^2(S, \mathcal{O}(F-E)) \cong H^0(S, \mathcal{O}(K-F+E)) \neq 0 \\ H^2(S, \mathcal{O}(F)) \cong H^0(S, \mathcal{O}(K-F)) = 0 \end{cases}$$

i) このとき, 因子  $D$  により  $F = [D]$  とかける.  $F \neq 0$  なので,  $D \neq 0$ .  $c_1(F)_{\mathbb{R}} = 0$  なので,  $D^2 = 0$ . よって, 命題は, 事実 から従う.

ii)  $S$  は  $\mathbb{P}^2$  なので, 任意の因子  $\Delta$  に対し,  $\Delta^2 \leq 0$  である ([6, II]). さて因子  $D = \sum m_\nu \mathcal{C}_\nu$  により  $K-F+E = [D]$  とかく. ただし  $m_\nu \geq 0$ , 各  $\mathcal{C}_\nu$  は既約曲線とする. 事実により,  $\mathcal{C}_\nu^2 < 0$  の場合を調べればよい.  $\mathcal{C}_\nu$  は第一種例外曲線ではないので,  $K \cdot \mathcal{C}_\nu \geq 0$ . II) の2つ目の条件が  $\mathcal{C}_\nu \neq E$ . よって,

$$0 \geq D^2 = \sum m_\nu \{ K \cdot \mathcal{C}_\nu + E \cdot \mathcal{C}_\nu \} \geq 0.$$

すなわち  $D^2 = 0$ .

$D \neq 0$  なる命題は 事実 から従う.

$D = 0$  のときは,  $K = F - E$ . そこで完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-F-E) \rightarrow \mathcal{O}(-F) \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

から導かれるユキモロツ君の長完全列を考えたと,  $\chi(S, \mathcal{O}(-F)) = 0$  により, 次の1)が確かにおこることがわかる.

$$ii-a) \quad H^0(S, \mathcal{O}(-F)) \neq 0$$

$$ii-b) \quad H^2(S, \mathcal{O}(-F-E)) \cong H^0(S, \mathcal{O}(2F)) \neq 0.$$

いずれの場合も、i) のときと同じ理由により、命題は 事実 から従う。

#### §4 $b_1 \geq 2$ の曲線を含む $\mathbb{P}^2$ -曲面 — 定理2の証明

定理1を仮定して、定理2を証明する。§2と§3の結果から、次の条件 I), II) を満たす場合のみを考えればよい。

I)  $S$  は有理曲線からなる2つのひげなしの車輪,  $C_1, C_2$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , を含む。  $C = C_1 \cup C_2$  とかく。

II)  $S$  上の任意の曲線の交点行列は負定値。

$K$  を  $S$  の標準直線束とする。次から始める。

Step 1 (#上).  $K = [-C_1 - C_2]$ .

☺ まず  $H^0(S, \mathcal{O}(K+C)) \neq 0$  を示す。  $= 0$  とせば、  $\chi(S) = 1$  なので、完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(K) \rightarrow \mathcal{O}(K+C) \rightarrow \mathcal{O}_C(K+C) \rightarrow 0$$

から導かれるコホモロジー群の長完全列を考えると、

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(K+C)) \cong H^0(C_1, \mathcal{O}_{C_1}(K+C_1)) \oplus H^0(C_2, \mathcal{O}_{C_2}(K+C_2)) \cong \mathbb{C}.$$

よって (必要なら、番号をうけかえて)  $H^0(C_1, \mathcal{O}_{C_1}(K+C_1)) = 0$ . 一方、仮定により、  $H^0(S, \mathcal{O}(K+C_1)) = 0$  なので、完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(K) \rightarrow \mathcal{O}(K+C_1) \rightarrow \mathcal{O}_{C_1}(K+C_1) \rightarrow 0$$

から導かれるコホモロジー群の長完全列を考えると、矛盾が生いることがわかる。

因子  $D = \sum m_i \mathcal{O}_{C_i}$  において,  $K+C = [D]$  とかく, ただし  $\mathcal{O}_{C_i}$  は既約,  $m_i \geq 0$ . 条件 I) II) を用いると  $(K+C) \cdot \mathcal{O}_{C_i} \geq 0$  がわかる. こゝから  $D^2 \geq 0$  が従い, 条件 II) により,  $D=0$ . 結局,  $K+C=0$ , すなわち,  $K=-C_1-C_2$ .

Step 2 . . . 任意の  $m$  に対し,  $H^0(S, \Omega^1(mC_1)) = 0$ .

☹  $\eta \in H^0(S, \Omega^1(mC_1))$  を任意にとる.  $b_2 > 0$  なので,  $S$  上の有理函数は定数のみ. ゆえに, Step 1 を用いて,

$$H^0(S, \Omega^2((m+1)C_1)) \cong H^0(S, \mathcal{O}((mC_1 - C_2))) = 0.$$

従って,  $d\eta = 0$  となり, 表現

$$\mu: H_1(S-C_1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mu([\gamma]) = \int_{\gamma} \eta$$

が定まる. ここで,  $C_1$  の交点行列は負定値なので,  $H_1(S-C_1, \mathbb{R}) = H_1(S, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$  となる. さらに, §2 の 3) により,  $C_2$  は  $H_1(S-C_1, \mathbb{R})$  の生成元を代表するループ  $\gamma_0$  を含む. 一方,  $\eta$  は  $C_2$  上正則で,  $C_2$  は有理曲線からなるので,  $\int_{\gamma_0} \eta = 0$ . 結局  $\mu = 0$ .

$\mu = 0$  により,  $f(x) = \int^x \eta$  は  $S-C_1$  上の一価な正則函数を定める.  $C_1$  の交点行列は負定値なので,  $f$  は  $S$  まで正則に拡張される. 従って  $f$  は定数, すなわち,  $\eta = 0$ .

