

3次元球面内の輪環体 についての基本的性質

神戸大 理 鈴木 晋 一

§0. 序

以下、PL 圏での話である。種数 p の輪環体、これを T_p で示す、とは、Euler characteristic $1-p$ の連結な 1 次元複体の 3 次元球面における正則近傍と位相同型な 3 次元多様体とする。

以前の論文 [14] において、対 $(T_p \subset S^3)$ に関する素な分解の一意性について証明したが、二つの補題 3.10 と 3.11 はいささか不注意に書いた。このノートでは、対 $(T_p \subset S^3)$ について知られる基本的な性質を整理し、またこれの取扱いに關する基本的な手法について詳しく述べたい。最後に、津久井氏の論文 [16] に述べられる特殊な場合について、分解の一意性の証明を与える。(尚、分解定理については §3 参照。)

§1. 定義と準備

1.1. D^n と S^n により、標準的な n 次元胞体と n 次元球面を示す。特に、 D^1 とまたは S^1 と位相同型なるものを、それぞれ 単純弧、単純閉曲線 という。一般に単純閉曲線に対して方向を指定していいが、必要な際は適当な方向を与えて考えていただきたい。

尚、3次元多様体 はすべて、コンパクト、連結かつ方向付可能なものとする。

1.2. 定義 : 3次元多様体 M が irreducible とは、 M における任意の 2次元球面が M の 3次元胞体を bound するとき、また ∂ -irreducible とは、 M における任意の proper な 2次元胞体 C について、 ∂C が ∂M で 2次元胞体を bound するときとする。

1.3. イソトピー : 位相写像 $\psi: Y \rightarrow Y'$ のイソトピーとは、 $H(y, t) = (\eta_t y, t)$ なる位相写像 $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y' \times [0, 1]$ のことである。但し、 $\eta_t: Y \rightarrow Y'$ は位相写像で、 $\eta_0 = \psi$ とする。 Y の部分空間 X_1 と X_2 のイソトピーとは、 $\eta_1(X_1) = X_2$ なる Y の恒等写像のイソトピーである。この時、特に $X_1 \approx X_2$ で示す。

1.4. 便宜上の約束 : 以下の話では、3次元多様体 M に proper に埋蔵されている二つの 2次元多様体 X_1 と X_2 、(但し共に連結とは限らない) を考察することが多い。よく知られ

る“一般の位置”の議論により、 M の恒等写像のイソトピーが存在して $\gamma_1(X_1)$ と X_2 が transversal に交わるように出来る。よって以下では、特にことわらない限り、“ $X_1 \cap X_2$ は、有限個の互いに交わらない単純弧と単純閉曲線とから成り、それらは X_1 においても X_2 においても proper である。”と仮定する。

またいわゆる“最小”の曲線というのをよく利用する。即ち、 $X_1 \cap X_2$ の単純閉曲線 Γ が X_1 上で最小であるとは、 Γ が X_1 上で、 $\dot{C} \cap X_2 = \emptyset$ なる 2次元胞体 C を bound するとき、また $X_1 \cap X_2$ の単純弧 γ が X_1 上で最小であるとは、 γ が X_1 から $\dot{C} \cap X_2 = \emptyset$ なる 2次元胞体 C を切りとるときである。今 $X_1 \cong S^2$ 、または $X_1 \cong D^2$ で更に $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ならば、 $X_1 \cap X_2$ には少なくとも一つの最小な単純弧または単純閉曲線が X_1 には存在し、更に $X_1 \cap X_2$ に単純閉曲線が含まれているならば、 X_1 上には必ず最小の単純閉曲線が存在することは明らかである。

1.5. 補題: M を irreducible な 3次元多様体、 D_1 と D_2 を $\partial D_1 = \partial D_2$ なる M の proper な 2次元胞体とする。すると、 ∂M を固定した M における D_1 と D_2 のイソトピーが存在する。

証明: 略

1.6. 定義: (1) A と B を、それぞれ 2次元閉多様体 F 上の、互いに交わらない単純閉曲線の系とする。 $A \cap B$ が

互いに交叉するような有限個の点から成り、更に A の一つの弧と B の一つの弧によって bound される F 上の 2次元胞体が全く存在しないとき、 A と B とは簡約化されているという。

(2) M を 3次元多様体、 C と D を、それぞれ M における互いに交叉しない proper な 2次元胞体の系とする。 ∂C と ∂D が ∂M で簡約化されており、更に $C \cap D$ が単純閉曲線を含まないとき、 C と D とは簡約化されているという。

1.7. 補題 (Epstein [2]) : A と B とを、それぞれ 2次元閉多様体 F 上の、互いに交わらない単純閉曲線の系とすると、 F の恒等写像のイソトピーで、 $\eta_1(A)$ と B が簡約化されているものが存在する。

1.8. 補題 : M を irreducible な 3次元多様体、 C と D とをそれぞれ互いに交わらない M における proper な 2次元胞体の系とする。更に H を 1.7 で得られる ∂C と ∂D とを簡約化する ∂M の恒等写像のイソトピーとする。すると、 H は、 $\eta_1(C)$ と D とを簡約化するような M の恒等写像のイソトピーに拡張できる。

証明 : Epstein [2] の議論より、 H は明らかに M の恒等写像のイソトピー、再び H で示す、に拡張できる。 $\eta_1(C) \cap D$ が単純閉曲線を含んでいるなら、 M の irreducible の条件を用いて、 $\eta_1(C)$ 上の最小の単純閉曲線から順に、 ∂M を固定するよ

うな M の イソトピーで単純閉曲線を除去すればよい。

1.9. Meridian と Meridian-disk : M を $\partial M \neq \emptyset$ であつて ∂M が連結な 3次元多様体とする。 ∂M 上の単純閉曲線 a について、 $a \simeq 1$ (in M) かつ $\partial M - a$ が連結のとき、 a を M の meridian と呼ぶ。互いに交わらない M の meridian の集まり $\{a_1, \dots, a_n\}$ について、 $\partial M - (a_1 \cup \dots \cup a_n)$ が連結のとき $\{a_1, \dots, a_n\}$ を M の meridian の系 と呼ぶ。更に、 M における proper な 2次元胞体 A と、互いに交わらない proper な 2次元胞体の集まり $\{A_1, \dots, A_n\}$ をそれぞれ、 ∂A と $\{\partial A_1, \dots, \partial A_n\}$ が meridian と meridian の系 a のとき、 meridian-disk, meridian-disk の系 と呼ぶ。 M が irreducible であれば、 meridian a と、 meridian の系 $\{a_1, \dots, a_n\}$ に対して、 $\partial A = a_1$, $\{\partial A_1, \dots, \partial A_n\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ なる meridian-disk A と meridian-disk の系 $\{A_1, \dots, A_n\}$ が存在し (Dehn's Lemma [11] と Loop Theorem [10], [13] に依る)、 イソトピーを除いて一意である (補題 1.5 と 1.8 に依る)。

次に挙げるのは、輪環体のよく知られた特性である。

1.10. 補題 : M を、 S^3 に埋蔵可能な 3次元多様体で、 ∂M が連結でその種数を p とすると、次の三つは同値である：

- (1) $M \cong T_p$.
- (2) M の meridian の系 $\{a_1, \dots, a_p\}$ が存在する。
- (3) $\pi_1(M)$ が階数 p の自由群である。

