

実係数代数方程式の連立型解法とその静電場的解釈

名大工学部 桜井鉄也 (Tetsuya Sakurai)

鳥居達生 (Tatsuo Torii)

杉浦 洋 (Hiroshi Sugiura)

はじめに.

代数方程式に対する連立型解法といえば、通常、全根一挙に求める方法 (Aberth 法, DKA 法) を意味する。これらの方法は ^[2] 大域的収束性において優れているが、一回の反復に費やす計算量が多いため、全根求めるための計算時間は他の方法と比べて概して多くなる。また、これらの方法は想定するモデルが単純なために、重根や近接根が多い場合には、なかなか収束しなかったり、近似根が誤った方向へとんだりすることがある。そこで、代数方程式に対して静電場的な解釈を与えた上で、それに基づいて実係数による対称性、多重根、近接根を想定し、状況に応じてそれらを使う方法について考える。

1. 静電場的解釈

電場 E と電位 V の関係は

$$E = -\text{grad } V$$

である。点 (α, β) に電荷量 1 の正電荷を置いたときに点 (x, y) で観測される対数ポテンシャルは $\vec{z} = (x, y)$, $\vec{\xi} = (\alpha, \beta)$ とおいて

$$\begin{aligned} v(\vec{z}) &= \log \frac{1}{\|\vec{z} - \vec{\xi}\|} \\ &= -\log \left\{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

と表わされる。よって $v(\vec{z})$ の微分は

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \end{cases}$$

となる。一方、 $\vec{z} = (x, y)$, $\vec{\xi} = (\alpha, \beta)$, $E = -(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$ をそれぞれ複素数 $z = x + iy$, $\xi = \alpha + i\beta$, $E = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}$ とおきかえて、複素対数関数 $\log(z - \xi)^{-1}$ を z で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log(z - \xi)^{-1} &= -\frac{1}{z - \xi} \\ &= -\frac{1}{(x-\alpha) + (y-\beta)i} \end{aligned}$$

$$= - \frac{(x-\alpha) - (y-\beta)i}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} i$$

すなわち

$$\begin{aligned} E &= - \operatorname{grad} v(\vec{z}) = - \overline{\frac{d}{dz} \log(z-\xi)^{-1}} \\ &= \overline{\frac{1}{z-\xi}} \end{aligned}$$

よって

$$e(z) = \overline{E} = \frac{1}{z-\xi}$$

は、2次元実ベクトル空間を複素平面と同一視したときに、点 z で観測される電場の共役複素数である。方程式 $f(z)=0$ の解法をこの観点から導く。

2. 基本モデル (Newton 法)

n 次代数方程式 $f(z)$ を

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

とし、その n 個の根を $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ とすると、

$f(z)$ で定義される共役電場 $e(z)$ は

$$e(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

である。これは 点 z_1 , 点 z_2 , …… 点 z_n に電荷量 1 の正電荷を置いたときに、点 z で観測される電場の共役複素数である。いま、点 z で観測した $e(z)$ が、点 α にある電荷量 1 の正電荷によってつくられていると考えると、その式は

$$\frac{1}{z - \alpha} = e(z)$$

これより

$$\alpha = z - \frac{1}{e(z)} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

これは Newton 法に他ならない。

3. Newton 法の連立化 (Aberth 法)

連立させる m 個の近似根を $z_1, z_2, \dots, z_m$ とし、一般に $m \leq n$ とする。近似根に対しては、電荷量 -1 の負電荷を対応させる。近似根のつくる共役電場を $\tilde{e}(z)$ とおくと

$$\tilde{e}(z) = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{z - z_i}$$

と表わせる。負電荷は電界にしたがって動くものとする。

いま、 i 番目の近似根 z_i の移行する先を考えよう。 $f(z)$ のつくる共役電場 $e(z)$ と z_i 以外の近似根のつくる共役電場

を重ね合わせた値を $e_k(z)$ とすると

$$e_k(z) = e(z) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{-1}{z - z_i}$$

であり、これが点 z で観測される共役電場となる。点 z_k において働く力を、電荷量 1 の正電荷から生ずるとみなし、その正電荷の位置 z'_k を新しい近似値とする。その式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_k - z'_k} &= e_k(z_k) \\ &= e(z_k) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{1}{z - z_i} \end{aligned}$$

ここで $m = n$ としたものが Aberth 法の式である。

4. 実係数を想定した方法

4.1 実係数モデル

Aberth 法を実係数代数方程式に適するように、次のように変更する。実軸上の近似根を r_j 、その個数 n_1 、複素共役な二つの近似根を根とする 2 次式を $z^2 - p_j z - q_j$ 、その組数を n_2 とする。近似根の個数は $m = n_1 + 2n_2$ と表わされる。 $e_k(z)$ の計算の負担を小さくするために、 m は一般には n より小さく設定する。 m の上限、下限をそれぞれ $n_{\max}$, $n_{\min}$ としこの範囲で m を変化させる。