$\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \in T}$ ,  $S_0 = S$ , を  $S$  の変形の完備な複素解析族とする。

Step 3.  $S$  の微小変形  $S_t$  で 橋田曲線をもつものがある。

⊙  $M$  を  $C_1$  の近傍とする。  $C_1$  の交点行列は負定値なので,  $M$  において,  $C_1$  を一点につぶしたものは  $\text{Stem}$  空間になるとして,  $m > 0$  に対して, 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-mC_1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}|_{mC_1} \rightarrow 0$$

からのコホモロジー群の完全列を考える。  $M$  は 2次元強擬凸なので,  $H^2(M, \mathcal{O}(-mC_1)) = 0$ . Rossi の結果から,  $m > 0$  を適当にとれば, 制限によって同型  $H^1(M, \mathcal{O}) \cong H^1(C_1, \mathcal{O}|_{mC_1})$  をえる。一方, Step 1, 2 により,

$$H^2(S, \mathcal{O}(-mC_1)) \cong H^0(S, \Omega^2((m-1)C_1 - C_2)) = 0.$$

結局, 上とあわせて,

$$(\star) \quad \begin{cases} H^2(S, \mathcal{O}) = H^2(M, \mathcal{O}) = 0, \\ H^1(S, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) \text{ は全射.} \end{cases}$$

さて, 2次元強擬凸な様体の変形に関しては, 小平-Spencer 型の定理が成り立つので,  $(\star)$  により,  $\mathcal{S}$  は,  $C_1$  の近傍の全ての変形を実現していることがわかる[11]. 一方, 交点行列負定値の有理曲線の射影の近傍の微小変形で, 橋田曲線をもつものの存在は知られていた (Karnas).

Step 4.  $S_t$  は, Hopf 曲面か放物型井上曲面の blow-up.

☹ Step 1 により,  $S$  の 12-種数  $P_{12}(S) = 0$ . よって, その微小変形  $S_t$  に対しても,  $P_{12}(S_t) = 0$ . すなわち, もし  $S_t$  が楕円曲面なら,  $S_t$  は Hopf 曲面の blow-up となる [6, II]. ゆえに Step 3 と §4 の命題から Step 4 が従う.

Step 5.  $\pi_1(S) \cong \pi_1(S_t) \cong \mathbb{Z}$ .

☹  $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$  を普遍被覆とし,  $\pi_1(S)$  は被覆変換群と同一視する. §2 の 3) により, 各  $\pi^{-1}(C_i)$  の連結成分は, 有理曲線からなる鎖である. 一方,  $b_1(S) = 1$  なので,  $\pi^{-1}(C_i)$  は, 有限個の連結成分からなる. また,  $g \in \pi_1(S)$  は,  $g \neq \text{id}$  なる固定点をもたない. よって,  $g|_{\pi^{-1}(C)} = \text{id}$  なら  $g = \text{id}$  である. 以上より,

$G = \{g \in \pi_1(S) \mid g \text{ は } \pi^{-1}(C) \text{ の各連結成分を同じ成分に写す}\}$   
は  $\pi_1(S)$  の, 指数有限の正規部分群となる.  $S' = \tilde{S}/G$  は,  $S$  の有限次不分枝被覆で, 代数次元 0 の  $\mathbb{P}^1$ -曲面であるから,  $S'$  に含まれる有理曲線の数  $n$  は高々 2 (§2, 1)). 結局, 各  $\pi^{-1}(C_i)$  は連結で,  $\pi_1(S) \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  となった. さらに  $b_1(S) = 1$  なので,  $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}$ .

これで, 定理 1 が応用できる.

最後の Step  $S$  は GSS を含む.

☹  $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$  の Hopf 曲面と, 放物型井上曲面は GSS を

含む (c.f. §5). GSSを含む曲面の blow-up も GSS を含む。  
 よって, Step 4 と Step 5 により,  $S_t$  は GSS を含む。定理 1 に  
 より, その変形,  $S$  も GSS を含む。

### §5. GSS を含む曲面, I

GSS を含む曲面は 全て 次のようにして構成で  
 きる。  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  に対して,  $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$  とかく。

$$\textcircled{1} \quad B = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1 + \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$$

と置く。  $B$  から,  $B - \overline{\Omega}$  (の total transform) 上の点の  $m$   
 回 blow-up したものを  $Z$  とする。  $\Omega \subset Z$  とみなす。

②  $Z - \overline{\Omega}$  の一点をとり, その点のまわりの座標近  
 傍  $(U, w)$  を適当にとり,

$$B' = \{w \in U \mid |w| < 1 + \varepsilon\} \subset\subset U \subset\subset Z - \overline{\Omega}$$

$$\Omega' = \{w \in U \mid 1 - \varepsilon < |w| < 1 + \varepsilon\}$$

$$N' = B' - \Omega'$$

とする

③  $\sqrt{\text{全射}}$  双正則写像  $\zeta: B \rightarrow B'$  を適当にとる。

$Z-N'$  において, 各  $\alpha \in \Omega$  と  $\zeta(\alpha) \in \Omega'$  とを同一視したものを  $S$  とすると,  $S$  は  $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}$ ,  $b_2(S) = n$  の曲面となる。  $Z$  において  $\bar{\Omega} \cap \Omega' = \emptyset$  なので,  $\Omega \subset S$  とみなせる。 さらに  $S - \Omega = Z - \Omega \cup B'$  は連結なので,  $\Omega$  は  $S$  の GSS である。

さらに具体的に見よう (cf. [1], [3], [8], [9]).  $B$  から  $Z$  を与える blow-up の過程を

$$B = W_0 \xleftarrow{\sigma_1} W_1 \xleftarrow{\sigma_2} \cdots \xleftarrow{\sigma_{m-1}} W_{m-1} \xleftarrow{\sigma_m} W_m = Z$$

とかく。ここで,  $\sigma_i$  は点  $p_i \in W_{i-1}$  における blow-up とし,  $C_i = \sigma_i^{-1}(p_i)$  とする。 proper transform には同じ記号をあたえる。  $\lambda: Z - N' \rightarrow S$  を自然な射影とすると, 各  $C_i$  に対して,  $S$  上の有理曲線  $\mathcal{H}_i$  があって,

$$\lambda(C_i \cap Z - N') \subset \mathcal{H}_i \quad i=1, 2, \dots, m$$

となる。また  $S$  上の有理曲線は, これら  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_m$  に限る。

さて,

$$C_{j-m} = \zeta^{-1}(C_j \cap B') \subset B$$

において, 以下

$$p_{i+1} \in C_i \quad i=0, 1, 2, \dots, m-1$$

と仮定する (これは  $S$  が極小であるための条件である)。このとき,  $p_{i+1}$  の位置には, 次の2つのタイプがある。

$$\alpha) \quad p_{i+1} \in C_i - \bigcup_{j < i} C_j$$

$$\beta) \quad p_{i+1} \in C_i \cap \bigcup_{j < i} C_j.$$

したがって、 $S$  には 次の4つのタイプがある。

O)  $n=0$ , すなわち  $B$  を blow-up しないとき。

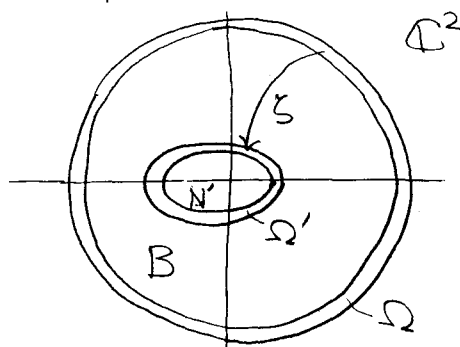
A)  $p_{i+1}$  の位置のタイプが全て  $\alpha$  型のとき。