1.11. 補題 (Feustel [3], Griffiths [5], etc.): γ を ∂T_p 上の単純閉曲線とし、 $p \geq 1$ とすると、次の三つは同値である:

(1) T_p に γ に沿って 3 次元胞体を張付けて得られる 3 次元多様体が、種数 $p-1$ の輪環体である。

(2) T_p の meridian の系 $\{a_1, \dots, a_p\}$ が存在し、 $\gamma \cap (a_1 \cup \dots \cup a_p) = \gamma \cap a_1$ は唯一つ交差点から成る。

(3) 商群 $\pi_1(T_p)/\{\gamma\}^v$ が階数 $p-1$ の自由群である。ここに $\{\gamma\}^v$ は、ホモトピー類 $[\gamma]$ を含む $\pi_1(T_p)$ の最小の正規部分群を示す。

1.12. 定義: M と M' を、 $\partial M \neq \emptyset$, $\partial M' \neq \emptyset$ が連結であるような 3 次元多様体とする。 M と M' の disk-sum, これを $M \# M'$ と記す、は ∂M 上の 2 次元胞体を $\partial M'$ 上の 2 次元胞体に張り合わせるにより得られる。 $\#$ は位相同型を除いて well-defined であり、可換であり結合律も成り立つ。連結な境界を持つ 3 次元多様体 M が ∂ -素 であるとは、 $M \neq D^3$ でさらに M の任意の分解 $M = M_1 \# M_2$ について M_1, M_2 の少くとも一方が 3 次元胞体のときである。次が成り立つ。

1.13. 補題 (Gross [6], Swarup [15]): M を連結な境界を持つ 3 次元多様体とする。 $M \neq D^3$ ならば、 M は ∂ -素な 3 次元多様体 $P_1, \dots, P_n$ の disk-sum と位相同型であり、 P_n は順序と位相同型を除いて一意的に決定される。

§2. S^3 に埋蔵され得る 3次元多様体.

2.1. 定義: SC により、連結な境界を持ち、 S^3 に埋蔵可能な 3次元多様体の集合を示す。

実際、対 $(T_p \subset S^3)$ の研究において、 SC の元の性質を知ることが重要である。次に挙げる三つの補題はよく知られているもので、時にことわりなく利用することがある。

2.2. 補題 (Fox [4]): SC に属する 3次元多様体 M に対して、 $M \cong S^3 - \dot{T}_p$ なる対 $(T_p \subset S^3)$ が存在する。

2.3. 補題 (Papakyriakopoulos [11]): SC に属する 3次元多様体は irreducible である。 ([15] の Prop. 2.7 等を参照.)

2.4. 補題: M, M' を SC に属する 3次元多様体とする。

(1) disk-sum $M \# M'$ もまた SC に属する。

(2) ∂M の種数が 1 ならば、 M は ∂ -素である。

(3) ∂M の種数が 1 より大きいとき、 M が ∂ -素である必要十分条件は、 M が ∂ -irreducible なることである。 ([15] 参照.)

(4) $M = T_1 \cong D^2 \times S^1$ が、 SC に属し、 ∂ -素であってしかも ∂ -irreducible ではない唯一の 3次元多様体である。

(5) M が ∂ -素であるための必要十分条件は、 $\pi_1(M)$ が自由積に関して分解不可能なことである。 ([8] を参照.)

次に SC に属する 3次元多様体に proper に埋蔵されている 2次元胞体について調べる。ここに挙げる性質は、今回の話

のなかで最も重要な役割をはたすものである。

2.5. 2次元胞体の変更: C を 3次元多様体 M に埋蔵されている proper な 2次元胞体とする。今 M 中の 2次元胞体 ∇ で、次の条件を満たすものが存在すると仮定する: $\nabla \cap C = \partial \nabla \cap C$ は一つの単純弧から成り、 $\nabla \cap \partial M = \partial \nabla \cap \partial M = \overline{\partial \nabla - C}$. 図1(a) を参照。このとき、 $\overline{\partial N(C \cup \nabla; M) \cap \overset{\circ}{M}}$ は三つの互いに交わらない proper な 2次元胞体となる。($N(X; Y)$ は X の Y における正則近傍を示す。) このうちの一つは M において C とイソトープであり、残り二つを $C_1 \cup C_2$ とすると、これらは C とイソトープではない。“ $C_1 \cup C_2$ は、 C から (2次元胞体 ∇ に沿った) ∇ 型変更によって得られた” と言う。

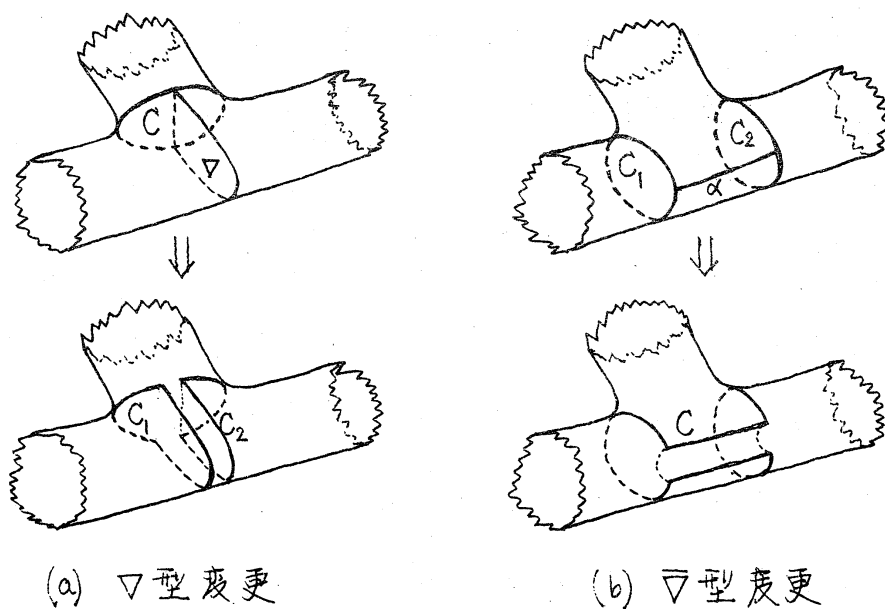


図 1

逆に、 C_1 と C_2 を 3次元多様体内の互に交わらない proper

2次元胞体とし、 α を次の条件を満たす ∂M 上の単純弧とする：
 $\alpha \cap (\partial C_1 \cup \partial C_2) = \partial \alpha$, $\partial \alpha \cap \partial C_1 \neq \emptyset \neq \partial \alpha \cap \partial C_2$. すると
 $\overline{\partial N(C_1 \cup \alpha \cup C_2; M)} \cap \overset{\circ}{M}$ もまた三つの互いに交わらない proper
 な2次元胞体となる。このうちの二つは C_1 と、もう一つは C_2
 とそれぞれ M のイソトープとなり、残り一つを C とすると、
 C は C_1 とも C_2 ともイソトープにはならない。“ C は $C_1 \cup C_2$
 から、(単純弧 α に沿っての) ∇ 型変更にによって得られた”と
 言う。(図1(b)参照)。

2.6. 補題 (Hosokawa): $\{A_1, \dots, A_p\}$ を T_p の meridian-disk
 の系、 C を T_p の proper な2次元胞体とする。 C は、互いに交
 わらない proper な2次元胞体 $C_1, \dots, C_n$ から、有限回の ∇ 型
 変更にによって得られる。但し、各 C_i は、 T_p において $A_1, \dots,$
 A_p の一つとイソトープである。