4.2 2次因子の補正

2次因子 $z^2 - p_k z - g_k$ を補正する式は

$$\frac{2z - p'_k}{z^2 - p'_k z - g'_k} \equiv e(z) - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{z - r_j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_2} \frac{2z - p_j}{z^2 - p_j z - g_j} \dots (1)$$

$$\text{mod } (z^2 - p_k z - g_k)$$

である。ここで $\equiv, \text{mod } (z^2 - p_k z - g_k)$ は $z^2 - p_k z - g_k = 0$ のときに等号が成り立つことと定義する。すなわち、 $z^2 - p_k z - g_k = 0$ の根の上で等号が成り立つことを意味する。以後、明らかな場合には $\text{mod } (z^2 - p_k z - g_k)$ を省略する。

さて、式(1)へ $z^2 = p_k z + g_k$ を代入すると

$$\frac{2z - p'_k}{(p_k - p'_k)z + (g_k - g'_k)} \equiv e(z) - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{z - r_j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_2} \frac{2z - p_j}{(p_k - p_j)z + (g_k - g_j)} \dots (2)$$

ここで

$$\begin{cases} p_k - p'_k = -dp_k \\ g_k - g'_k = -dg_k \end{cases}$$

とおくと式(2)は

$$\frac{2z - (p_k + dp_k)}{dp_k z + dg_k} \equiv -e(z) + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{z - r_j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_2} \frac{2z - p_j}{(p_k - p_j)z + (g_k - g_j)} \dots (3)$$

となる。

$f(z)$ と $f'(z)$ の計算は

$$\begin{aligned} f(z) &= (z^2 - p_k z - q_k)(b_0 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots + b_{n-2}) + b_{n-1} z + b_n \\ &= (z^2 - p_k z - q_k) \left\{ (z^2 - p_k z - q_k)(c_0 z^{n-4} + \dots + c_{n-4}) \right. \\ &\quad \left. + c_{n-3} z + c_{n-2} \right\} + b_{n-1} z + b_n \end{aligned}$$

とおいて $z^2 - p_k z - q_k = 0$ とすると

$$f(z) \equiv b_{n-1} z + b_n$$

$$f'(z) \equiv c_{n-3} z + c_{n-2}$$

であるから $e(z)$ は

$$e(z) \equiv \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{c_{n-3} z + c_{n-2}}{b_{n-1} z + b_n}$$

となる. ここで $\text{mod}(z^2 - pz - q)$ のもとでの分数式を計算するために

$$\frac{C_0 z + C_1}{B_0 z + B_1} \equiv W_0 z + W_1 \pmod{z^2 - pz - q} \dots (4)$$

を示す. これは実数の乗除算 9 回で行なえる. 因みに、複素数割算では実数の乗除算が 8 回である.

式 (4) は $z, \bar{z}$ を $z^2 - pz - q$ の根とすると

$$\frac{C_0 z + C_1}{B_0 z + B_1} = \frac{(C_0 z + C_1)(B_0 \bar{z} + B_1)}{(B_0 z + B_1)(B_0 \bar{z} + B_1)}$$

$$= \frac{B_0 C_0 z \bar{z} + B_0 C_0 z + B_0 C_1 \bar{z} + B_1 C_1}{B_0^2 z \bar{z} + B_0 B_1 (z + \bar{z}) + B_1^2}$$

$$= \text{ここで } z^2 - pz - q = 0 \text{ より}$$

$$\begin{cases} z \bar{z} = -q \\ z + \bar{z} = p \\ \bar{z} = p - z \end{cases}$$

を代入すると

$$= \frac{(B_0 C_0 - B_0 C_1) z + B_1 C_1 + B_0 C_1 p - B_0 C_0 q}{-B_0^2 q + B_0 B_1 p + B_1^2}$$

ここで

$$\begin{cases} W_0 = \frac{B_0 C_0 - B_0 C_1}{-B_0^2 q + B_0 B_1 p + B_1^2} \\ W_1 = \frac{B_1 C_1 + B_0 C_1 p - B_0 C_0 q}{-B_0^2 q + B_0 B_1 p + B_1^2} \end{cases}$$

とおけば

$$= W_0 \cdot z + W_1$$

となり、 z の 1 次式にすることができる。

式 (3) の右辺は、第 2 項、第 3 項も同様に式 (4) を使って z の 1 次式になるので、 z の 1 次の係数と定数項をそれぞれ別々にたしこんでいくことで計算できる。

