

ある振動モデルにおける時間遅延誘導爆発について Delay-induced blow-up in an oscillation model

石渡 恵美子^[*]

EMIKO ISHIWATA

東京理科大学

TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

石渡 哲哉^[†]

TETSUYA ISHIWATA[‡]

芝浦工業大学

SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

中田 行彦^[§]

YUKIHIKO NAKATA

島根大学

SHIMANE UNIVERSITY

1 はじめに

本稿では、遅延微分方程式の解の爆発現象について考察した結果をまとめる。遅延微分方程式は、ある時点での解の変化率等を与えるためにその時点の解の情報だけでなく、過去の解の情報も参照するタイプの微分方程式である。数理モデリングという観点から見れば、瞬時に情報が届かない状況や、生物などであれば何らかの情報のインプットから、それに対する対応までタイムラグが発生することは、比較的自然に起きうるであろうから、過去の情報の取り扱いをどのようにするのか、というのは非常に重要な観点だと考えられる。一方、数学という立場に立てば、遅延微分方程式は一見表記の上では常微分方程式と同じように見えるが、本質的に無限次元の問題となっており、取り扱いは難しくなっている。数学的研究としては解の存在・一意性などの基礎理論の構築は進んでいるが、特に2次元以上の問題における解の挙動の解析についてはそれほど多くの結果がないようである。

解の挙動という観点に焦点を絞る。時間遅れはシステムを不安定化させることもある (delay-induced instability) し、不安定な軌道を時間遅れを含む制御をいれることにより安定化させることができることもあり ([4]: DF 制御, "安定性" という観点からはいろいろな側面をもつ。ここでは、前者の不安定化、その中でも特に解の爆発現象という視点から後に述べるある方程式系を考察した結果を紹介する。

タイムラグによる不安定化の典型例としては、時間遅れを考慮したマルサスモデル $x'(t) = -x(t-\tau)$ がよく知られている。ここで、 $\tau > 0$ は定数でタイムラグを表す。これに初期関数を与えた問題はよく解析されており、次のような様相が知られている: 小さい τ の場合、解の挙動は定性的には $\tau = 0$ とした問題 (以下, delay のある系との比較のときには、そのような系を non-delay 系と呼ぶことにする。) の解と同様、単調に大きさが減衰し零解に収束するが、 τ が大きくなると振動が発生し、更に τ が大きくなると、振幅

^{*}ishiwata@rs.tus.ac.jp

[†]tisiwata@shibaura-it.ac.jp

[‡]本研究は科研費 (課題番号:15K13461) の助成を受けたものである。

[§]ynakata@riko.shimane-u.ac.jp

が増大しながら振動し最終的には振幅が発散する。これをみると、時間遅れが比較的小さいときには概ね non-delay 系と同じであろうと期待でき、また、時間遅れが大きい場合は、non-delay 系の解の挙動とは似ても似つかない複雑な挙動の解が出てくる、という理解の仕方ができそうに思えてくる。もちろん、実際そうになっている系も多いと思われる。前段で述べたような数理モデリングの立場から考えると、遅延微分方程式は理論的にも数値計算においても取り扱いが難しいし、時間遅れが「ほぼ一瞬」であり、解の性質がほとんど変わらないのであれば、タイムラグは無視しても大丈夫（できれば無視したい.），ということになる。しかし、それは「常に」成り立つわけではない。その典型例の1つとして本稿では non-delay 系では漸近安定なリミットサイクルをもつある2次元振動子モデルを考える。そこにある形でタイムラグの効果を入れることにより、方程式系の性質がどのように変るかを、解の爆発という視点から考察する。¹⁾ 遅延微分方程式の解の爆発については、例えば [1] では、爆発解を持つスカラーの常微分方程式に対して遅延をもつ項を付加した場合にどのように解の爆発という性質が変化するか、という観点から研究がなされているが、その他も含めてあまり多くは研究されていない。特に、本稿で記載するような、タイムラグが入るからこそ起きる解の爆発についてはこれまで言及されていないようである。以下、極めて単純な系について、初等的な解析で理解できる範囲で得られた数学解析の結果を述べ、数値実験から見て取れる興味深い挙動について紹介する。