証明: まず次の条件を満たす互いに交わらない proper な
 2次元胞体 $\{D_1, \dots, D_p\}$ を選ぶ: 各 D_i は T_p を 種数1の輪環体
 T_1^i と 種数 $p-1$ の輪環体 T_{p-1}^i に分割し、それぞれは $\{A_i\}$ と
 $\{A_1, \dots, \check{A}_i, \dots, A_p\}$ を meridian-disk の系として持つ。実際、
 meridian-disk の系の定義より、 ∂M 上に互いに交わらない単
 純閉曲線の系 $\{b_1, \dots, b_p\}$ を $\partial A_i \cap b_i$ が一つの交叉点から
 成り、 $\partial A_i \cap b_j = \emptyset$, $i \neq j$, なるように選ぶことが出来るので、
 各 D_i は、 A_i とイソトープな二つの proper な2次元胞体から、

b_i に沿った ∇ 型変更に より簡単に得られる。今、補題 1.7, 1.8, 2.3 より、 C と $\{D_1, \dots, D_p\}$ は簡約化されていると仮定する (即ち、 $C \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p)$ は単純閉曲線を含まない)。

もし $C \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p) = \emptyset$ なら、 C はある一つの種数 1 の輪環体 T_1^1 か、3次元胞体 $D_0^3 = \overline{T_p - (T_1^1 \cup \dots \cup T_1^p)}$ に含まれている。もし $C \subset T_1^1$ なら、明らかに $C \approx A_1$ か $C \approx D_1$ であり、いずれの場合も補題は明らか。もし $C \subset D_0^3$ なら、 C はいくつかの $D_1, \dots, D_p$ より ∇ 型変更に繰返して得られるので、これも補題が成り立つ。

$C \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p) \neq \emptyset$ のとき、 $C \cap D_i$ の D_i 上で最小の単純弧を選び、それが D_i から切取る 2次元胞体に沿って ∇ 型変更に次々 C に施すことにより、 C は有限個の互いに交わらない 2次元胞体 $C'_1 \cup \dots \cup C'_m$ となり、 $C'_j \cap (D_1 \cup \dots \cup D_p) = \emptyset$ となる。最初の場合の議論と、 ∇ 型変更に ∇ 型変更に定義より、補題は証明された。

2.7. 補題 2.6 を $\mathbb{S}C$ に属する 3次元多様体 M に拡張する為には、次の特別な分解を考えよう。今 $M \cong P_1 \# \dots \# P_u$ とし、 $P_1, \dots, P_u$ は ∂ -素とする。 D_0^3 を 3次元胞体、 $D_1, \dots, D_u$ を互いに交わらない ∂D_0^3 上の 2次元胞体とする。 ∂P_i 上の 2次元胞体を D_i に張付けることにより 3次元多様体 M^* を得る。 $M^* \cong P_1 \# \dots \# P_u \cong M$ だから、 M においては、次の (*) を

満たす互いに交わらない proper な 2次元胞体の系 $\{D_1, \dots, D_u\}$ が存在する:

(*) 各 D_i は M を二つの 3次元多様体 $M_1^i \cong P_i$ と $M_2^i \cong P_1 \# \dots \# \overset{\vee}{P_i} \# \dots \# P_u$ に分割する.

2.8. 定理: M を 2素数分解

$$M \cong P_1 \# \dots \# P_r \# P_{r+1} \# \dots \# P_u$$

を持つ $\mathcal{SC}$ に属する 3次元多様体とし、 $P_i \neq T_1$ ($i=1, \dots, r$), $P_j \cong T_1$ ($j=r+1, \dots, u$) と仮定する。 $\{D_1, \dots, D_u\}$ を条件 (*) を満たす M の proper な 2次元胞体の系、 $A_{r+1}, \dots, A_u$ をそれぞれ $P_{r+1}, \dots, P_u$ の meridian-disk とする。更に、 C を M の proper な 2次元胞体とすると、 C は互いに交わらない proper な 2次元胞体 $C_1, \dots, C_n$ から、有限回の ∇ 型変更によって得られる。但し、各 C_i は、 M において、 $D_1, \dots, D_r, A_{r+1}, \dots, A_u$ の一つとイソトープである。

証明: 補題 2.6 とほとんど同じなので省略する。もし、

$\partial C \neq 1$ (on ∂M) で、 $C \subset P_i$, ($i=1, \dots, r$) をらば、補題 2.4 により $C \approx D_i$ となることだけ注意しておく。

2.9. 参考: 定理 2.8 の応用として、前に挙げた 1.13 を $\mathcal{SC}$ に属する 3次元多様体 M に限って議論してみよう。これは後の対 $(T_p C S^3)$ の分解定理の証明 (§5) の理解にも役立ってであろう。まず 2素数分解の存在は、補題 2.4 と ∂M の種数

が有限であることより、簡単に証明される。従って問題はそ
の一意性の証明であるが、次の命題を示せば十分である：

$\left[\begin{array}{l} M \text{ を定理 2.8 と同じものとする。もし } M \text{ が } M \cong M_1 \# M_2 \\ \text{なる分解を持つならば、} P_i \text{ の添数を適当に付け変える} \\ \text{ことにより、} M_1 \cong P_1 \# \cdots \# P_t, M_2 \cong P_{t+1} \# \cdots \# P_u, \\ 0 \leq t \leq u, \text{ と置ける。} \end{array} \right]$

注意：上記の補題 2.8 (従って 2.7) では、分解の一意性は用
いていない。

証明： $\{D_1, \dots, D_u\}$ と $A_{r+1}, \dots, A_u$ を 2.8 と同じものとする。

仮定から、 M を M_1 と M_2 に分割する proper な 2次元胞体 C
が存在する。定理 2.8 により、 C は互いに交わらない proper
な 2次元胞体の系 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ から、有限回の ∇ 型変更
により得られる。但し、各 C_i は $D_1, \dots, D_r, A_{r+1}, \dots, A_u$ の一
つとイソトープである。 $\mathcal{C}$ は M を幾つかの連結要素に分割す
る。これを $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ とすると、各 V_i は位相同型
を除いて集合

$\mathcal{D} = \{D^3, P_1, \dots, P_u, \text{これら } P_1, \dots, P_u \text{ の幾つかの disk-sums}\}$
に属し、更に各 $P_1, \dots, P_r$ は丁度一つの $\mathcal{V}$ の元 V_i についてのみ、
その 2-素を要素として含まれる。

さて、 $\mathcal{C}$ の二つの要素、これを仮に C_{n-1} と C_n とする、に
対して最初の ∇ 型変更を行い、得られた 2次元胞体を C_{n-1} と

記すことにする。すると、新しい2次元胞体の系 $C' = \{C_1, \dots, C_{n-1}\}$ と C' が M を分割して得られる3次元多様体の集合 $\mathcal{V}' = \{V'_1, \dots, V'_m\}$ が得られる。ここで二つの場合が考えられる。

(i) $\mathcal{V}'$ に丁度一つ元, これを V'_m とする, が存在して, $V'_m \cap C_{n-1} \neq \emptyset$ となるとき: $\bar{\alpha}$ 型変換の定義から, V'_m は $\mathcal{V}$ の一つのエと T_1 との disk-sum と位相同型となることがすぐ判る。もし $r=u$ ならば, C の各元も C' の各元も, 必ず M を二つの連結要素に分割するので, この (i) の場合は生じない。従って V'_m は再び集合 $\mathcal{P}$ に属し, 特に各 $P_1, \dots, P_r$ は丁度一つ $\mathcal{V}'$ の要素に対してその2-素を要素として含まれる。

