

可縮な POSET に関する一注意

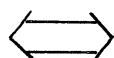
東海大 理学部 郡山 彬 (Akira Koriyama)

東海大 理学部 土屋 守正 (Morimasa Tsuchiya)

$P = (P, \leq)$ を finite poset とする。

P の order complex を $\Delta(P)$ とする。

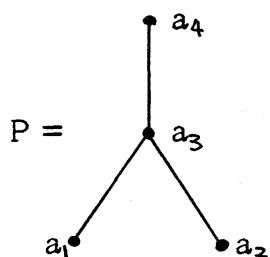
i.e. $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ が n -simplex in $\Delta(P)$



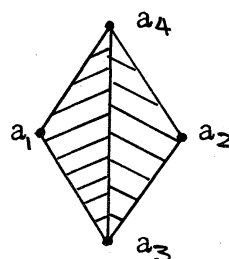
$a_{i_0} < a_{i_1} < \dots < a_{i_n}$ が n -chain in P

Def. P が contractible $\iff$ polyhedron $|\Delta(P)|$ が contractible

Ex.



ならば $|\Delta(P)| =$



故に P は contractible。

我々は以下に述べる理由から contractible poset に注目したい。

- (1) poset を homology の立場で分類するとき, 1 点の次に単純な poset は contractible な poset である。
- (2) 同じことであるが polyhedron (or simplicial complex) を face poset を通して研究するとき, 最も基本的図形に対応する poset である。
- (3) 応用上重要である。 (See, Quillen, Brini, Bjorner)

例えば,

P, Q : posets, $P \times Q = \{(p, q) \mid p \in P, q \in Q\}$

$(p, q) \leq (p_1, q_1)$ iff $p < p_1$ and $q < q_1$

とすると

明らかに $(P \times Q, \leq)$ は poset である。このとき, 次の定理が成り立つ。

定 理. $Z \subset P \times Q : \forall \text{closed (i.e. } \hat{p} < \hat{q} \in Z \Rightarrow \hat{p} \in Z) \text{ subsetとする.}$