そこで 式 (3) の右辺は

$$\text{右辺} \equiv w_0 z + w_1$$

と表わせる。よって式(3)は

$$\frac{2z - (p_k + dp_k)}{dp_k \cdot z + d\theta_k} \equiv w_0 \cdot z + w_1$$

これを变形して

$$\begin{aligned} 2z - (p_k + dp_k) &\equiv (w_0 \cdot z + w_1)(dp_k \cdot z + d\theta_k) \\ &\equiv w_0 \cdot dp_k \cdot z^2 + (w_1 \cdot dp_k + w_0 \cdot d\theta_k)z + w_1 \cdot d\theta_k \end{aligned}$$

となり $z^2 = p_k \cdot z + \theta_k$ を代入すると

$$\begin{aligned} 2z - (p_k + dp_k) &\equiv (w_0 \cdot p_k \cdot dp_k + w_1 \cdot dp_k + w_0 \cdot d\theta_k) \cdot z \\ &\quad + w_0 \cdot \theta_k \cdot dp_k + w_1 \cdot d\theta_k \end{aligned}$$

z について整理すると

$$\begin{aligned} (w_0 \cdot p_k \cdot dp_k + w_1 \cdot dp_k + w_0 \cdot d\theta_k - 2) \cdot z + (w_0 \cdot \theta_k \cdot dp_k \\ + w_1 \cdot d\theta_k + p_k + dp_k) \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} (w_0 \cdot p_k + w_1) \cdot dp_k + w_0 \cdot d\theta_k = 2 \\ (w_0 \cdot \theta_k + 1) \cdot dp_k + w_1 \cdot d\theta_k = -p_k \end{cases}$$

これを $dp_k, d\theta_k$ について解き

$$\begin{cases} p'_k = p_k + dp_k \\ \theta'_k = \theta_k + d\theta_k \end{cases}$$

より、新しい近似値 p'_k, δ'_k を得る。

4.3 1次因子の補正

実の近似根 r_k を補正する式は

$$\frac{1}{r_k - r'_k} = e(r_k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m_1} \frac{1}{r_k - r_j} - \sum_{j=1}^{m_2} \frac{2 \cdot r_k - p_j}{r_k^2 - p_j \cdot r_k - \delta_j}$$

ここで $r_k - r'_k = -dr_k$ とおくと

$$dr_k = - \left[e(r_k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m_1} \frac{1}{r_k - r_j} - \sum_{j=1}^{m_2} \frac{2 \cdot r_k - p_j}{r_k^2 - p_j \cdot r_k - \delta_j} \right]^{-1}$$

となり、 $r'_k = r_k + dr_k$ より新しい近似値 r'_k を得る。

4.4 1次因子と2次因子との遷移

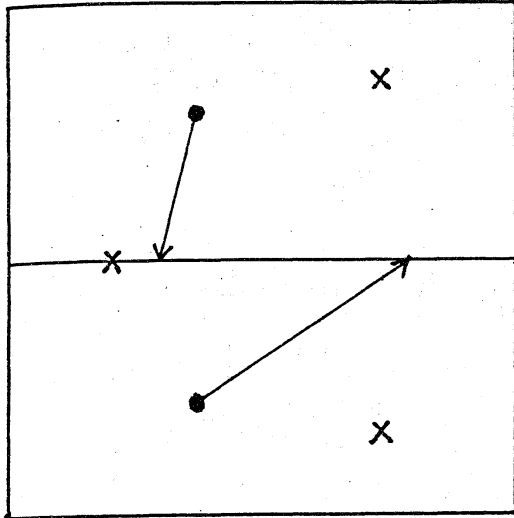
2次因子の計算において、判別式 $D_k = p_k'^2 - 4\delta'_k$ が正のときは $z^2 - p'_k z - \delta'_k = 0$ の2根 α_k, β_k は実数となるので、 $r_{n_1+1} = \alpha_k, r_{n_1+2} = \beta_k, m_1 = m_1 + 2$ として1次因子へくり込む。又、1次因子の計算では r'_k の値は実数だけをとる、実根がない場合には不都合を生ずる。

そのため、前回の修正量よりも新しい修正量が大きいときには、正常に根に近づいていないと判断して、 $p_{n_2+1} = 2 \cdot r_k, \delta_{n_2+1} = -r_k^2, m_2 = m_2 + 1$ として、2次因子として共役複素根を探させる。なお、 $m_1 + 2(m_2 + 1) > n_{\max}$ のときは切り捨てる。その例を図に示す。

ここで $\times \dots$ 根, $\bullet \dots$ 近似根

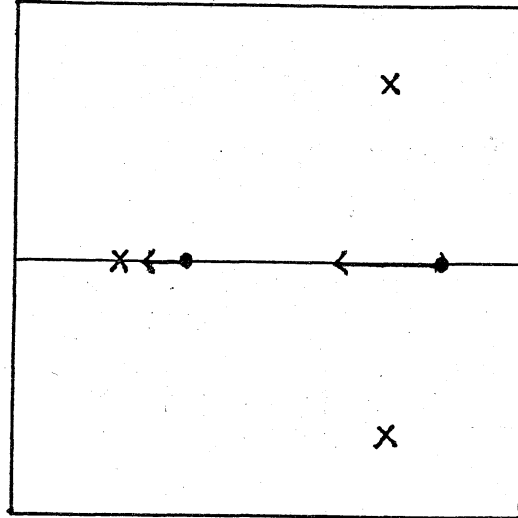
$$f(z) = z^3 - z^2 + 2. \quad \text{初期値 } p = -1.6, \quad q = -1.28$$

1.