B)  $p_{i+1}$  の位置のタイプが全て  $\beta$  型のとき。

AB)  $p_{i+1}$  の位置のタイプに  $\alpha$  型,  $\beta$  型の両方があるわ  
るとき。

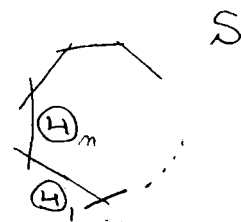
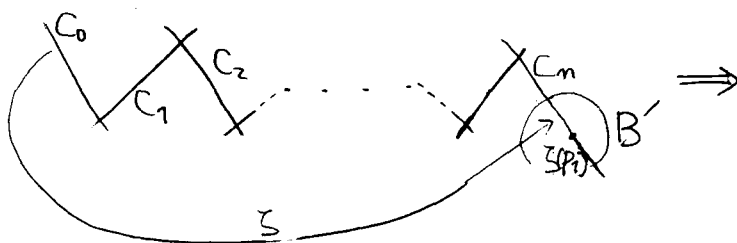
各タイプをくわしく見よう。

O) このとき  $S$  は  $(\pi_1 \cong \mathbb{Z})$   
の) Hopf 曲面である (右図)。



A) このとき,  $C_i$  の配

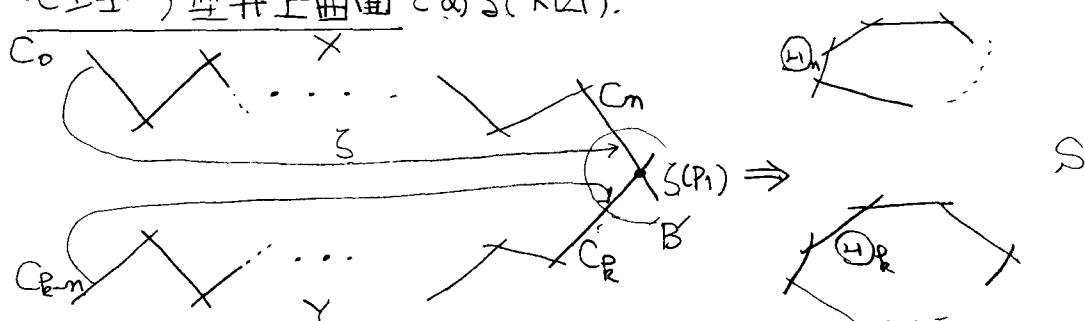
置は鎖状になる。  $S$  上  $\sum \Theta_i$  はひげなしの輪で、自己交点  
数  $(\sum \Theta_i)^2$  は 0 (下図)。



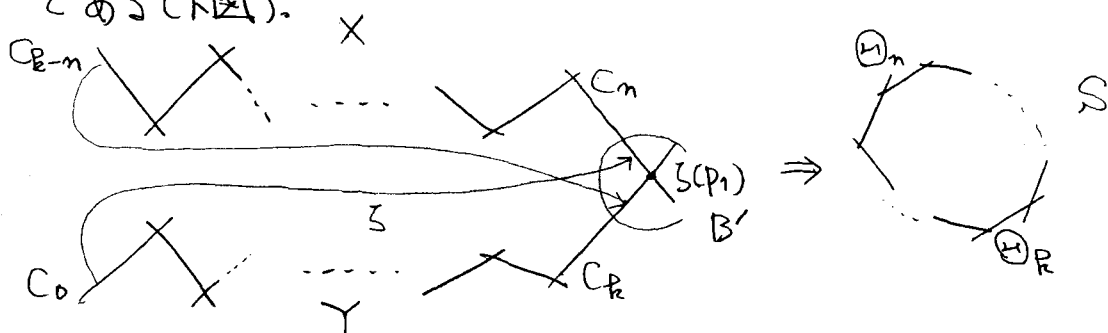
すなわち,  $S$  は 放物型井上曲面 である。

B) このとき,  $\bigcup_{j \leq n} C_j \cap (Z-N)$  は 2つの連結成分  $X, Y$  から成る. さらに2つの場合に分れる.

B<sub>0</sub>)  $\zeta(X \cap \Omega) \subset X \cap \Omega', \zeta(Y \cap \Omega) \subset Y \cap \Omega'$  となるときは,  $\Sigma(4)_i$  は 2本の ひがな(の車輪),  $S$  は Hilbert モジュラー型井上曲面である(下図).

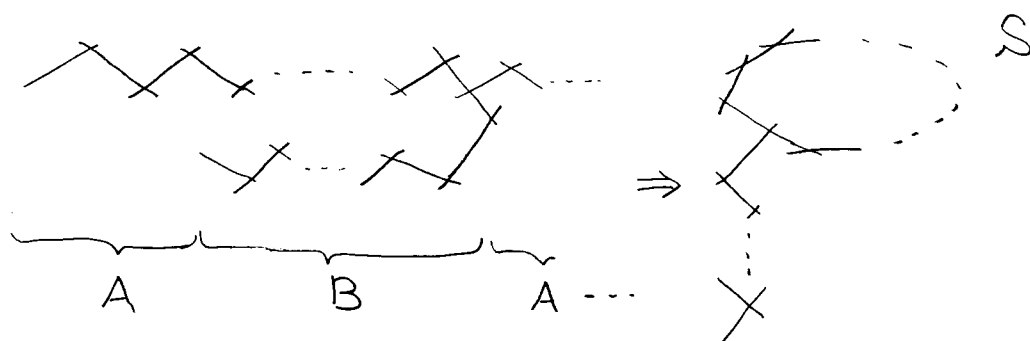


B<sub>1</sub>)  $\zeta(X \cap \Omega) \subset Y \cap \Omega', \zeta(Y \cap \Omega) \subset X \cap \Omega'$  となるときは,  $\Sigma(4)_i$  は 1本の ひがな(の車輪)となる.  $S$  は, 自己双対 Hilbert モジュラー型井上曲面を二重被覆にもつ曲面である(下図).