$\forall p \in P, \forall q \in Q$ に対して

$$Z_p = \{q \in Q \mid (p, q) \in Z\}$$

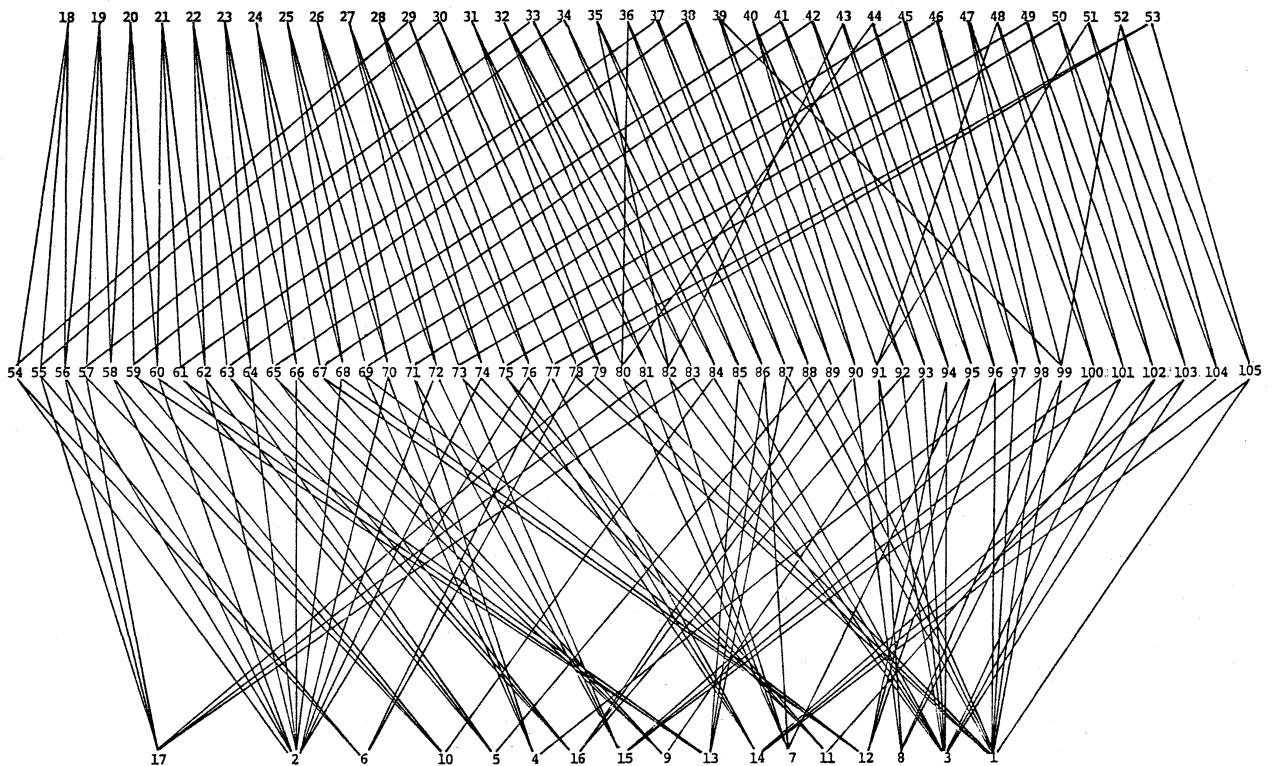
$$Z_q = \{p \in P \mid (p, q) \in Z\}$$

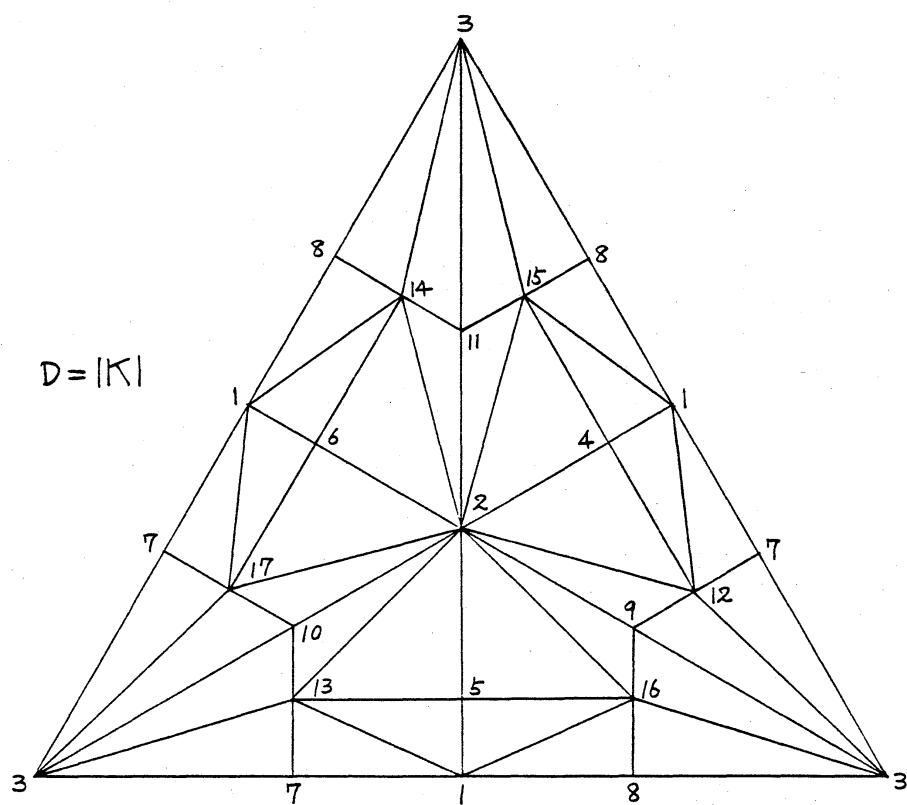
が共に contractible



$P \simeq Q : \text{ same homotopy type}$

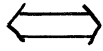
さて、与えられた poset が contractible かどうか判定するのは、やさしくはない。例えば、dunce hat の三角形分割から得られる、次のような face poset は contractible か？





Quillen は [QUI] において、次のような概念を定義した。

Def. poset P が C -contractible



$\exists x_0 \in P$, order-pres. map $f : P \rightarrow P$ s. t.

$$(1) f(x_0) = x_0,$$

$$(2) x \leq f(x) \leq x_0 \quad (\text{for all } x \in P).$$

この概念が contractible になるための十分条件になっていることが、次のようにしてわかる。

Lemma. $f, g : P \rightarrow P$ order-pres. map s. t.

$$f(x) \leq g(x) \quad (\text{for all } x \in P)$$



$$|f| \simeq |g| : \text{homotopic},$$

ここで $|f|, |g| : |\Delta(P)| \rightarrow |\Delta(P)|$ は f, g から引き起された連続写像

Cor. poset P が C -contractible



$$|1_P| \simeq \varepsilon_{x_0} : \text{homotopic}$$

$$\text{, where } |1_P| : |\Delta(P)| \rightarrow |\Delta(P)| : \text{identity map}$$

$$\varepsilon_{x_0} : |\Delta(P)| \rightarrow x_0 \in |\Delta(P)| : \text{const. map}$$