2 Delay-induced Blow-up and periodic solutions

$x = x(t), y = y(t)$ に関する次の2次元系を考える:

$$x' = x - y - x(x^2 + y^2), \quad y' = x + y - y(x^2 + y^2).$$

この方程式系は、 $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと、 $r' = r - r^3, \theta' = 1$ となり単位円周上を角速度 $\omega = 1$ で動く周期解が漸近安定なリミットサイクルとなり、不安定な不動点である原点を除く初期点からの軌道はすべてこの周期解へ収束する。この方程式系に対し、定数遅延 $\tau > 0$ をもつ次の遅延微分方程式系を考える:

$$x' = x - y - x(t - \tau)(x^2 + y^2), \quad y' = x + y - y(t - \tau)(x^2 + y^2).$$

これに初期条件 $x(t) = \phi(t), y(t) = \psi(t) (-\tau \leq t \leq 0, \phi, \psi$ は連続関数) を設定した問題を以下問題 (P) と呼ぶ。この問題について以下の結果を示すことができる。

定理 1 ([3]) 任意の $\tau > 0$ に対し、問題 (P) は有限時間で爆発する解を持つ。

定理 2 ([3]) 任意の $\tau > 0$ に対し、問題 (P) は無限個の周期解を持つ。

どちらの定理も任意の $\tau > 0$ に対するものなので、 τ が十分小さいとしても、解構造は non-delay 系とまったく異なっていることが分かる。証明は [3] を参照してもらうとして、ここではキーとなる部分について説明する。

まず、定理 2 の周期解について考える。方程式を先の (r, θ) を用いて書換えると以下を得る:

$$r'(t) = r(t)(1 - r(t)r(t - \tau) \cos(\theta(t) - \theta(t - \tau))), \quad (1a)$$

$$\theta'(t) = 1 + r(t)r(t - \tau) \sin(\theta(t) - \theta(t - \tau)). \quad (1b)$$

¹⁾ ここでは何か具体的な現象が背景にあってその問題を考えているわけではなくあくまで数学的な考察をするための toy model である。とはいえ、対応する現象などがあったらそれはそれで面白いので、ご存じの方がいたら教えてください。

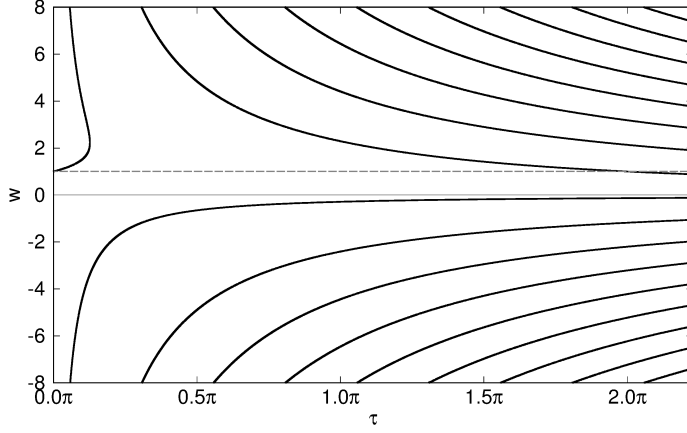


図 1: Bifurcation diagram. For each τ there are infinitely many equilibria for (2)

更に, 角速度 $\omega(t) = \theta'(t)$ を導入し, (r, ω) 系に書換えると $t \geq \tau$ に対して

$$r'(t) = r(t) \left(1 - r(t)r(t-\tau) \cos \left(\int_{t-\tau}^t \omega(s) ds \right) \right), \quad (2a)$$

$$\omega(t) = 1 + r(t)r(t-\tau) \sin \left(\int_{t-\tau}^t \omega(s) ds \right) \quad (2b)$$

を得る.

ここで, 半径一定の周期解を考える. 半径を定数 $R > 0$ とし, 上の二式を使うと

$$(\omega(t) - 1)^2 + 1^2 = R^4.$$

つまり, 一定半径を持つ周期解の角速度 ω は定数となることが分かる. よって,

$$1 = R^2 \cos(\omega\tau), \quad (3a)$$

$$\omega = 1 + R^2 \sin(\omega\tau) \quad (3b)$$

となり, これより

$$\omega = 1 + \tan(\omega\tau), \quad R = \sqrt{\frac{1}{\cos(\omega\tau)}}. \quad (3c)$$

ここで, ω, τ は次を満たす:

$$\omega\tau \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

つまり, 固定した $\tau > 0$ に対して無限個の周期解があることが分かる.