AB) このとき,  $\bigcup_{j \leq n} C_j$  の配置の中に A型:  $\sim \sim \dots$  と B型:  $\sim \dots \sim$  が交互にあふわれる. したがって,  $\Sigma(4)_i$

は、ひげつきの一本の輪となる。ひげの本数は、B型フロウの個数に等しく、各ひげは、分岐なしの鎖状である。



この  $S$  は 加藤曲面 と呼ばれる。

## §6. GSSを含む曲面, II

定理1の証明のための準備をしておく。  $S$  を GSSを含む曲面とする。

1)  $S$  の開被覆  $\{E_i\}_{i=1}^m$ ,  $m \geq 3$ , で次をみたすものがある。

i)  $E_i$  は  $B_{i-1}^* - \overline{D_i}$  (か その blow-up)。

ここで,  $B_{i-1}$  は  $\mathbb{C}^2$  内の有界 Stein 領域,

$\alpha_i: B_{i-1}^* \rightarrow B_{i-1}$  は一点の blow-up もしくは恒等写像

$D_i \subset B_{i-1}^*$  は,  $B_{i-1}^*$  のある座標近傍内の有界 Stein 領域,

よく、 $B_0$  として、球  $\{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1\}$  をとれる。

ii)  $E_j \cap E_k \neq \emptyset$  なら、 $j \equiv k \pm 1 \pmod{m}$ 。

iii)  $E_i \cap E_{i+1}$  上の正則関数は全て、 $E_{i+1}$  上で正則に拡張される、ただし、 $E_{m+1} = E_1$  とする。

⊙⊙  $S$  が極小のときを示せば十分である。§5 の記号を用いる。 $S$  は、 $\mathbb{C}^2$  内の球  $B$  の  $m$  回 blow-up

$$B = W_0 \xleftarrow{\alpha_1} W_1 \xleftarrow{\alpha_2} W_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{\alpha_{m-1}} W_{m-1} \xleftarrow{\alpha_m} W_m = \mathbb{C}^2$$

と、うめ返り  $\zeta: B \rightarrow B' = \zeta(B) \subset \mathbb{C}^2$  から定まった。 $B_0 = B$ ,  $D_m = B' - \overline{\Omega}'$  とする。blow-up  $\alpha_{i+1}$  の中心を  $p_{i+1} \in W_i$  として、 $W_i$  のある座標近傍内の有界 Stein 領域  $D_i, B_i$  を、 $p_{i+1} \in \overline{D_i} \subset B_i$  を満たすようにとる。さらに条件

$\alpha_2 \circ \alpha_{i+1} \circ \cdots \circ \alpha_m (\zeta(p_1)) = p_i$ ,  $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_m \circ \zeta(B_0) \subset B_0$  があるので、 $D_i, B_i$  を、

$$\alpha_i(B_i) \subset D_{i-1}$$

を満たすようにとれる。この  $B_i, D_i$  から、 $E_i$  を i) において定めれば、 $\{E_i\}$  は  $S$  の開被覆を定め、ii) を満たす。

$m \geq 3$  なら、iii) は Hartogs の定理から従う。 $m \leq 2$  のときは、さらに、 $E_i$  を適当に分割すればよい。

i)  $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{E}_j$  は,  $\tilde{E}_j$  を順につないだもの(下図).

よくに,  $\tilde{S}$  において,  $\tilde{E}_j \cap \tilde{E}_R \neq \emptyset$  なる  $j = R \pm 1$ .

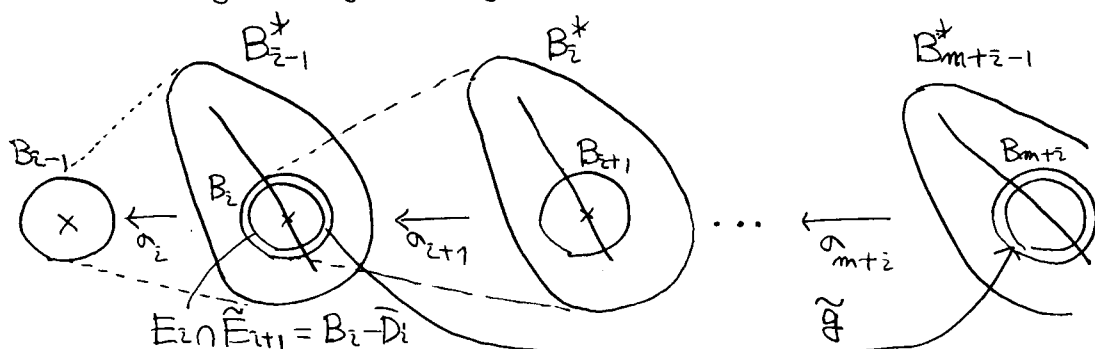
3) i)  $\tilde{E}_2 \rightarrow E_2 CB_{2-1}^*$  正則寫像

に拡張された

$$\text{iii) } p_{2+1} \in \bigcap_{\nu \geq 1} \overline{f_{\mathcal{Q}^{\nu}} \left( \bigcup_{j \geq 2} \tilde{E}_j \right)}.$$

⊙ 各  $1 \leq i \leq m$  に対して,  $\alpha_i: B_{i-1}^* \rightarrow B_{i-1}, D_i$  の  
 $\gamma_k \circ \alpha_j: B_{j-1}^* \rightarrow B_{j-1}, D_j, j = \nu m + i, \nu \in \mathbb{Z}, i$

とて,  $\tilde{E}_j = B_{j-1}^* - \bar{D}_j$  (もしくはそのblow-up) とみなす.



i) 各  $\nu \geq 1$  に対して,

$$\alpha^{(\nu)} = \alpha_{z+1} \circ \alpha_{z+2} \circ \cdots \circ \alpha_{\nu+m+z} : \left( \bigcup_{j=z}^{\nu+m+z} \tilde{E}_j \right) \cup \bar{D}_{\nu+m+z} \rightarrow B_{z-1}^*$$

は,  $B_{z-1}^*$  の blow-up で,  $\tilde{E}_z \subset B_{z-1}^*$  の拡張である。よって,  $f = \lim_{\nu} \alpha^{(\nu)}$  とおけばよい。

ii)  $\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  は  $\tilde{g}|_{\tilde{E}_j}$  が自然な同型  $\tilde{E}_j \rightarrow \tilde{E}_{j+m}$