(ii) $\mathcal{V}'$ に丁度二つの元, これを V'_{m-1} と V'_m とする, が存在して, $V'_{m-1} \cap C_{n-1} \neq \emptyset \neq V'_m \cap C_{n-1}$ となるとき: 再び $\bar{\alpha}$ 型変換の定義より, V'_{m-1} と V'_m の一方は $\mathcal{V}$ の一つのエと位相同型であり, 他の一方は $\mathcal{V}$ の二つのエの disk-sum が $\mathcal{V}$ の一つのエと T_1 との disk-sum のいずれかと位相同型となることが容易に結論される。実際 $r=u$ ならば, (i) で述べたと同じ理由で最後の場合, 即ち $\mathcal{V}$ のエと T_1 との disk-sum, は生じない。結局 $\mathcal{V}'$ の元はすべて集合 $\mathcal{P}$ に属し, 更に各 $P_1, \dots, P_r$ は丁度一つ $\mathcal{V}'$ のエに対してその2-素を要素として含まれる。

上の議論を反復すると, 最後には $C^{(n-2)} = \{C\}$ と $\mathcal{V}^{(n-2)} = \{V_1^{(n-2)}, V_2^{(n-2)}\} = \{M_1, M_2\}$ が得られ, M_1 も M_2 も $\mathcal{P}$ に属しかつ各 $P_1, \dots,$

P_r は M_1 と M_2 のどちらか一方の 2-素を要素として含まれることが判る。この時 $M_1 \cong P_1 \# \cdots \# P_s \# T_1 \# \cdots \# T_l$ ならば、群論でよく知られる Grushko-Neumann の定理により、 M_2 は $u-r-l$ 個の T_i を 2-素を要素として持つことが判り、証明は完結する。

2.10. 定理 2.8 の系: M を SC に属する 3次元多様体とし、 $\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$ で更に、 G_1, G_2 共に自由積に関して分解不可能で無限巡回群でもないと仮定する。 C_1 と C_2 を、 M の proper な 2次元胞体で、 $\partial C_1 \neq 1 \neq \partial C_2$ (on ∂M) とすると、 $C_1 \approx C_2$ 。

2.11. 定理 2.8 の系: M を SC に属する 3次元多様体とし、 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} * G$ で更に、 G は自由積に関して分解不可能で、 $G \neq \mathbb{Z}$ と仮定する。 C_1 と C_2 を、 M の proper な 2次元胞体で $\partial C_1 \neq 0 \neq \partial C_2$ (on ∂M) とすると、 $C_1 \approx C_2$ 。

2.10, 2.11 のいずれの場合も、仮定を満たす 2次元胞体 C_1, C_2 の存在は、補題 2.4 に依る。証明はいずれも初等的で C_1, C_2 の条件と、 ∇ 型変更の定義を活用して得られるので、省略する。

§ 3. 対 $(T_p \subset S^3)$ の素な分解. 主定理

ここぞ、序で述べた対の分解定理を整理し、更にこの話の主定理を挙げる。

3.1. 定義: 二つの対 $(T_p \subset S^3)$ と $(T_{p'} \subset S^3)$ とが 合同 とは、

方向を保つ位相写像 $\psi: S^3 \rightarrow S^3$ で $\psi(T_p) = T'_p$ をなすものが存在するときとする。

もちろんこの合同の関係は、同値関係である。対 $(T_p \subset S^3)$ の合同類を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ で表し、 $(T_p \subset S^3)$ の knot type という。もし $(T_p \subset S^3)$ と $(T'_p \subset S^3)$ が合同ならば、それらの補空間 $S^3 - \overset{\circ}{T}_p$ と $S^3 - \overset{\circ}{T}'_p$ はもちろん位相同型であるので、混乱の無い場合には、“ $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の補空間 $S^3 - \overset{\circ}{T}_p$ ” により、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ のある代表元 $(T_p \subset S^3)$ の補空間 $S^3 - \overset{\circ}{T}_p$ を意味するものとする。

3.2. 対の和：二つの knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ と $\langle T_q \subset S^3 \rangle$ とが、同一の S^3 の中で、しかも2次元球面 S^2_0 の反対側に表現されており、 $T_p \cap T_q = \partial T_p \cap \partial T_q = D^2_0 \subset S^2_0$ を2次元胚体 D^2_0 を共有しているとすると、種数 $p+q$ の対 $(T_p \cup_{\partial} T_q \subset S^3)$ を得る。この新しい対の合同類を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ と $\langle T_q \subset S^3 \rangle$ の和といい、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle \# \langle T_q \subset S^3 \rangle$ で示す。また S^2_0 は $\langle T_p \cup T_q \subset S^3 \rangle$ の分解 $\langle T_p \subset S^3 \rangle \# \langle T_q \subset S^3 \rangle$ を与えるという。

Alexander の定理 [1] と Newman-Gugenheim の homogeneity Th. により、次が得られる。

3.3. 補題：すべて a knot type の集合 $\{\langle T_p \subset S^3 \rangle \mid p=0,1,2,\dots\}$ において、和 $\#$ は well-defined であり、可換で結合律も成り立つ。即ち、 $\{\langle T_p \subset S^3 \rangle \mid p=0,1,2,\dots\}$ は、演算 $\#$ のもとで可換な半群となる。特に、 $\langle T_0 \subset S^3 \rangle$ がその単位となる。

3.4. 定義: knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素であるとは、 $p \neq 0$ であり、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle$ なる任意の分解について、 $p_1 = 0, p_2 = 0$ の少なくとも一方が必ず成立するとき。
この定義より次が得られる。

3.5. 補題: もし $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle$ ならば、
 $p = p_1 + p_2$ である。

3.6. 補題: すべての種数 1 の knot type $\langle T_1 \subset S^3 \rangle$ は素である。

上記補題 3.5 と 3.6 と、種数の有限性とにより次を得る。

3.7. 定理: すべての $p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ は、素な knot types の和 $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$ に分解される。

そこで当然ながら、その分解の一意性の問題となる。即ち

3.8. 問題: $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ についての素な分解は一意的か？即ち 3.7 における和の要素 $\langle T_{p_i} \subset S^3 \rangle$ は一意的に決定されるか？

この問題の解答はまだ無い。次に挙げるのが、今回の話の主定理である (Tsukui [16], Theorem 5 参照)。

3.9. 定理: $p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

を持ち、各 $i=1, \dots, u$ について

$$(**) \quad S^3 - \dot{T}_{p_i} \text{ は 2-素 である}$$

と仮定する。更に、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

を持つならば、これら二つの素分解は順序を除いて一致する。

証明は §§ 4 と 5 で与える。条件 (**) を満たさない素な knot types が存在するとは、別の機会に述べたので、今回は省略する。3.9 の証明の前に系を挙げておく。

3.10. 系: $p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が二つ素分解

$$\begin{aligned} \langle T_p \subset S^3 \rangle &= \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_p} \subset S^3 \rangle \\ &= \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_p} \subset S^3 \rangle \end{aligned}$$

を持つとすると、この二つの素分解は順序を除いて一致する。

証明: 明らかに $p_i = 1 = q_i$, $i = 1, \dots, p$, だから、2.4 により、 $S^3 - \dot{T}_{p_i}$, $S^3 - \dot{T}_{q_i}$ はすべて2素である。

3.11. 系: knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ について、 $\pi_1(S^3 - \dot{T}_p) \cong G_1 * G_2$ であり、 G_1, G_2 が自由積に関して分解不可能ならば、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の素分解は一意的である。

3.12. 系: 複素数 2 の knot type $\langle T_2 \subset S^3 \rangle$ の素分解は一意的である。

上記の二つの系は、定理 3.9 を用いずとも、前章の系 2.10 と 2.11 を用いて、容易に証明される。

§ 4. Unknotted 対 ($T_p \subset S^3$).