すなわち, P は contractible

確かに C -contractibility は十分条件であるが、実用面からみると、それ程使いやすい条件ではない。例えば、先に述べた dunce hat から得られた poset が C -contractible かどうか考えてみればよい。そこで、我々は、 C -contractible と同値な、もっと使いやすい条件を求めてみた。

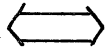
Def. $P : \text{poset}$, $P' \subset P : \forall \text{subset}$

$x \in P$ が weakly comparable with P'



$\exists y \in P'$ s. t. x と y は comparable

Def. P が weakly C -contractible



$\exists x_0 \in P$, order-pres. map $f : P \rightarrow P$ s. t.

- (1) x_0 は minimal element
- (2) $f(x_0) = x_0$
- (3) $x_0 \leq f(x)$ (for all $x \in P$)
- (4) $x \leq f(x)$ (for all $x \in P$ which are weakly comparable with $P(x_0) = \{y \in P \mid x_0 \leq y\}$)

定理. P は 2 点以上からなる poset とする。 次の 3 つの条件は同値である。

- (A) $\exists x_0 \in P$, weak C -contraction $f : P \rightarrow P$ at x_0
s. t. $f(x) = x$ (for all maximal elements x of P)
- (B) $\exists x_0 \in P$ so that P は weakly C -contractible at x_0 , かつ $P(x_0)$ は P の maximal element を全て含む
- (C) $\exists y_0 \in P$ so that P は C -contractible at y_0

(証明)

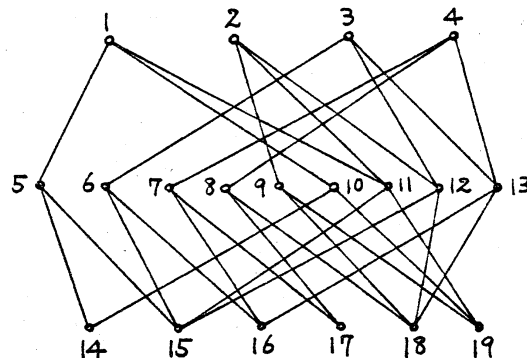
(A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) は easy

(C) $\Rightarrow$ (A)

y_0 が (i) maximal element, (ii) minimal element, (iii) どちらでもない, の 3 つの場合に分けて証明すればよい (省略)

Cor. 多面体 $|\Delta(P)|$ は contractible であるが poset P が C -contractible でない例が存在する

次の図を参照



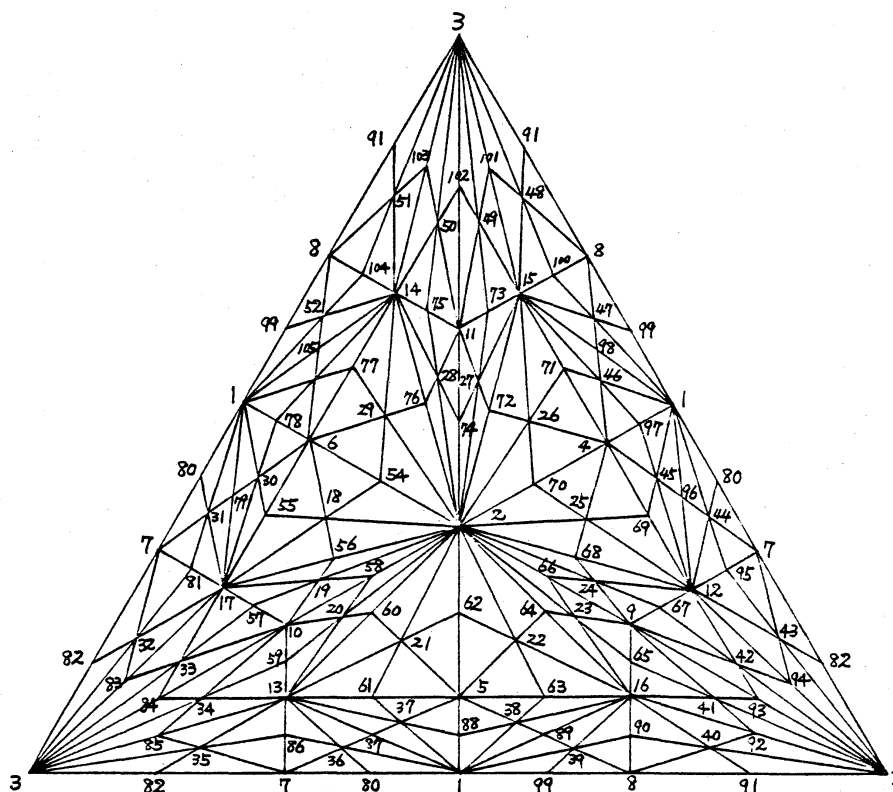
この poset には, $P(x_0)$ が すべての maximal element を含むような x_0 が存在しない。従って, C-contractible ではない。