となるように定める (Step 2 の図)。このとき,

$g = f \circ \tilde{g} \circ f^{-1} : B_z - \bar{D}_z \rightarrow B_z$  は正則で,  $B_z$  まで拡張される。さらに,  $g(B_z) \subset \bar{D}_z \subset B_z$  となるので,  $g$  は固定点  $p_{z+m} \in \bar{D}_z$  をもつ  $B_z$  の contraction となる [3, I, Lemma 1]。

iii)  $S$  が極小の場合を考えればよい。まず  $b_2(S) > 0$  とする。各  $\nu \geq 1$  に対し,  $\bigcup_{j=z}^{\nu+m+z} \tilde{E}_j$  は第一種例外曲線を含まない。とくに,  $a \in B_{z-1}^*$  に対して,  $\alpha^{(\nu)-1}(a)$  が, 1次元なら,  $\alpha^{(\mu)-1}(a)$ ,  $\mu \geq \nu$ , も1次元となつて,  $\alpha^{(\nu)-1}(a) \cap \bar{D}_{\nu+m+z} \neq \emptyset$ , すなわち,

$$a \in \alpha^{(\mu)}(\bar{D}_{\mu m+i}), \quad \forall \mu \geq \nu.$$

一方,  $\alpha^{(\mu)}(\bar{D}_{\mu m+i}) = g^{\mu}(\bar{D}_i)$  とかH,  $g$  は  $P_{i+1}$  の contraction なので,  $a = p_{i+1}$ . 結局, 各  $\alpha^{(\mu)}$  は,  $P_{i+1}$  上の  $\alpha$  の blow-up. とくK,

$$(B_{i-1}^* - g^{\mu}(\bar{D}_i)) \cup \{p_{i+1}\} = \alpha^{(\omega)}\left(\bigcup_{j=i}^{\mu m+i} \tilde{E}_j\right).$$

そこで,  $\nu \rightarrow \infty$  とすれば, iii) が従う。

$b_2(S) = 0$  のときは,  $S$  は Hopf 曲面で,  $f g^{\mu}(\bigcup_{j=i}^{\mu m+i} \tilde{E}_j)$  は,  $P_{i+1}$  の近傍から,  $P_{i+1}$  を除いたものである。

## §7. GSS を含む曲面の微小変形 — 定理1の証明, I

§§7, 8 で 定理1 を証明する。この節では次を示す。

GSS を含む曲面  $S$  の微小変形は全て GSS を含む。

まず, 第一種例外曲線は微小変形は安定なので,  $S$  は極小としてよい。以下, §6 の記号をそのまま用いる。

Step 1. i) 制限  $H^1(B_{i-1}^* - \{P_{i+1}\}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(B_i - \{P_{i+1}\}, \mathbb{Q})$  は同型。

ii)  $\sum \subset B_i$  を  $P_{i+1}$  を含む <sup>(C<sup>n</sup>)</sup> 実超曲面とする。

$\theta \in H^1(B_i - \{P_{i+1}\}, \mathbb{Q})$ ,  $\omega \in H^0(B_i, \Omega^1 \otimes \Omega^2)$  に對して,

$$\langle \theta, \omega \rangle = \int_{\Sigma} \langle \varphi, \omega \rangle$$

と定義すると, これは非退化な pairing となる。ただし,  $\varphi$  は  $\theta$  を代表する  $\odot$ -値  $C^\infty(0,1)$ -形式,  $\langle \varphi, \omega \rangle$  は,  $\varphi$  の  $\odot$ -成分を,  $\omega$  の  $\Omega^1$ -成分で値をとった  $C^\infty(2,1)$ -形式。

☺ i) 局所コホモロジー群の完全列から定まる可換図式 (層  $\odot$  は略す)

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(B_{i-1}^*) & \longrightarrow & H^1(B_{i-1}^* - \{p_{i+1}\}) & \longrightarrow & H_{\{p_{i+1}\}}^2(B_{i-1}^*) & \longrightarrow & H^2(B_{i-1}^*) \\ \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow e & & \downarrow \\ H^1(B_i) & \longrightarrow & H^1(B_i - \{p_{i+1}\}) & & H_{\{p_{i+1}\}}^2(B_i) & \longrightarrow & H^2(B_i) \end{array}$$

において,  $B_j$ ,  $j=i, i-1$ , は Stein なので,  $H^2(B_j) = H^2(B_j^*) = 0$ ,  $j > 0$ . さらに,  $e$  は切陈定理により同型なので, 制限  $r$  も同型。

ii)  $\mathbb{C}^2$  の座標を  $(z_1, z_2)$  とする。  $B_i \cap (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)$ ,  $B_i \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$  は  $B_i$  の Stein 被覆なので  $\theta \in H^1(B_i - \{p_{i+1}\}, \odot)$  の Čech コホモロジーの代表は,  $\sum_{i=1}^2 a_{p_i}^i \frac{1}{z_1^{p_i} z_2^{q_i}} \frac{\partial}{\partial z_2}$  とかける。ただし,  $a_{p_i}^i \in \mathbb{C}$ ,  $p_i \geq 1, q_i \geq 1$ . もし  $a_{p_i}^i \neq 0$  なら,  $\omega_{p_i}^i = z_1^{p_i-1} z_2^{q_i-2} dz_1^2 \otimes (dz_1 \otimes dz_2)$  とおくと,  $\langle \theta, \omega_{p_i}^i \rangle \neq 0$ . すなわち, 任意の  $\omega \in H^1(B_i, \Omega \otimes \Omega^2)$  に対して,  $\langle \theta, \omega \rangle = 0$  なら,  $\theta = 0$ .

Step 2. 制限  $H^1(S, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(E_i, \mathcal{H})$  は 0-写像.

⊙  $\theta \in H^1(S, \mathcal{H})$  を任意にとる. §6, 3) iii) によ, 図式

$$H^1(S, \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(E_i, \mathcal{H})$$

$$\lambda^* \downarrow \quad \hookrightarrow \quad \uparrow (E_i \hookrightarrow B_{i-1}^*, \text{ による制限})$$

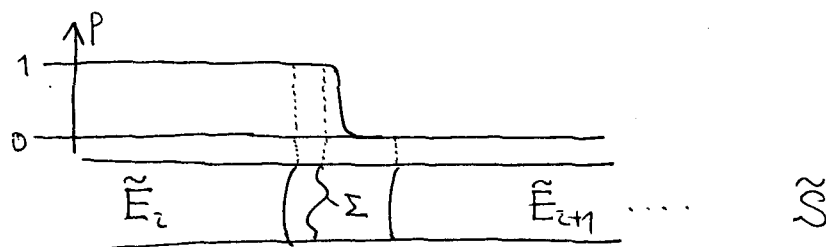
$$H^1(\tilde{S}, \mathcal{H}) \xrightarrow{f^*} H^1(B_{i-1}^* - \{P_{i+1}\}, \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(B_i - \{P_{i+1}\}, \mathcal{H})$$

をえる. Step 1 によ, 任意の  $\omega \in H^0(B_i, \Omega' \otimes \Omega')$  に対,  $\langle f^* \lambda^* \theta, \omega \rangle = 0$  を示せばよい. 以下, 適当に  $f^*, \lambda^*$  を略す.