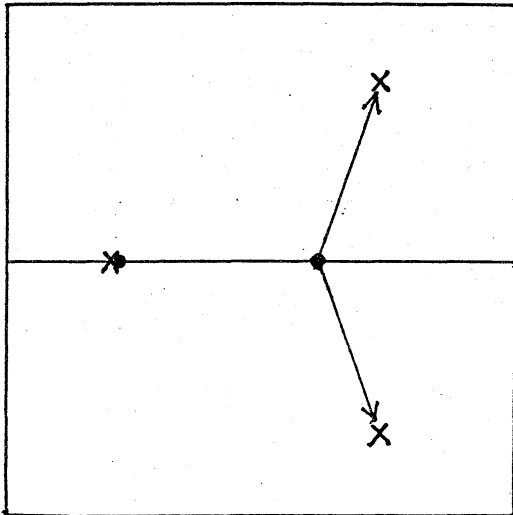
1次因子へくり込む

2.



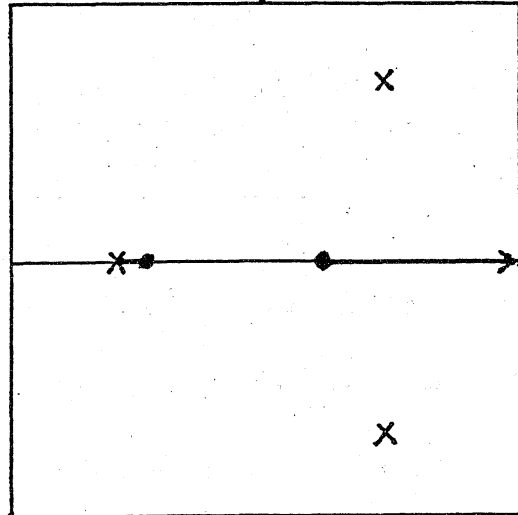
実の近似根として計算

4.



2次因子として計算する.

3.



共役な複素根の影響で
 dt が前回より大きく
 なり異常と判定

4.5 数値例

ここでは、比較の対象として ガ-サイト・ジャラット・マックシ法 (GJM
[1], [4]
NKD), ジェンキンス・トラウプの方法 (DRJETR) を使用した。
[5]

計算機は M-382.

単根のみ 表1.

No.	n	時間 (Msec)		
		実係数型	GJMKNK	DRJETR
1	16	2.9	3.2	4.9
2	16	2.7	3.1	4.7
3	20	4.5	5.1	6.1
4	20	4.7	5.1	9.4
5	20	4.1	5.8	7.6
6	30	8.3	9.0	14.9
7	30	9.1	10.3	14.5
8	35	7.7	10.9	13.4
9	50	12.6	18.6	46.5
10	50	12.7	15.7	37.0

重根を含む 表2.

No.	n	時間 (Msec)		
		実係数型	GJMKNK	DRJETR
1	16	3.5	2.3	4.5
2	16	3.4	2.0	5.5
3	20	4.8	3.1	7.1
4	20	5.5	3.4	9.2
5	22	6.8	3.8	11.3
6	24	8.1	4.3	9.4
7	24	7.3	4.6	12.3
8	26	8.6	4.9	13.3
9	28	9.1	4.9	20.0
10	30	8.5	6.6	19.3

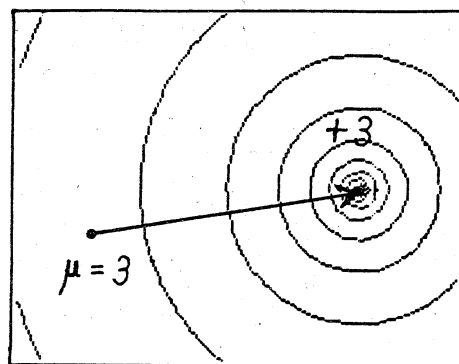
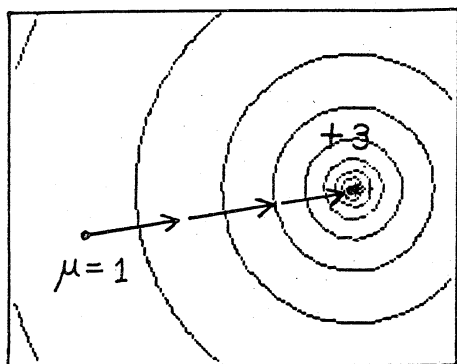
多項式 $f(z)$ は 領域 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ に 乱数で 根を置いて、係数
を求めた。表2.では、さらに 乱数を用いて 重根 20%, 3重根
20%, 単根 60% となるようにした。