NOTE. この例は weakly C-contractible になっていることに注意。

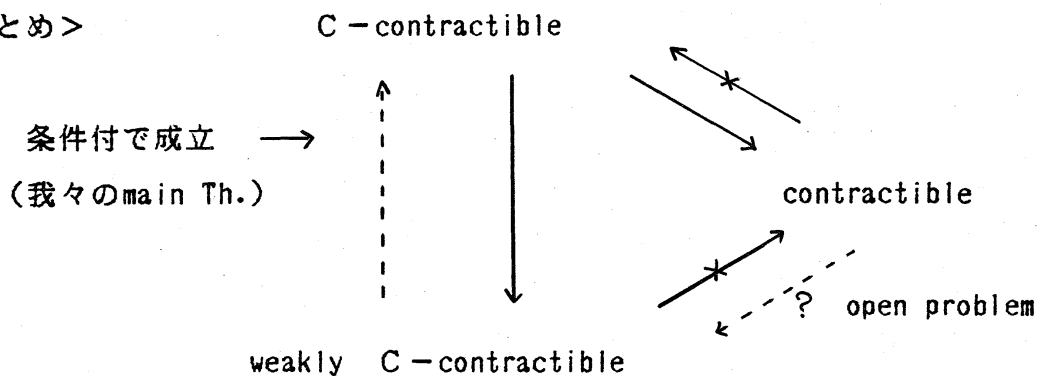
Ex. 次のように三角形分割した dance hat の face poset は not C-contractible, but weakly C-contractible である。

(dance hat とその face poset 等については前図を参照)

The first barycentric subdivision K' of K .



<まとめ>



以下, dual をとる操作と contractibility との関係を少し述べる。

P : poset

$\bar{P}$: dual poset (i.e. the poset with reversed ordering)

とする。明らかに

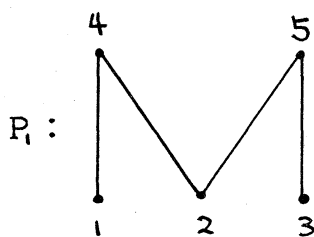
$$|\Delta(P)| \simeq |\Delta(\bar{P})| : \text{同相}$$

一方, 次のことがわかる。

Prop. C (weakly C) -contractible の概念は dual をとる操作では, 保存されない。

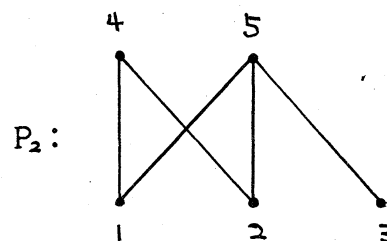
次の例を参照

Ex.



P_1 は C -contra. at $x_0 = 2$

$\bar{P}_1$ は not C -contra.



P_2 は weakly C -contra. at $x_0 = 3$

$\bar{P}_2$ は not weakly C -contra.

References

- [B-G-S] A.Björner, A.M.Garsia and R.P.Stanley; An introduction to Cohen-Macaulay ordered sets, I.Rival(ed.), Ordered Sets, (1982), 583-615, D.Reidel Publishing Company.
- [BJO] A.Björner; Homotopy type of posets and lattice complementation, J.Combinatorial Theory, Series A, 30 (1981), 90-100.
- [BRI] A.Brini; Some homological properties of partially ordered sets, Adv. Math., 43 (1982), 197-201.
- [K-T] A.Koriyama and M.Tsuchiya, A Note on Contractibility of Posets, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. XX (1985), 73-84.
- [QUI] D.Quillen; Homotopy properties of the poset of nontrivial p -subgroups of a group, Adv. Math., 28 (1978), 101-128.
- [RIV] I.Rival; The retract construction, I.Rival(ed.), Orderd Sets, (1982), 97-122, D.Reidel Publishing Company.
- [ROT] G.C.Rota; On the foundations of combinatorial theory I, Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 2 (1964), 340-368.