この半径一定, 定角速度の周期解の分岐構造を数値的に見てみよう. 図 2 は横軸 $\tau (\geq 0)$, 縦軸は角速度 ω を表す.

以上の考察とこの図から次の事が分かる:

- non-delay 系のリミットサイクル ($\tau = 0, \omega = 1$) からつながる枝は一本の曲線であり, τ が小さい範囲のみで存在する.
- 正の τ ごとに無限個の周期解があるが, 角速度が正のものと負のものがそれぞれ無限個存在する. non-delay 系の解はすべて正の角速度を持っていたが, delay が少しでも入ると逆回転する解が出現する.

この 1 番目の指摘に関連した解の挙動については, 後の数値実験でも再度触れることにする.

次に解の爆発についての考察を述べる. [3] での証明ではより処理が楽な他の初期値を用いているが, ここでは説明の簡潔さを優先させて初期関数として以下を考える: $\delta > 0$ を定数として $\phi(t), \psi(t) = -\delta, -\tau \leq t \leq 0$, とする.

このとき, 時間区間 $[0, \tau]$ での解の運動²⁾ は次の (r, θ) に関する ODE 系の解と同じになる:

$$r'(t) = r(t) + \delta (\cos(\theta(t)) + \sin(\theta(t))) r^2(t) \quad (4a)$$

$$\theta'(t) = 1 + \delta (\cos(\theta(t)) - \sin(\theta(t))) r(t). \quad (4b)$$

このとき解の半径が大きくなると θ に関する方程式 (4b) に不動点が登場する:

命題 1(Emergence of equilibria of θ) $\delta r > \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 方程式 (4b) は安定な不動点 $\theta_s^*(r)$ および不安定な不動点 $\theta_u^*(r)$ を持つ. 更に, $\theta_s^*(r)$ は次の性質を持つ:

- $\theta_s^*(r) \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$,
- $\theta_s^*(r) \downarrow \frac{\pi}{4}$ as $r \rightarrow \infty$.

この不動点の出現位置は半径に依存するが, 上で設定したような初期条件でもし解が爆発するとすると, 爆発方向の角度が $\pi/4$ となることが分かる. 実際の証明では, ある程度初期値を大きく取っておくと, 半径および角度が単調に増加していき, 一度出現した θ の不動点が消えることなく解が爆発方向に吸い込まれていくように爆発することが示される. 後述する数値計算では, ある程度中間状態の挙動を経てから爆発するものもあるため, 必ずしも爆発の方向は揃っていないが, これは爆発に至る前の段階でどの方向に θ の安定な不動点が登場したかによる, と理解することができる. またこの考察から, 角速度が発散して無限回回転しながら半径が発散するような爆発解はないことが分かる.

3 数値実験から

ここでは, この系に現れる典型的な爆発解その他の挙動を紹介する.³⁾

図 3 は, $\phi(t) = \psi(t) = 1.0, \tau = 0.4$ とした場合の解の軌跡である. 解がしばらくある円周付近を回りつつ少しずつ大きくなり, ある程度大きくなると急激に半径が増大し $\theta = 3\pi/4$ 方向へ爆発している. この回り続けている挙動は, 定理 2 で示した周期解の 1 つの影響だと考えられる. その周期解はサドル的な不安定周期解で, その影響でうまく安定方向から進入した解はしばらく近くに留まるものの不安定性から次第にその円周付近から脱離していく挙動となっているのではないかと考えている. そして, その周期解から剥

²⁾ もちろん解が存在する限りにおいてである.

³⁾ 数値計算は区間接続法や連続ルンゲクッタ法など遅延微分方程式のスタンダードな数値計算法を用いて計算し, 解の大きさがある程度の大きさになった時点で計算を止めている. その打ち切った時点での時刻 (数値爆発時刻) の真の爆発時刻への収束を示すことができるが, 本稿では数値実験により解の様相を観察することを主眼にしているため, 数値解析部分についての詳細には踏み込まない.