単根のみの場合は GJM法とくらべて 0.7~0.9 倍の
時間で計算できるが、重根を含む場合には 1.3~2
倍の時間がかかっている。

5. 重根を想定した方法

5.1 電荷量推定型

Newton 法等では、そのモデルが単根のみを想定しているために、重根や近接して多くの根があるときには、近似根の修正量は小さくなり、反復回数が多くなる。



そこで 根の多重度も考慮し、点 α に電荷量 μ の正電荷 (μ 重根) があるとして、 α, μ を求める。その式は

$$\frac{\mu}{z - \alpha} = e(z) \quad \dots (5)$$

であり、両辺を z で微分すると

$$\frac{-\mu}{(z - \alpha)^2} = e'(z) \quad \dots (6)$$

となる。ここで

$$e'(z) = \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)' = \frac{f''(z)}{f(z)} - \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2$$

である。

$z - \alpha = -dz$ とおくと 式(5), 式(6)はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{\mu}{dz} = -e(z) & \dots (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mu}{dz^2} = -e'(z) & \dots (8) \end{cases}$$

式(7)を式(8)で割ると

$$dz = \frac{e(z)}{e'(z)}$$

となり、これを式(7)に代入して

$$\mu = -e(z) \cdot dz = -\frac{e^2(z)}{e'(z)}$$

となる。

モデルに妥当性があるときには、

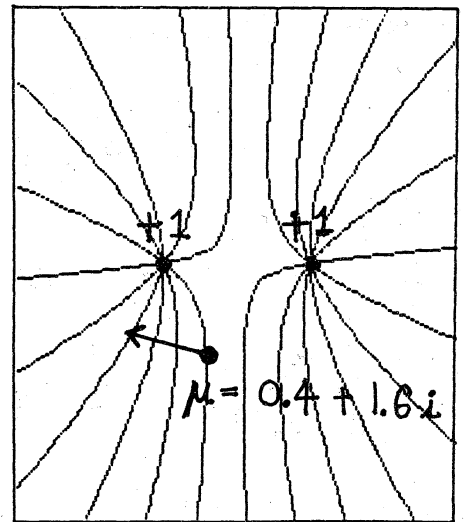
電荷量 μ は正の整数である。しかし

右図のように近接した根の近くでは

力線は大きく曲がっているので

(近接して正電荷があるときの電気

力線に相当する)電荷量推定型で



μ を計算すると虚部が大きくなる。そこで μ の値からモデルの

妥当性をチェックできる。 μ の虚部が大きいときには、その近くに他

の根があると判断して、想定モデルを切り換える。

5.2 分裂型

点 α_1 と点 α_2 にそれぞれ電荷量 1 の正電荷があると
して、 α_1, α_2 を求める。その式は

$$\frac{1}{z - \alpha_1} + \frac{1}{z - \alpha_2} = e(z) \quad \dots (9)$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{-1}{(z - \alpha_1)^2} + \frac{-1}{(z - \alpha_2)^2} = e'(z) \quad \dots (10)$$

ここで、 $e(z), e'(z)$ は電荷量推定型のときと同じである。

$z - \alpha_1 = -dz_1$, $z - \alpha_2 = -dz_2$ とおくと 式 (9),

式 (10) はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{1}{dz_1} + \frac{1}{dz_2} = -e(z) & \dots (11) \\ \frac{1}{dz_1^2} + \frac{1}{dz_2^2} = -e'(z) & \dots (12) \end{cases}$$

であり、 $dz_1 + dz_2 = 2X$, $dz_1 \cdot dz_2 = Y$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{dz_1 + dz_2}{dz_1 \cdot dz_2} = \frac{2X}{Y} = -e(z) & \dots (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{dz_1^2 \cdot dz_2^2} = \frac{4X^2 - 2Y}{Y^2} = -e'(z) & \dots (14) \end{cases}$$