4.1. 定義: 対 ($T_p \subset S^3$) が unknotted とは, $S^3 - \dot{T}_p \cong T_p$.

Dehn's Lemma により次を得る.

4.2. 補題: 種数 1 の unknotted 対は互いに合同である.

この補題により、種数 1 の unknotted 対の合同類を、特に $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ で示す。更に $(n-1)\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0 \# \langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ を単純に $n\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ と記す。もちろん $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ は素である。

もし対 ($T_p \subset S^3$) が unknotted ならば ∂T_p は S^3 の Heegaard の分解を与える。従って、Waldhausen の結果を我々の立場で言換えると次のようになる。

4.3. 補題 (Waldhausen [17]): $p \neq 0$ なる ($T_p \subset S^3$) が unknotted ならば、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle = p\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ を素分解を持ち一意である。

補題 4.3 は、unknotted 対 ($T_p \subset S^3$) に対しては、特に T_p の meridian の系 $\{a_1, \dots, a_p\}$ と $S^3 - \dot{T}_p$ の meridian の系 $\{b_1, \dots, b_p\}$ が存在して、 $a_i \cap b_i$ が丁度一つの交叉点から成り、 $a_i \cap b_j = \emptyset$, $i \neq j$, が成り立つ。Papakyriakopoulos [12] を参照。

定理 3.9 を証明する為に、次の補題が重要である。

4.4. 補題: $p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \dots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle \# n\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$$

を持ち、各 $i=1, \dots, v$, について

$$(***) \quad S^3 - \dot{T}_{p_i} \text{ は } \partial\text{-irreducible である}$$

と仮定する。更に $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が分解 $\langle T_{p-n} \subset S^3 \rangle \# n \langle T_1 \subset S^3 \rangle$ を持つならば、

$$\langle T_{p-n} \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle$$

である。

証明には、Waldhausen [17] に依る "gates System" の概念を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ に拡張して利用する。

4.5. 定義: 3次元多様体 $S^3 - \dot{T}_p$ の meridian-disk の系 $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ が $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の good-system であるとは、 T_p の meridian-disk の系 $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ が存在して次を満たす:

(i) $A_i \cap B_i = \partial A_i \cap \partial B_i$ は丁度一つの交叉点から成る,

(ii) $A_i \cap B_j = \emptyset$ for $i > j$.

B を A に対する ordered-system と言う。

以下 good-system の性質をいくつか挙げておく。

4.6. 補題 (Waldhausen [17]): $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の任意の good-system $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ に対して、

(ii)' $A_i \cap B_j = \emptyset$ for $i \neq j$,

を満たす ordered-system $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ が存在する。

証明は、[17] の Lemma (2.2) と全く同じである。次の初等的な事実がなかなか有力である。

4.7. 補題: $\{A_i\}$ を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の good-system, $\{B_i\}$ を ordered-system とすると、2次元球面 $\partial N(A_i \cup B_i; S^3)$ は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p-1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_1 \subset S^3 \rangle^{\circ}$$

を与える。更に次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \langle T_{p-1} \subset S^3 \rangle &= \langle T_p \cup N(A_1; S^3 - \dot{T}_p) \subset S^3 \rangle \\ &= \langle \overline{T_p - N(B_1; T_p)} \subset S^3 \rangle. \end{aligned}$$

補題 4.7 に補題 1.11 と 4.6 を合わせると次を得る。

4.8. 補題: $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ を $(T_p \subset S^3)$ の good-system とすると、各 $i = 1, \dots, n$, について

$$T_p(A_i) \equiv T_p \cup N(A_i; S^3 - \dot{T}_p) \cong T_{p-1}.$$

更に $T_p(A) \equiv T_p \cup N(A_1; S^3 - \dot{T}_p) \cup \dots \cup N(A_n; S^3 - \dot{T}_p),$

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_p(A) \subset S^3 \rangle \# n \langle T_1 \subset S^3 \rangle^{\circ}.$$

4.9. 補題: A と A' を $(T_p \subset S^3)$ の good-system とし、 B が共通の ordered-system ならば、 $\langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_p(A') \subset S^3 \rangle$.

4.10. 定義: $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, $A' = \{A'_1, \dots, A'_n\}$ をそれぞれ 3次元多様体 M の互に交わらない proper な 2次元胞体系とする。 A と A' が 単純 $\bar{\nabla}$ -同値、 $A \bar{\sim} A'$ と示す、とは、 A と A' の元の添数も適当に付け変えたと、 $A_i \approx A'_i$ (for $i = 1, \dots, n-1$) であって、 A'_n は $A_{n-1} \cup A_n$ から、 $\bar{\nabla}$ 型変更に得られたとき。

$\bar{\nabla}$ 型変換の定義より、 $A_{n-1} \cup A_n$ から、 $\bar{\nabla}$ 型変換により A_n が得られるので、 $A \bar{\sim} A'$ ならばもちろん $A' \bar{\sim} A$ である。

更に、 A と A' が $\bar{\nabla}$ -同値 とは、有限個の、 M の proper な 2

次元胞体の系の列 $\mathcal{A} = A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m = A'$ が存在して, $A_i \bar{\sim} A_{i+1}$, $i=0, 1, \dots, m-1$, のとき. もちろん $\bar{\sim}$ -同値は, 同値関係であり, これを $A \bar{\sim} A'$ で示す.

4.11. 補題: $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots, A'_n\}$ を, 対 $(T_p \subset S^3)$ の補空間 $S^3 - \dot{T}_p$ の proper な 2次元胞体の系とする. もし, $A \bar{\sim} A'$ ならば,

$$\langle T_p \cup N(\mathcal{A}; S^3 - \dot{T}_p) \subset S^3 \rangle = \langle T_p \cup N(\mathcal{A}'; S^3 - \dot{T}_p) \subset S^3 \rangle.$$

証明: $A \bar{\sim} A'$ のとき証明すれば十分である. ところが $\partial(T_p \cup N(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}; S^3 - \dot{T}_p))$ 上では $\partial A_n \approx \partial A'_n$ であり, 証明は終わる.

4.12. 補題: $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ を $(T_p \subset S^3)$ の good-system とし, $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ を $S^3 - \dot{T}_p$ の互いに交わらない proper な 2次元胞体の系とする. もし, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{X}$ が次の三つの仮定

- (1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \emptyset$,
- (2) $T_p \cup N(\mathcal{X}; S^3 - \dot{T}_p) \cong T_{p-n}$,
- (3) 各 $i=1, \dots, n$, について, $\partial X_i \simeq 1$ (on $\partial T_p(\mathcal{A})$)

を満たすならば, $\mathcal{A} \bar{\sim} \mathcal{X}$ (in $S^3 - \dot{T}_p$) である.