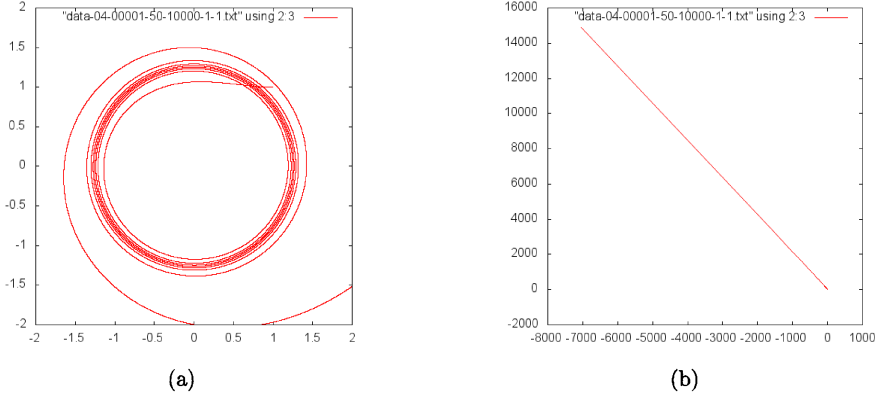


図 2: $\phi(t) = \psi(t) = 1.0, \tau = 0.4$ の場合の数値シミュレーション: (a) 原点付近の拡大図, (b) $\theta = 3\pi/4$ 方向への爆発の様子。

がれてある程度増大した時点で θ に安定な不動点が発生し, (b) にあるようなほぼ直線的な増大が観察される, と理解している。しかし, このような描像についてはまだ数学解析はまったくできていない。今後の課題である。

一方, 周期解の分岐図 1 を見ると, non-delay 系にあったリミットサイクルから伸びる曲線がある。この図から十分小さい τ については安定なリミットサイクルが 1 つあることが示唆される。実際図 3 は, $\phi(t) = \psi(t) = 3.0$ とし, τ を 0.35, 0.37, 0.39 に対して数値実験した解軌道である。 τ によって分岐図にあるように角速度が微妙に変わるので対応する半径も微妙に変化する。よって同一の円周へ収束しているのではないが, このケースではそれぞれ円周へ収束していることが分かる。

数学解析では δ を大きめにコントロールすることにより爆発解を構成しているが, それでは小さい初期関数ではどうだろうか? 図 4 は $\phi(t) = \psi(t) = 0.1, \tau = 0.4, 0.5, 1.0$ の場合の数値計算である。どちらも回転しつつ大きさが増大し爆発する様子が見て取れる。 $\tau = 0.4$ のほうは多少不安定周期解の影響を受けているかのような挙動が見て取れるが, $\tau = 0.5$ の方ではそのような挙動が見えない。タイムラグの大きさと不安定周期解からの影響の関係については数学的な知見は今のところない。定性的にでも理解できれば大変面白いのではないだろうか。

最後に, 負の角速度をもつ解について述べる。周期解の分岐図 1 のところでも指摘したが, この問題では任意の $\tau > 0$ に対して負の角速度を持つ周期解が無数に出現する。ここではそのうちの 1 つの周期解に十分近い円周 (の一部) を初期関数にセットした数値計算例が図 5 である。時計回りに回転して爆発することが見て取れる。このような爆発解については理論的にはまったく扱えていない。これらの解析も今後の課題である。

4 Remarks

今回考察の対象とした (P) の non-delay 系は第 2 節で述べたように $r' = r - r^3, \theta' = 1$ と書くことができる。この問題はより一般に $r' = ar - r^3, \theta' = 1 (a \in \mathbb{R}; \text{パラメータ})$ と見て, $a = 0$ を分岐点として $a > 0$ でリミットサイクルが出現している典型モデルと見ることができる。では, 今回と同様の結果はより一般の a ではどうだろうか? 特に, リミットサイクルのない $a \leq 0$ のケースではどうか? という興味が出てくる。実