となる。

式(13)の2乗から式(14)をひくと

$$\frac{2}{Y} = e^2(z) + e'(z)$$

よって

$$Y = \frac{2}{e^2(z) + e'(z)}$$

これを式(13)に代入して

$$X = \frac{-e(z)}{2} \cdot Y = \frac{-e(z)}{e^2(z) + e'(z)}$$

これより2次式 $z^2 - 2Xz + Y = 0$ を解いて

$$\begin{cases} x_1 = z + dz_1 \\ x_2 = z + dz_2 \end{cases}$$

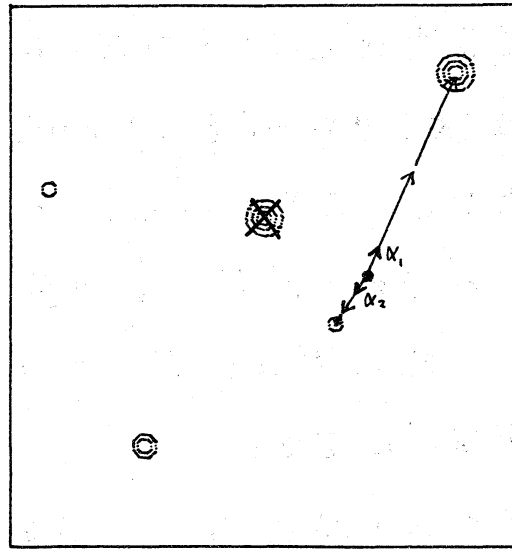
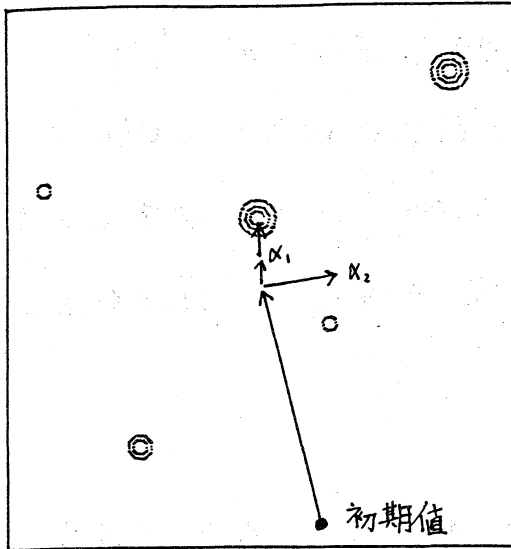
を得る。新しい近似値としては、 dz_1 と dz_2 のうちその絶対値の小さい方を採用し、あとの一方は近似根が収束したときの新しい初期値として利用する。連立型の場合は $m = m + 1$ として両方とも近似根として採用する。

5.3 近似根の動き

近似根の動きを図に示す。

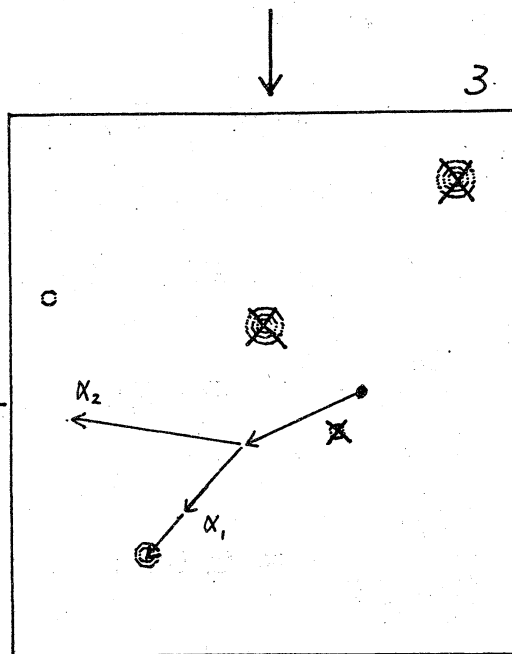
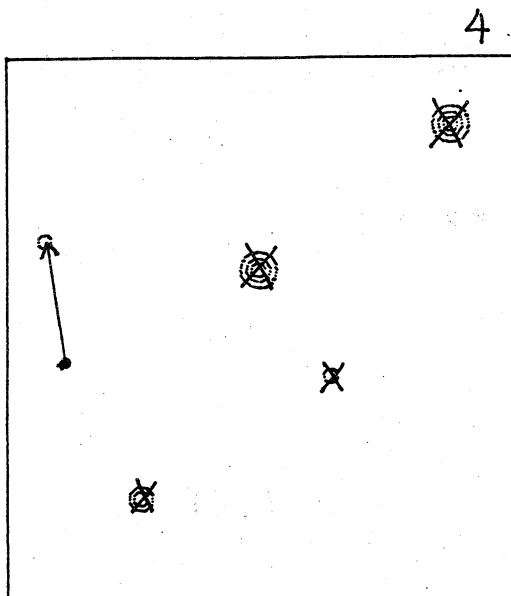
ここで 白丸は根、黒丸は近似根を表わし、白丸の数は多重度を表わす。☒は収束後、減次したことを表わす。

$n=10$, なお. 図を簡単にするために重根は一度に減次している.