$\theta$  を代表する  $\mathcal{H}$ -値  $(0,1)$ -形式  $\psi$  をとる.  $\omega \in H^0(B_i, \Omega' \otimes \Omega')$  は任意とする.  $\tilde{S}$  上の  $C^\infty$  函数  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ , を

$$p(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\bigcup_{j \leq i} \tilde{E}_j) - \tilde{E}_{i+1} \\ 0 & x \in (\bigcup_{j \geq i} \tilde{E}_j) - \tilde{E}_i \end{cases}$$

と定め, 超曲面  $\Sigma \subset \tilde{E}_i \cap \tilde{E}_{i+1} (\subset B_i)$  を,  $p|_\Sigma = 1$  とするよ



うにとる. すると,  $\bar{\partial} p$  は,  $S$  上の  $C^\infty$  形式  $\eta$  を定め,  $\eta \wedge \omega$  は,  $S$  上の  $\Omega^1$ -値  $C^\infty(2,1)$  形式に拡張される. さらに,

$$d \langle \psi, p \omega \rangle = \langle \psi, \bar{\partial} p \wedge \omega \rangle$$

となるから,

$$\textcircled{\star} \quad \langle \theta, \omega \rangle = \int_{\Sigma} \langle \gamma, \omega \rangle = \int_S \langle \gamma, \gamma \lrcorner \omega \rangle$$

とわかる。

さて,  $g$  は  $p_{L+1}$  の contraction なので,  $g_{p_{L+1}}^*$  の norm は 1 より小さい。よって  $(1-g^*)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g^*$  が  $p_{L+1}$  のまわりで定義され,  $p_{L+1}$  のまわりの  $\Omega^1$ -値正則 2-形式  $\xi$  として

$$\textcircled{\star\star} \quad g^* \xi - \xi = \omega$$

をみたすものがある。  $g$  が  $p_{L+1}$  の contraction なので,  $\xi$  は  $B_L$  まで  $\textcircled{\star\star}$  をみたす正則 1-形式とできる。

$\tilde{E}_1 \cup \dots \cup \tilde{E}_m$  上の  $\Omega^1$ -値  $C^{\infty}(2,0)$ -形式  $\tilde{\varphi}$ ,

$$\tilde{\varphi} = p \tilde{g}^* f^* \xi + (1-p) f^* \xi$$

は,  $S$  上の  $\Omega^1$ -値  $C^{\infty}(2,0)$ -形式  $\varphi$  を定める。  $\textcircled{\star\star}$  により,

$$\bar{\partial} \varphi = \gamma \lrcorner \omega$$

となる。  $\langle \gamma, \bar{\partial} \varphi \rangle = d \langle \gamma, \varphi \rangle$  で,  $\gamma$  は  $S$  上定義されているので,  $\textcircled{\star}$  により,

$$\langle \theta, \omega \rangle = \int_S \langle \gamma, \gamma \lrcorner \omega \rangle = \int_S d \langle \gamma, \varphi \rangle = 0.$$

最後の Step Step 2 により,  $H^1(S, \mathbb{Q}) \cong \check{H}^1(\{E_i\}, \mathbb{Q})$ 。

これにより,  $\theta \in H^1(S, \mathbb{Q})$  を,  $\theta = \{\theta_{ij}\}$  とかくと,  $S$  の  $\theta$ -方向の微小変形  $S_t$  は,  $E_i$  と  $E_j$  のはりあわせを,  $\theta_{ij}$ -方向にずらすせはえられる。  $B_0$  は球だったので,  $E_1$  のうちが  $S_t$  にあっても GSS を定める。

## §8. GSSを含む曲面の変形極限 — 定理1の証明, II

この節で, 次を示して, 定理1の証明を完結させる。

$\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \in T}$  が 曲面の変形族,  $\{t_j\} \subset T$  が  $t_\infty \in T$  へ収束する点列で, 各  $S_{t_j}$  は GSS を含むとき,  $S_{t_\infty}$  も GSS を含む。

Step 1.  $S_t$  の 普遍被覆 を  $\tilde{S}_t \rightarrow S_t$  とかいいて,  $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{S}_t\}_{t \in T}$  とおく。微分同型  $S_{t^*} \times T \rightarrow \mathcal{S}$  から定まる微分同型

$$u: \tilde{S}_{t_\infty} \times T \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}, \quad u_j: \tilde{S}_{t_\infty} \rightarrow \tilde{S}_{t_j}$$

を固定する。  $\Omega$  を  $S_{t_1}$  の GSS とすると,  $\Omega \hookrightarrow S_{t_1}$  は,  $\Omega \hookrightarrow \tilde{S}_{t_1}$  にも上がる。これより,  $u$  により,  $\Omega \times T \hookrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$  へ拡張される。  $\Omega \times \{t\} \subset \tilde{\mathcal{S}}$  を  $\Omega_t \subset \tilde{S}_t$  とかく。  $\tilde{S}_t - \Omega_t$  は 2つの連結成分から成っている。

以下, "もし必要なら, 部分列をとって" は略す。

Step 2  $B = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1\}$  とおく。このとき,

- $\tilde{S}_{t^*} - \Omega_{t^*}$  のある連結成分  $N$ ,
- 正則写像  $f_j: N_j = u_{t_j}(N) \rightarrow B$ ,
- $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  の被覆変換群 ( $\cong \mathbb{Z}$ ) の生成元  $\gamma$
- $B$  の,  $0 \in B$  への contraction  $g_j$  があって次をみたす。

- i)  $\det f_{j*} \neq 0$   
 ii)  $\sup \{ |f'_j(x)| \mid x \in N_j \} = 1, \quad 0 \in \bigcap_{\nu \geq 0} \overline{f_j^{\nu}(N_j)}$   
 iii)  $f_j \circ \tilde{g} = g_j \circ f_j, \quad g_j(0) = 0.$

⊙  $S_{t_j}$  に対して, §6の結果と記号を用いる.  $\bar{\Omega}_{t_j}$  はコンパクトなので, ある  $\varepsilon$  があって,  $\bar{\Omega}_{t_j} \subset \bigcup_{k \geq i} \tilde{E}_k$ . §6, 3) i) により,  $\tilde{S}_{t_j} - \bar{\Omega}_{t_j}$  の連結成分  $\tilde{N}_j$  と正則函数