証明: 条件 (3) より, $\mathcal{X} \bar{\sim} \mathcal{X}' = \{X'_1, \dots, X'_n\}$ で, (1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}' = \emptyset$, (2) $T_p \cup N(\mathcal{X}'; S^3 - \dot{T}_p) \cong T_{p-n}$, (3)' $\partial X'_1 \cup \dots \cup \partial X'_n$ は $\partial T_p(\mathcal{A})$ 上で互いに交わらない 2次元胞体の系 $\tilde{X}_1 \cup \dots \cup \tilde{X}_n$ を bound する……を満たす 2次元胞体の系 $\mathcal{X}'$ が存在する. よって, $\mathcal{A}$

$\partial X'$ を示せばよい。

条件 (2) より、 $\partial X'_i = \partial \tilde{X}_i \sim 0 \text{ (on } \partial T_p)$ であり、 $\partial T_p - (\partial X'_1 \cup \dots \cup \partial X'_n)$ が連結であることが判る。 $T_p(A)$ の定義より、各 $i = 1, \dots, n$, について、 $\partial T_p(A)$ 上には二つの 2次元胞体 $A_i^+ \cup A_i^-$ が存在して、 $A_i^+ \approx A_i \approx A_i^- \text{ (in } S^3 - \dot{T}_p)$ である。まず次を主張する：

(i) 各 $\tilde{X}_i, i=1, \dots, n$, に対して、少なくとも一つの A の元、これを A_j とする、が存在して、 A_j^+ と A_j^- の一方が $\tilde{X}_i$ に含まれ、他方が $\tilde{X}_i$ には含まれない。なぜなら、もしこのような A_j が存在しないならば、明らかに $\partial X_i = \partial \tilde{X}_i \sim 0 \text{ (on } \partial T_p)$ となり、これは条件 (2) に反する。

そこで、

$$A(X'_i) = \{ A_j \in A \mid A_j^+ \subset \tilde{X}_i \text{ かつ } A_j^- \not\subset \tilde{X}_i, \text{ または } A_j^- \subset \tilde{X}_i \text{ かつ } A_j^+ \not\subset \tilde{X}_i \} \subset A$$

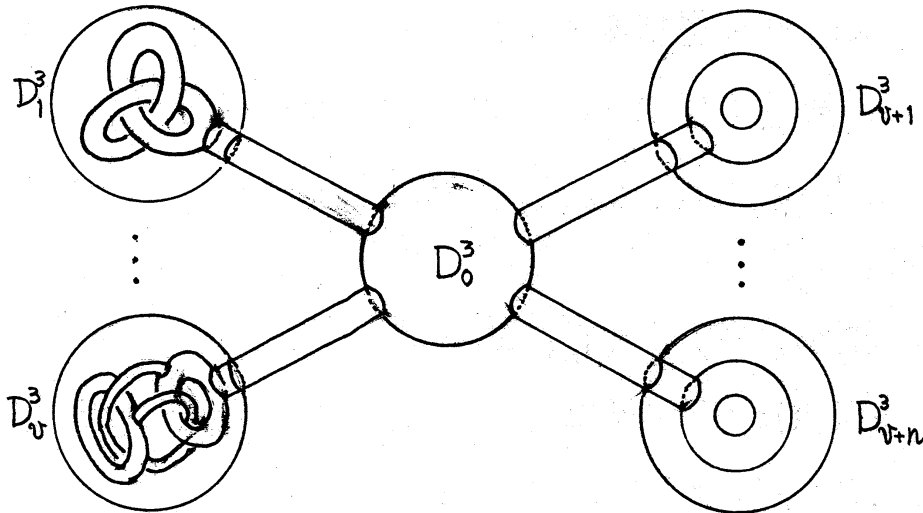
とおくと、次が判る：

(ii) $i \neq k$ ならば $A(X'_i) \neq A(X'_k)$ 。なぜなら、もし $A(X'_i) = A(X'_k)$ ならば、 $\partial T_p - \partial X'_i - \partial X'_k$ は連結でなくなり、条件 (2) に反する。

これから後は簡単なので省略する。

4.13. 補題 4.4 の証明：判り易くする為に、証明を三段に分割する。

第一段: まず, $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の代表元を次のようにとる: S^3 中に, 互いに交わらない $v+n+1$ 個の 3次元胞体 $D_0^3, D_1^3, \dots, D_{v+n}^3$ を選び, 各 $D_1^3, \dots, D_v^3$ の内部に $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle$ の代表元を作り, $D_{v+1}^3, \dots, D_{v+n}^3$ の内部に $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ の代表元を作る. ∂D_0^3 上に, 互いに交わらない $v+n$ 個の 2次元胞体をと, 各代表元の境界上の 2次元胞体と, ∂D_i^3 とは一つの 2次元胞体で交わるような細い棒をつなぐ(下図参照).



次に, $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ の各々の代表元について, good-system とその ordered-system を選ぶ: とに よ り, $(T_p \subset S^3)$ の good-system $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ とその ordered-system $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ を得る. もちろん, (ii)' $A_i \cap B_j = \emptyset$ for $i \neq j$, が成立し, $\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \dots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle$ となる.

作り方から, SC に属する 3次元多様体 $S^3 - \dot{T}_p$ に対して $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{n+v}\} = \{\partial D_1^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p), \dots, \partial D_{n+v}^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p)\}$ は 2.7

(*) の条件を満たす 2 素な分解を与えていることに注意。

一方仮定から、 $(T_p \subset S^3)$ の good-system $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ぞ。
 $\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p-n} \subset S^3 \rangle$ を満たすものが存在する。今、 $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ を (ii) $X_i \cap Y_j = \emptyset$ for $i \neq j$, なる ordered-system とする。
 ここで、補題 1.7 と 1.8 とにより、 $\partial \mathcal{A} \cup \partial \mathcal{B}$ と $\partial \mathcal{X}$,
 $\partial \mathcal{A} \cup \partial \mathcal{B}$ と $\partial \mathcal{Y}$, とはそれぞれ ∂T_p 上ぞ。 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ と $\mathcal{X}$ とは $S^3 - \dot{T}_p$ で
 簡約化されているとしてよい。

今、 $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}$ の連結要素の個数を λ とすると次を得る：

(4.14) 補題：種数 $p+\lambda$ の対 $(T_{p+\lambda} \subset S^3)$ と、その二つの good-system $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots, A'_{p+\lambda}\}$, $\mathcal{X}' = \{X'_1, \dots, X'_{p+\lambda}\}$ が存在して、
 次を満たす。

$$(1) \langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(\mathcal{A}') \subset S^3 \rangle,$$

$$\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(\mathcal{X}') \subset S^3 \rangle.$$

$$(2) \mathcal{A}' \cap \mathcal{X}' = \emptyset, \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{A}' = \emptyset.$$

証明：もし $\mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \emptyset$ ならば何もなくてよい。

今、 $A_i \cap X_j$ の単純弧 β について、正則近傍 $N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)$ とし、
 二つの 2 次元胞体 $N(\beta; S^3 - \dot{T}_p) \cap \partial T_p = N(\beta \cap \partial T_p; \partial T_p)$ を
 $B \cup Y$ とおく。 $T_p \cup N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)$ は種数 $p+1$ の輪環体ぞ、これを
 単に $(T_{p+1} \subset S^3)$ と記し、この対について考察する。 β は A_i
 ぞも X_j ぞも proper だから $\overline{A_i - N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)}$ と $\overline{X_j - N(\beta; S^3 - \dot{T}_p)}$
 も二つの 2 次元胞体から成る。これらの、それぞれ $A_i^* \cup A_i^{**}$,