初期値において $M \approx 10$ と推定し、ほぼ $f(z)$ の重心へ。
その後 分裂し、3重根へ収束。

α_2 を 初期値として
そこで 分裂。



α_2 を 初期値として
残りの 単根へ収束

$M = 2.4$ と推定して
移動した後、分裂。

5.4 $e'(z)$ の代りに差分を使う方法

電荷量推定型と分裂型では、 $e'(z)$ を使うため、 $f(z)$ の 2 階微分まで必要とするが、前回の計算に使われた $e(z)$ を利用して、2 点での $e(z)$ の値から新しい近似値を求める方法も考えられる。(一回の反復計算では、 $f(z)$ と $f'(z)$ を一回計算するだけで済む)

[電荷量推定型]'

前回の近似値を z_2 , その修正された近似値を z_1 とすると

$$\begin{cases} \frac{\mu}{z_1 - \alpha} = e(z_1) & \dots (15) \\ \frac{\mu}{z_2 - \alpha} = e(z_2) & \dots (16) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} z_1 - \alpha &= dz, \quad z_2 - \alpha = z_2 - z_1 + z_1 - \alpha = y - dz \\ y &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

とおくと、式(15), 式(16)はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{\mu}{dz} = -e(z_1) & \dots (17) \\ \frac{\mu}{y - dz} = e(z_2) & \dots (18) \end{cases}$$

となる。式(17)を式(18)で割ると

$$\frac{y-dz}{dz} = - \frac{e(z_1)}{e(z_2)}$$

よって

$$dz = \frac{e(z_2)}{e(z_2) - e(z_1)} \cdot y \quad \dots (19)$$

これを式(17)に代入して

$$\mu = -e(z_1) \cdot dz = \frac{-e(z_1) \cdot e(z_2)}{e(z_2) - e(z_1)} \cdot y$$

となる。

[分裂型]'

分裂型の場合は

$$\begin{cases} \frac{1}{z_1 - \alpha_1} + \frac{1}{z_1 - \alpha_2} = e(z_1) & \dots (20) \\ \frac{1}{z_2 - \alpha_1} + \frac{1}{z_2 - \alpha_2} = e(z_2) & \dots (21) \end{cases}$$

$$\text{ここで } z_1 - \alpha_1 = -dz_1, \quad z_1 - \alpha_2 = -dz_2$$

$$z_2 - \alpha_1 = y - dz_1, \quad z_2 - \alpha_2 = y - dz_2$$

$$z_2 - z_1 = y$$

とおく。

$$\begin{cases} \frac{1}{dz_1} + \frac{1}{dz_2} = -e(z_1) & \dots (22) \\ \frac{1}{y - dz_1} + \frac{1}{y - dz_2} = e(z_2) & \dots (23) \end{cases}$$

そこで $dz_1 + dz_2 = 2X$, $dz_1 \cdot dz_2 = Y$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{2X}{Y} = -e(z_1) & \dots (24) \\ \frac{2y - 2X}{y^2 - 2Xy + Y} = e(z_2) & \dots (25) \end{cases}$$

式(24), 式(25)より X を消去すると

$$2y + e(z_1) + Y = e(z_2) \{ y^2 + e(z_1)yY + Y \}$$

Y について整理すると

$$\{e(z_1) \cdot e(z_2) \cdot y + e(z_2) - e(z_1)\} Y = y \{2 - e(z_2) \cdot y\}$$

よって

$$Y = \frac{y(2 - e(z_2) \cdot y)}{e(z_1) \cdot e(z_2) \cdot y + e(z_2) - e(z_1)}$$

これを式(24)に代入して X を得る。

これより 2次式 $z^2 - 2Xz + Y = 0$ を解いて dz_1, dz_2 を得る。

5.5 実係数代数方程式への適用

さて、いままで述べた電荷量推定型と分裂型のモデルは複素係数である。これらの方法を実係数モデル化しようとすると、式が複雑になり計算時間の面ではむしろ逆効果であると思われる。そこで、これらの方法で実係数代数方程式を解くときには、モデルはそのまま関数計算のときにのみ、実数演算を用いるようにする。

(収束判定)

$$\varepsilon = \mu \sum_{i=0}^n |a_i| |z|^{n-i} \quad (\text{ここで } \mu \text{ は 計算機イpsilon})$$

を計算し、この ε を使って

$$|f(z)| \leq \varepsilon$$

のとき、収束したと判定する。

(減次)

電荷量推定型では、近似根は、まず、根の集団の重心付近へ とび込むため、平野の方法を2次式化して用いる。^[3]
まず、高次の項からの減次法は

$$\bar{b}_0 = a_0, \quad \bar{b}_1 = a_1 + p \cdot \bar{b}_0$$

$$\bar{b}_j = a_j + p \cdot \bar{b}_{j-1} + q \cdot \bar{b}_{j-2} \quad (j = 2, n-2)$$

で、これはすでに $f(z)$ の計算時に求まっている。

低次の項からの減次法は

$$\underline{b}_{n-2} = -a_n / \varepsilon, \quad \underline{b}_{n-3} = -(a_{n-1} + p \cdot \underline{b}_{n-2}) / \varepsilon$$

$$\underline{b}_j = -(a_{j-2} + p \cdot \underline{b}_{j-1} - \underline{b}_{j-2}) / \varepsilon \quad (j = n-4, 0, -1)$$