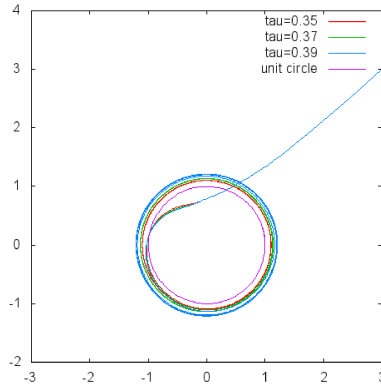
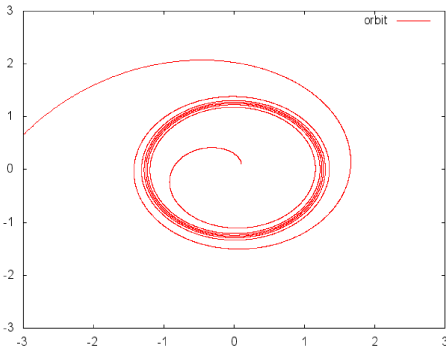
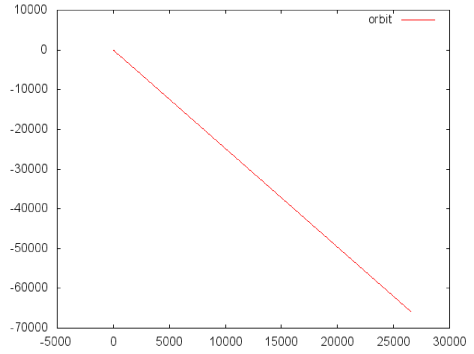


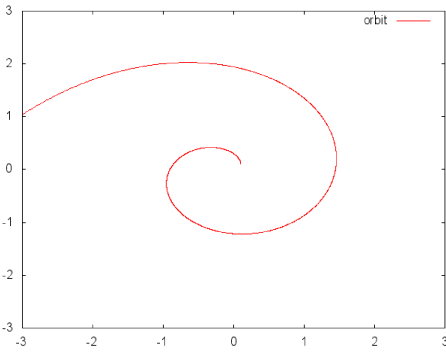
図 3: $\tau = 0.35, 0.37, 0.39$ の場合の数値シミュレーション．一番内側の円は単位円．



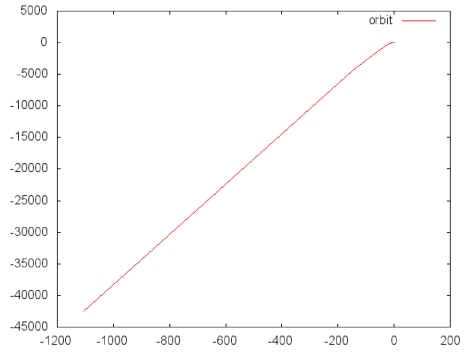
(a)



(b)



(c)



(d)

図 4: $\phi(t) = \psi(t) = 0.1$ の場合の数値シミュレーション: (a), (b) $\tau = 0.4$ ((a) は原点付近の拡大図), (c), (d) $\tau = 0.5$ ((c) は原点付近の拡大図)

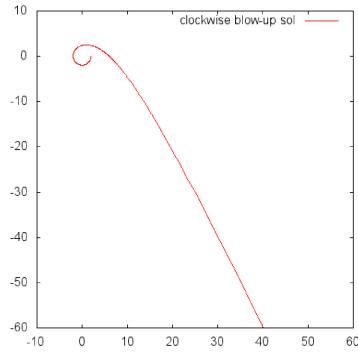


図 5: 負の角速度をもつ爆発解

は、詳細は多少変化するもののまったく同じ議論をすることが出来、定理 1,2 と同じ主張を示すことができる。当初、non-delay 系が周期解を持つことが結果にそれなりに効いていると思っていたが、それは関係なく、おそらく解が回転する性質をもつことから位相差を生み、角度に関する方程式に不動点が出現することが基本的なメカニズムになっているのではないかと考えている。これと半径 r に関する方程式が優線形であることが効き、爆発解を生み出すのだろうと考えている。

参 考 文 献

- [1] Khalil Ezzinbi and Mustapha Jazar, Blow-up Results for Some Nonlinear Delay Differential Equations, Positivity 10 (2006), 329–341.
- [2] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer, 1993.
- [3] E. Ishiwata, T. Ishiwata and Y. Nakata, Delay-induced blow-up in a limit-cycle oscillation model, preprint.
- [4] K.Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Phys. Lett. A, 170 (1992), 421–428.