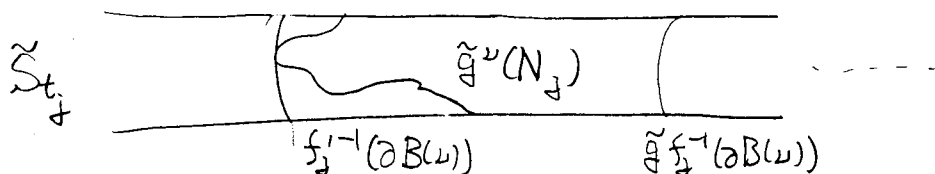
$$f_j : N_j \rightarrow B_i \subset \mathbb{C}^2$$

がある. さらに,  $\tilde{S}_{t_n} - \bar{\Omega}_{t_n}$  のある連結成分  $N$  があって, 任意の  $j$  に対して,  $N_j = u_j(N)$  と仮定できる.  $\gamma \rightarrow \gamma$  の被覆変換群の生成元  $\gamma$  は  $\gamma(N) \subset N$  となるようにとると, §6, 3) ii) により,  $B_i$  の contraction  $g_j$  で,  $f_j \circ \tilde{g} = g_j \circ f_j$  となるものがある.

$B(\mu)$  を  $p_{2+1} \in B_i$  中心の, 半径  $r_\mu$ ,

$$r_\mu = \sup \{ |f_j(x)| \mid x \in \tilde{g}^\nu(N_j) \},$$

の球とする.  $g_j$  は  $p_{2+1}$  の contraction なので,  $\mu \geq 1$  を十分大きくとれば,  $g_j(B(\mu)) \subset B(\mu)$  をみたす (すなわち  $f_j^{-1}(\partial B(\mu))$  は  $\Omega_j'$  に接する  $S_{t_j}$  の GSS を定める, 下図).



$f_j$  のかわりに,  $\tilde{g}^n * f_j$  を考えて, 定数倍して,  $B(\omega) = B$  とみなせば, 条件を全て満たす。

$$\text{Step 3. } f = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j * f_j : N \rightarrow B$$

$$g = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j : B \rightarrow B$$

が存在して正則。しかも次を満たす。

$$i) \sup \{ |f(x)| \mid x \in N \} = 1, \quad 0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f \tilde{g}^n(N)}.$$

$$ii) f \circ \tilde{g} = g \circ f, \quad g(0) = 0.$$

☹  $St_j$  の複素構造が,  $St_\infty$  に収束し,  $\{u_j * f_j\}$  は一様有界なので,  $\{u_j * f_j\}$  は正則な  $f$  に収束する。  
 $\{g_j\}$  も正則一様有界なので, 正則な  $g$  に収束する。  
 よって, Step 3 i) ii) は Step ii) iii) から従う。

Step 4.

i)  $g : f(N) \rightarrow f(N)$  は contraction. さらに,  $g|_{f(N)}$  の固定点は 0 のみ。

ii)  $f : N - f^{-1}(0) \rightarrow B - \{0\}$  は固有。

☹ i)  $\tilde{g}(N) \subset N$  なので,  $g f(N) \subset f(N)$ . 座標を用いて,  $f = (f^1, f^2)$  とかく。最大値の原理により,

$$\sup \{ |f^i(x)| \mid x \in \tilde{g}^n(N) \} \leq \sup \{ |f^i(x)| \mid x \in \tilde{g}^{n+1}(N) \}$$

なので,  $\{\tilde{g}^n f\}_{n=1}^\infty$  は定数  $p < 1$  に収束する。Step 3 i) により,  $p = 0$ 。すなわち,  $g|_{f(N)}$  は 0 の contraction.

ii) 固有値はないとすると, 集積点をもたぬ点列  $\{\alpha_k\} \subset N - f^{-1}(0)$  で,  $\{f(\alpha_k)\}$  は  $N - f^{-1}(0)$  の点に収束するものがある。

$$\nu(k) = \max \{ \nu \mid \alpha_k \in \tilde{g}^{-\nu}(N) \}$$

とあくと,  $\nu(k) \rightarrow \infty$  となる。しかし, i) により,  $f(\alpha_k) \in g^{\nu(k)} f(N)$  は 0 に収束することになり矛盾。

最後の Step.  $S_{t_\infty}$  は GSS を含む。

⊙  $S_{t_\infty}$  は極小としてよい。いくつかの場合に分ける。

I)  $\det f_* \neq 0$  かつ  $0 \notin f(N)$ . このとき, Step 3 i) により,  $\overline{f(N)}$  は 0 の近傍を含む。よって, 適当な Stern 領域  $D(f(N))$  をとると,  $f^{-1}(\partial D)$  が  $S_{t_\infty}$  の GSS を定める。

II)  $\det f_* \neq 0$  かつ  $0 \in f(N)$ .

II-1)  $\det g_{t_0} \neq 0$  の場合。  $g$  の標準形を考え,  $0 \in B$  のまわりの正則関数  $w$  で,  $g^*w = dw$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  をみたすものをとれる。仮定  $0 \in f(N)$  により,  $f^*w$  は零点をもつ。よって  $f^*w = 0$  は,  $S_{t_\infty}$  上の因子  $D \neq 0$  で  $D^2 = 0$  となるものを定める。§3 の事実により,  $S_{t_\infty}$  は GSS を含む。

II-2)  $\det g_{t_0} = 0$  の場合。  $g$  が正則に拡張されるように,  $B$  を次々に blow-up する:

$B = W_0 \xleftarrow{\alpha_1} W_1 \xleftarrow{\alpha_2} W_2 \leftarrow \cdots \leftarrow W_{k-1} \xleftarrow{\alpha_k'} W_k' \leftarrow \cdots$   
すなわち,  $W_1$  は  $p_1 = 0$  の blow-up,  $C_1 = \alpha_1^{-1}(p_1)$  とすると, 仮

定により,  $g: W_1 \rightarrow W_1$  と  $\text{blow-up}$  (正則上) され,  $g(C_1)$  は点  $p_2 \in C_1$  となるから,  $p_2$  を  $\text{blow-up}$  (7, ..., とくりかえす。  $\alpha_i$  は  $p_i \in W_{i-1}$  の  $\text{blow-up}$  とし,  $C_i = \alpha_i^{-1}(p_i)$  とおく。さらに

$$W_\infty = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} (W_i - \{p_{i+1}\}) \text{ とおく。}$$

さて, §3 の命題により,  $S_{T_\infty}$  が楕円曲線を含む場合のみを考えればよい。

主張 1  $f$  は固有正則写像  $\tilde{f}: N \rightarrow W_\infty$  を定める

これに関する帰納法で次を示せばよい。

$$(\star)_i \begin{cases} f \text{ は正則写像 } R_i: N \rightarrow W_i \text{ を定める。} \\ R_i: N - R_i^{-1}(p_{i+1}) \rightarrow W_i - \{p_{i+1}\} \text{ は固有} \end{cases}$$