となる。ここで

$$\max_k |a_k| |z|^{n-k} = |a_n| \cdot |z|^{n-M}$$

であるような M を求めて、 $z^2 - pz - \varepsilon$ で減次した式

$$\begin{aligned} f_{n-2}(z) &= \bar{b}_0 z^{n-2} + \bar{b}_1 z^{n-3} + \dots + \bar{b}_M z^{n-M-2} \\ &\quad + \underline{b}_{M+1} z^{n-M-3} + \dots + \underline{b}_{n-2} \end{aligned}$$

を得る。

5.6 数値例

比較の対象として 複素係数版では、複素係数代数方程式の解法 (POLEQB)^[6], ヤラット法 (DCJART)^[5] を使用し、実係数版では ガーサイト・ジャラット・ヌック法 (GJMNKD), ジェンキンス・トラウプの方法 (DRJETR) を使用した。計算機は M-382。

多項式 $f(z)$ は、4.5 の数値例と同様にして、複素係数、実係数の方程式をつかった。

複素係数版

単根のみ

No.	n	時間 (Msec)		
		電荷量推定	PÖLEQB	DCJART
1	10	2.1	2.9	9.2
2	15	3.9	5.1	14.2
3	20	7.2	8.0	27.0
4	25	9.1	11.6	40.7
5	30	13.9	17.5	66.7
6	35	17.0	20.9	68.9
7	40	22.8	28.9	115.4
8	45	31.0	31.6	109.4
9	50	33.0	33.6	131.5
10	55	41.0	41.7	149.8

重根を含む

No.	n	時間 (Msec)		
		電荷量推定	PÖLEQB	DCJART
1	8	1.4	3.1	7.3
2	16	4.1	7.8	20.3
3	17	4.2	11.0	29.7
4	17	4.7	6.4	20.3
5	21	7.0	13.6	33.8
6	22	7.3	14.2	41.0
7	24	8.8	15.7	40.4
8	25	9.5	17.3	47.6
9	27	9.4	19.2	57.3
10	27	10.1	18.2	47.4

実係数版

単根のみ

No.	n	時間 (Msec)		
		電荷量推定	GJMKNB	DRJETR
1	17	1.8	3.0	6.3
2	17	2.1	3.8	5.2
3	20	2.6	3.8	6.1
4	20	2.3	5.0	7.7
5	20	2.3	3.8	6.8
6	30	4.3	7.4	16.1
7	30	5.4	7.3	15.2
8	35	5.0	9.0	16.1
9	50	11.5	18.3	39.6
10	50	9.8	19.3	43.3

重根を含む

No.	n	時間 (Msec)		
		電荷量推定	GJMKNB	DRJETR
1	16	1.4	2.3	4.5
2	16	1.3	2.0	5.8
3	20	1.8	3.3	7.1
4	20	1.9	3.5	9.2
5	20	1.8	3.4	7.0
6	22	2.2	3.9	11.3
7	24	2.8	4.4	9.5
8	24	2.9	4.7	12.4
9	28	3.0	5.1	20.2
10	30	3.4	6.8	19.4

本方法は重根を含む場合でも単根のみの場合と同程度の時間で解いている。又、次数 n が高いほど他の方法との時間の比は大きくなっている。

5.7 連立化

Newton 法を連立化したときと同様にして、単独の電荷量推定型の方法を連立化することができる。

このとき

$$\begin{cases} e_k(z) = e(z) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{-\mu_i}{z - z_i} & (k=1, 2, \dots, m) \\ e'_k(z) = e'(z) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{\mu_i}{(z - z_i)^2} & (k=1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

を用いる。

電荷量推定型を連立化すると、近似根の影響を考慮することは計算時間の点でむしろ逆効果になっている。ただし、 $f(z) = z^n + 1$ の場合には、近似根は重心 ($z=0$) へ行ってしまい、 $f'(z)=0$, $f''(z)=0$ となって、連立したときのみ解くことができる。そこで、通常は、連立型は用いず、 $f'(z)=0$ and $f''(z)=0$ となったときだけ、連立型へ移行するようにした。

参考文献

- [1]. G.R. Garside, P. Jarrat & C. Mack, A New Method for Solving Polynomial Equations, Computer Journal, Vol. 11 PP. 87-90, (1968)
- [2]. O. Aberth, Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomial Simultaneously, Math. Comp. 27, PP. 339-344 (1973)
- [3]. 平野 菅保, 代数方程式の減次, Computrol No. 12, PP. 92-95 (1985)
- [4]. 名古屋大学大型計算機センター, ライブラリー・プログラム利用の手引(数値計算編), 昭和57年6月
- [5]. 富士通, SSL II 使用手引書(科学用サブルーティンライブラリー), 昭和55年12月
- [6]. 名古屋大学大型計算機センター, ライブラリー・プログラム利用の手引(増補版 II), (1985)