$X_j^* \cup X_j^{**}$ とおく。特に、 $A_i^* \cap B_i = A_i \cap B_i$, $A_i^{**} \cap B_i = \emptyset$, $X_j^* \cap Y_j = X_j \cap Y_j$, $X_j^{**} \cap Y_j = \emptyset$ と仮定してよい。そこで次 α 法則で添数と付与すると、新しい対 $(T_{p+1}(S^3))$ の二つの good-system $A' = \{A'_1, \dots, A'_{n+1}\}$, $X' = \{X'_1, \dots, X'_{n+1}\}$ を得る。

$$\begin{cases} A_k \rightarrow A'_k & \text{for } k < i, \\ A_i^* \rightarrow A'_i, A_i^{**} \rightarrow A'_{i+1}, \\ A_k \rightarrow A'_{k+1} & \text{for } k > i. \end{cases} \quad \begin{cases} B_k \rightarrow B'_k & \text{for } k < i, \\ B_i \rightarrow B'_i, B \rightarrow B'_{i+1}, \\ B_k \rightarrow B'_{k+1} & \text{for } k > i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_k \rightarrow X'_k & \text{for } k < j, \\ X_j^* \rightarrow X'_j, X_j^{**} \rightarrow X'_{j+1}, \\ X_k \rightarrow X'_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases} \quad \begin{cases} Y_k \rightarrow Y'_k & \text{for } k < j, \\ Y_j \rightarrow Y'_j, Y \rightarrow Y'_{j+1}, \\ Y_k \rightarrow Y'_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

明らかに: (1) $\langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+1}(A') \subset S^3 \rangle$, (2) $A' \cap X' = \langle T_p(X) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+1}(X') \subset S^3 \rangle$, $A \cap X = \beta$, かつ成り立ち、更に $\mathcal{D} \cap X' = \mathcal{D} \cap X$ である。

この操作を λ 回繰返すとにより、(4.14) が得られる。

第二段: 次に $\mathcal{D} \cap X'$ を除く。第一段と同じように、 $\mathcal{D} \cap X'$ の連結要素の個数を μ とすると、次が得られる。

(4.15) 補題: 種数 $p+\lambda+\mu$ の対 $(T_{p+\lambda+\mu}(S^3))$ と、その二つの good-system $A'' = \{A''_1, \dots, A''_{n+\lambda+\mu}\}$, $X'' = \{X''_1, \dots, X''_{n+\lambda+\mu}\}$ と、更に、互いに交わらない proper な 2次元胞体の系 $\mathcal{D}' = \{D'_1, \dots, D'_\mu\}$ が $S^3 - T_{p+\lambda+\mu}$ に存在して次を満たす:

$$(1) \quad \langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+\mu}(A'') \subset S^3 \rangle,$$

$$\langle T_p(X) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+\mu}(X'') \subset S^3 \rangle,$$

$$(2) A'' \cap X'' = \emptyset, A'' \cap D' = \emptyset, D' \cap X'' = \emptyset,$$

(3) D' は $S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda+\mu}(A'')$ を ν 個の 2-irreducible 3次元多様体に分解する。

証明: $D_i \cap X'_j$ の $(D_i$ 上の最小の) 単純弧 Y について、正則近傍 $N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})$ をとり、前の証明と同じように、この 2次元胞体 $N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda}) \cap \partial T_{p+\lambda}$ を $B \cup Y$ とおく。すると、 $T_{p+\lambda} \cup N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})$ は種数 $p+\lambda+1$ の輪環体となり、これを $T_{p+\lambda+1}$ と書く。 Y は D_i での X'_j での proper だから、 $\overline{D_i - N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})} = D_i^* \cup D_i^{**}$, $\overline{X'_j - N(Y; S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda})} = X_j^* \cup X_j^{**}$ とおき、 $X_j^* \cap Y'_j = X'_j \cap Y'_j$, $X_j^{**} \cap Y'_j = \emptyset$ としてよい。 $D_i \cap (A' \cup B) = \emptyset$ より $(D_i^* \cup D_i^{**}) \cap (A' \cup B) = \emptyset$ である。そこで、前の場合と同じように、次の法則で添数と付与すると、新しい対 $(T_{p+\lambda+1} \subset S^3)$ の $\Rightarrow$ a good-system $A'' = \{A_1'', \dots, A_{n+\lambda+1}''\}$, $X'' = \{X_1'', \dots, X_{n+\lambda+1}''\}$ と、 $S^3 - \overset{\circ}{T}_{p+\lambda+1}$ における互いに交わらない 2次元胞体の系 $D' = \{D'_1, \dots, D'_\nu\}$ を得る。

$$\begin{cases} A'_k \rightarrow A''_k & k=1, \dots, n+\lambda, \\ D_i^* \rightarrow A''_{n+\lambda+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'_k \rightarrow B''_k & k=1, \dots, n+\lambda, \\ B \rightarrow B''_{n+\lambda+1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_k \rightarrow X''_k & \text{for } k < j, \\ X_j^* \rightarrow X''_j, X_j^{**} \rightarrow X''_{j+1}, \\ X'_k \rightarrow X''_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'_k \rightarrow Y''_k & \text{for } k < j, \\ Y'_j \rightarrow Y''_j, Y \rightarrow Y''_{j+1}, \\ Y'_k \rightarrow Y''_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

$$D_k \rightarrow D'_k \text{ for } k \neq i,$$

$$D_i^{**} \rightarrow D'_i.$$

明らかに、(1) $\langle T_p(A) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(A') \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+1}(A'') \subset S^3 \rangle$,

$\langle T_p(X) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(X') \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+1}(X'') \subset S^3 \rangle$, (2) $A'' \cap X'' = \emptyset$, $A'' \cap \mathcal{Q}' = \emptyset$, $\mathcal{Q}' \cap X'' = \mathcal{Q} \cap X' - Y$ が成り立ち、 $\mathcal{Q}$ の条件より (3) も成り立つ。

この操作を μ 回繰返すことにより、(4.15) が得られる。

第三段: 前段の補題(4.15)により得られた二つの good-system A'' と X'' が、補題 4.12 の A と X の条件を満たすことを示せば、補題 4.11 により、補題 4.4 の証明は完了する。4.12(1) は (4.15) の (2) であり、4.12(2) は X'' が good-system であることより当然成り立つ。4.12(3) は、(4.15) の (3) と (2) ∂ -irreducible の定義を合わせると得られる。

§5. 主定理 3.9 の証明.