実際,  $(\star)_0$  は Step 4, (i).  $(\star)_i$  を仮定する。  $\tilde{C} = \{\det f_t = 0\}$  は  $N$  の一次元解析集合で,  $\tilde{f}(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$  となる。  $f$  の固定点は 0 のみなので,  $\tilde{C} = f^{-1}(0)$ 。  $\tilde{C}$  は  $S_{T_\infty}$  の曲線を定めるので,  $\tilde{C}$  は有理曲線からなる無限鎖を含む。 よって,  $(\star)_i$  により,  $R_{i+1}^{-1}(p_{i+2}) \subset \tilde{C}$  もそうなる。 とくに  $R_{i+1}^{-1}(p_{i+2}) \neq \emptyset$  で, 一次元。 したがって,  $R_{i+1}$  は正則。 固有性は  $R_i: N - R_i^{-1}(p_{i+1})$  の固有性から従う。

さらに,  $g: \tilde{f}(N) \rightarrow \tilde{f}(N)$  は固定点をもたず,  $\tilde{f} \circ g = g \circ \tilde{f}$  とする。  
( $\circ \neq 0$ )

主張 2.  $\tilde{f}$  は高々分岐被覆。

ある  $y \in \tilde{f}(N)$  があって,  $\tilde{f}^{-1}(y)$  が一次元であるとせよ。

このとき,  $\tilde{f}^{-1}(y) \subset \{\det f_k = 0\} = f^{-1}(0)$ .  $\tilde{f}^{-1}(y)$  <sup>(のある連結成分が)</sup>コンパクトなら,  
 $\tilde{f}^{-1}(y)$ のある既約成分が  $S_{t_\infty}$ の第一種例外曲線を定めることにな  
 り矛盾.  $\tilde{f}^{-1}(y)$ の全ての連結成分がコンパクトでないなら,  
 $\tilde{f}^{-1}(y)$ は有理曲線の無限鎖を含む. また  $\{\det f_k = 0\}$ の連結  
 成分の数は有限なので, ある  $\nu \geq 1$ があって,  $\tilde{f}^{-1}(y) \cap g^{\nu} \tilde{f}^{-1}(y) \neq \emptyset$ .  
 すなわち,  $g \in \tilde{f}(N)$ は  $g$ の固定点となり, 矛盾.

$\tilde{f}(\partial N) \subset W_\infty$ はコンパクトなので,  $\varepsilon$ を十分大きくとれば,  
 $\tilde{f}(\partial N) \subset W_\varepsilon - \{p_{l+1}\} \subset W_\infty$ . そこで,  $p_{l+1}$ のまわりの座標近傍  
 内の有界 Stein 領域  $D$  ( $\ni p_{l+1}$ ) を適当にとれば,  $\tilde{f}^{-1}(\partial D)$ が,  
 $S_{t_\infty}$ の GSS を定める.

III)  $\det f_k \equiv 0$ . このとき,

$$\inf \{ |f_j(x)| \mid x \in \partial N_j \} \rightarrow 0$$

なのだから,  $0 \in \tilde{f}(N)$ . Step 4 (i) により,  $\tilde{f}(N) - \{0\}$ は解析  
 集合. すると,  $\tilde{f}^{-1}(0)$ の連結成分の数は有限個なので,  
 $\tilde{f}(N)$ は  $B$ の1次元解析集合で,  $0$ を内点に含む.  $g|_{\tilde{f}(N)}$ は  
 $0$ での contraction なので,  $\Delta = \tilde{f}(N) - \{0\} / \langle g \rangle$ は曲線で,  
 $f$ は正則写像  $S_{t_\infty} - C \rightarrow \Delta$ を定める, ただし  $C$ は  $\tilde{f}^{-1}(0)$ の  
 定める曲線. よって,  $\Delta$ は連結非特異楕円曲線. 結局,  
 $f$ は  $N$ 上の正則函数  $w$ で  $\tilde{f}^* w = dw$ ,  $0 < |d| < 1$ , と  
 なるものを定める.  $w=0$ は  $S_{t_\infty}$ 上の因子  $D \neq 0$ で  $D^2=0$

となるものを定めるので、§3の事実により  $S_{\text{tot}}$  は GSS を含む。

### §9. 定理1の高次元化について

定理1は、当然、高次元化できる。このときは、GSS よりも一般に GSPH を考える。

定義 [4]. 連結コンパクトな複素多様体  $X$  上のコンパクト実超曲面  $\Sigma$  が、

・  $X$  から定まる CR-構造で、強擬凸 (すなわち、 $\Sigma$  の局所的な定義方程式を  $f$  とすると、 $\Sigma$  の接空間上  $\partial\bar{\partial}f > 0$ )、

・  $X - \Sigma$  は連結

をみたすとき、 $\Sigma$  を  $X$  の GSPH (global strongly pseudo-convex hypersurface) という。

一般に、 $\Sigma$  が強擬凸で、 $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma > 3$  なら、つねに、 $\Sigma$  は Stein 空間を bound する。( $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma = 3$  では反例がある。Stein 空間を bound しない GSPH を含む曲面は発見されていない)。

GSPH を含む多様体  $X$  の微小変形が、GSPH を含むを示すのはやさしい。 $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$  のとき、変形極限に関しても、§8の定理1の証明が平行に高次元化できると思われる。

## References

- [1] G. Blauzky, Invariants associés aux surfaces compact contenant une coquille sphérique global, preprint (1980)
- [2] I. Enoki, Surfaces of Class  $V_{10}$  with curves  
Tohoku Math. J. 33 (1981) #4
- [3] Ma. Kato, Compact complex manifolds containing "global" spherical shells, I, Proc. Intl. Symp. Alg. Geometry, Kyoto 1977; II, manuscript (1978)
- [4] Ma. Kato, Compact complex manifolds containing global strongly pseudocomplex hypersurfaces  
Tohoku Math. J. 31 (1979).
- [5] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, I-III
- [6] ---, On the structure of compact analytic surfaces, I-IV  
([5], [6] is Collected Works, vol. III).
- [7] M. Imone, On surfaces of Class  $V_{10}$ , Inv. Math. 24 (1974)
- [8] ---, New surfaces with no meromorphic functions,  
Proc. Int. Congress of Math. Vancouver 1974  
II, Complex Analysis and Alg. Geometry, Iwanami, 1977
- [9] I. Nakamura, On surfaces of Class  $V_{10}$ , to appear