主定理 3.9 を証明する為に、まず次の補題が必要である。

5.1. 補題: $p \neq 0$ をな knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が、素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

を持ち、各 $i=1, \dots, u$ について

(***) $S^3 - \dot{T}_{p_i}$ は ∂ -irreducible である

と仮定する。更に $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_q \subset S^3 \rangle \# \langle T_r \subset S^3 \rangle$ を分解が存在するならば、 $\langle T_{p_i} \subset S^3 \rangle$ の添数を適当に付け表して

$$\langle T_q \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_t} \subset S^3 \rangle,$$

$$\langle T_r \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_{t+1}} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

とすることが出来る。但し $0 \leq t \leq u$ 。

即ち、上記 (***) の仮定を持つならば、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の素分解は一意であることを示している。

証明: 補題 4.4 の証明……即ち 4.13……の第一段と同じように、3次元球面 S^3 の中に $u+1$ 個の交わらない 3次元胞体 $D_0^3, D_1^3, \dots, D_u^3$ をとり、各 $D_1^3, \dots, D_u^3$ の内部に $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$ の代表元を作れ。各代表元の境界上の 2次元胞体と ∂D_0^3 上の 2次元胞体を、 ∂D_i^3 と一つの 2次元胞体で交わるような細い棒でつなぐことにより、 $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ を得る。作り方から、 $\mathcal{Q} = \{D_1, \dots, D_u\} = \{\partial D_1^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p), \dots, \partial D_u^3 \cap (S^3 - \dot{T}_p)\}$ とおけば、 $\mathcal{Q}$ は 2.7 の (*) の条件を満たす系であることが判る。

今、仮定から、分解 $\langle T_q \subset S^3 \rangle \# \langle T_r \subset S^3 \rangle$ を与える 2次元球面 Σ が S^3 に存在する。ところが定理 2.8 より、 $S^3 - \dot{T}_p$ の proper な 2次元胞体 $\Sigma \cap (S^3 - \dot{T}_p)$ は、互いに交わらない 2次元胞体の系 $\{C_1, \dots, C_n\}$ より、有限回の $\bar{\nu}$ 型変換により得られる。但し、各 C_i は $D_1, \dots, D_u$ の一つとイソトープである。

$\partial D_1, \dots, \partial D_u$ は、 T_p で 2次元胞体 $\partial D_1^3 \cap T_p, \dots, \partial D_u^3 \cap T_p$ を bound するから、 $\partial C_1, \dots, \partial C_n$ もまた T_p で 2次元胞体 $E_1, \dots, E_n$ を bound するとしてよい。結局、 S^3 のなかで、互いに交わらない 2次元球面の系 $\{C_1 \cup E_1, \dots, C_u \cup E_u\}$ が得られ、この系は、分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{S_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{S_{n+1}} \subset S^3 \rangle$$

と与え、各要素 $\langle T_{S_i} \subset S^3 \rangle$ は、集合

$$\mathcal{D} = \{ \langle T_0 \subset S^3 \rangle, \langle T_p \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_n} \subset S^3 \rangle,$$

これら $\langle T_p \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_n} \subset S^3 \rangle$ の幾つかの和 }

に属し、更に各 $\langle T_p \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{p_n} \subset S^3 \rangle$ は丁度一つの要素 $\langle T_{S_i} \subset S^3 \rangle$ について、その素を要素として含まれる。

この後は、2.9 の証明と全く平行に進むので、詳細は省略する。要するに、 $\sum_n (S^3 - T_p)$ を $\{C_1, \dots, C_n\}$ から $\bar{\nu}$ 型変更ににより構成する際に、 $\bar{\nu}$ 型変更に用いる ∂T_p 上の単純弧の列 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ に沿って、同時に $\{E_1, \dots, E_n\}$ にも $\bar{\nu}$ 型変更を行えば、補題 1.5 等の援用により、 Σ が得られる。次の補題を挙げれば十分であらう。証明は略すが、 $\bar{\nu}$ 型変更の定義をよく見れば明らかである。

5.2. 補題: $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の代表え、 Σ_1, Σ_2 を S^3 の中の交わらない 2 次之球面で、 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle$$

と与えらとする。更に、 Σ_1 と Σ_2 はそれぞれ、分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle \rangle,$$

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle \rangle$$

と与えらとする。 α を ∂T_p 上の単純弧で次の条件を満たすとする：
 $\alpha \cap \Sigma_1 = \partial \alpha \cap \Sigma_1 \neq \emptyset \neq \alpha \cap \Sigma_2 = \partial \alpha \cap \Sigma_2$.

今、 Σ を、 $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap (S^3 - \dot{T}_p)$ に α に沿って ∇ 型変更を行い、同時に $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap T_p$ に α に沿って ∇ 型変更を行って得られた S^3 の 2 次元球面とすると、 Σ は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle\rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle$$

を与える。

5.3. 主定理 3.9 の証明：素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

を与えらる 2 次元球面の系を $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{u-1}\}$ とおけば、2 次元胞体の系 $\{\Sigma_1 \cap (S^3 - \dot{T}_p), \dots, \Sigma_{u-1} \cap (S^3 - \dot{T}_p)\}$ は、 $S^3 - \dot{T}_p$ の ∂ -素分解を与える。補題 1.13 (2.9 参照) より、 $S^3 - \dot{T}_p$ の ∂ -素分解は一意であるから、このうち丁度 n 個は T_1 である。即ち、

$\langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle, \dots, \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$ の中に、丁度 n 個 $\langle T_1 \subset S^3 \rangle$ が含まれる。補題 4.4 から

$$\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

としてよい。補題 2.4 より、この分解は補題 5.1 の (***) の条件を満たすので、定理 3.9 の証明は完了する。

5.4. 参考：定理 3.9 は、(**) の仮定の上に更に、同じ個数の素分解を持つならば、その二つの素分解が一致する... という、非常に強い仮定のもとでの話となったが、ここはもっと弱くすることが可能である。が、準備が長くなり過ぎるので、今回はこの形に止めた。また、書き易くする為に、輪

環体 T_p の話にしたが、Tsukui [16] のように閉曲面にしてもほとんど同じ結果が得られる。

参考文献

- [1] J.W.Alexander : On the subdivision of 3-space by a polyhedron, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 10(1924), 6-8.
- [2] D.B.A.Epstein : Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 115(1966), 83-107.
- [3] C.D.Feustel : On pasting balls to handlebodies, Bull. Amer. Math.Soc., 76(1970), 720-722.
- [4] R.H.Fox : On the imbedding of polyhedra in 3-space, Ann. of Math.(2), 49(1948), 462-470.
- [5] H.B.Griffiths : On systems of curves orthogonal to a 3-dimensional handlebody, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 31 (1967), 89-115.
- [6] J.L.Gross : A unique decomposition theorem for 3-manifolds with connected boundary, Trans.Amer.Math.Soc., 142(1969), 191-199.
- [7] T.Homma : On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in E^3 , Osaka Math.J., 6(1954), 129-134.
- [8] W.Jaco : Three-manifolds with fundamental group a free product, Bull.Amer.Math.Soc., 75(1969), 972-977.
- [9] W.Magnus, A.Karrass and D.Solitar : Combinatorial Group Theory, Interscience, New York, 1966.
- [10] C.D.Papakyriakopoulos : On solid tori, Proc.London Math. Soc.(3), 7(1957), 281-299.

- [11] C.D.Papakyriakopoulos : On Dehn's lemma and asphericity of knots, Ann. of Math.(2), 66(1957), 1-26.
- [12] ————— : A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures, Ann. of Math.(2), 77(1963), 250-305.
- [13] J.Stallings : On the loop theorem, Ann. of Math.(2), 72 (1960), 12-19.
- [14] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J. Math., 7(1970), 375-396.
- [15] G.A.Swarup : Some properties of 3-manifolds with boundary, Quart.J.Math. Oxford(2), 21(1970), 1-24.
- [16] Y.Tsukui : On surfaces in 3-space, Yokohama Math.J., 18 (1970), 93-104.
- [17] F.Waldhausen : Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7(1968), 195-203.