

カオスの有限状態モデル

日大理工原子力研究所 島田一平

ポアンカレ以来、力学系の周期軌道はその系の大域的ふるまいを決める重要な要素として研究されてきた。スメール⁽¹⁾は彼の有名な論文のなかで、ある種の2次元非線形写像には無限個の周期軌道が存在することを証明し、今日カオスと呼ばれる複雑な軌道を持つ力学系のひな型を与えた。一方、力学系の軌道の数値計算に際しては、計算機内部の状態が有限個であるため、すべての軌道は有限周期の周期軌道としてシミュレートされるという事情が生じる。カオスのような無限個の周期軌道を持った複雑な力学系を有限精度の計算機でシミュレートするとどうなるのか。この問題はラヌー⁽²⁾によって2次元の保測写像の一例について調べられた。

われわれはここで、ラヌーによって用いられたのと同等の有限状態のモデルをカオスを示す1次元力学系に適用してみる。このことによって、力学系の軌道を計算する困難さといった観点をできるだけ客観的なものとして導入することを試みる。

1次元区間上の力学系 f に対してその有限状態モデルを有限集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 上の次のような写像 f_N として定義する。区間 $[0, 1]$ を N 等分し各小区間 $[i/N, (i+1)/N]$ にラベル i を与える。写像 f による小区間 i の像と交わりをもつ小区間のラベルを $j, j+1, j+2, \dots$ とする。これらのラベルの中央値を $\tilde{j}$ とし、

$$f_N(i) = \tilde{j}$$

と定義する。(図1) f_N は元の写像 f の固定小数点による計算のモデルの一つになっている。

力学系 f のフェイズポートレートに対応するものとして、 f_N に関するつぎのような有向グラフを考えることができる。グラフのノードは有限集合

$\{1, 2, \dots, N\}$ の要素であり、 $f_N(i) = j$ のときかつそのときに限り $i \rightarrow j$ なる有向リンクを持つものとする。このような有限状態モデル

f_N から派生する有向グラフの大域的な様子は一般的にいて次のようなものである。グラフの基底部には有限周期のサイクル（閉グラフ）がくる。このサイクル上の各基底ノードからは有限の木構造がのびる。このような、基底部のサイクルとその上の木構造からなる連結グラフは一般には複数存在しそれらは互いに連結していない。（図2）

f_N の有向グラフに現れるサイクル（閉グラフ）は、有限状態モデルの長時間の振る舞いを決定する。そしてそれは元の力学系 f の長時間の振る舞いに関係した情報を含んでいる。それに対して、サイクルの各ノードからのびる木構造はモデルのトランジェントな振る舞いを現す。この木構造に元の力学系のどのような性質が反映しているかは興味深い問題であるが本論ではふれない。

以下、有限状態モデル f_N にあらわれるサイクル（閉グラフ）の構造を、とくにモデルのサイズ N をおおきくしていったときの変化に着目して調べた結果を述べる。

一般に、 f_N のグラフに現れるサイクルの長さはある分布をもつ。この分布の特性のうち特に最大の周期 Ω に着目してこれがモデルのサイズ N の増大とともにどのように変化するかを調べた。図34はロジスティック写像 $f(x) = ax(1-x)$ 、（ $a=2.4$ と、 $a=3.9999$ ）の場合についての結果である。右は1周期軌道が安定に存在する場合で、最大周期は真の周期1とその2倍との間で振動する。左のカオス状態では、周期はサイズ N のべき乗（指数 $\alpha = 0.4 \sim 0.5$ ）で増大する。この結果はカオス状態が無限個の周期軌道を、しかもいくらかでも長い周期軌道を持っていることの現れである。最大周期とモデルのサイズの関係さをさらに詳しく見てみると、 N の小さな変化に対して最大周期は非常に複雑に、ほとんどランダムとっていいような変動をしていることがわかる。これらのことはカオスの真の周期軌道を計算するという仕事が非常に困難なものであることを暗示している。

次に f_N のグラフに現れるすべてのサイクル（閉グラフ）の合併集合に着目し、以下これをモデルの最大不変集合と呼ぶ。カオスの場合最大不変集合の大きさ M もモデルのサイズ N のべき乗で増大し、その指数 α は最大周期の

指数と同じ値をとる。図5はカオスの場合について最大不変集合の大きさ M と最大周期 Ω の関係をプロットしたものである。最大不変集合の大きさを一定にしたとき最大周期の値はある分布をもつがその中央値に着目するとその値はほぼ M の 0.6 倍となっている。

この結果は以下のように確率的に解釈することができる。有限集合 $\{1, 2, \dots, M\}$ 上のすべての置換（その個数は $M!$ 個ある）を考える。この置換を先の有限集合上の力学系と考えるとその軌道はすべて周期軌道からなる。各置換ごとにその最大周期を考えると最大周期の分布が得られる。最大周期の分布の中央値は置換をほどこす集合の大きさ M の 1 乗に比例しその比例計数は $1/\sqrt{e}$ (~ 0.61) であることが知られている。⁽³⁾ (Knuth) 有限状態モデル f_N をその最大不変集合上に制限するとそれは最大不変集合上の置換とみなせる。したがって最大不変集合の大きさと最大周期の関係についての先の結果は、上の確率的解釈と矛盾しない。

つぎに力学系の分岐パラメーター a を変化させたときの指数 α の変化についての結果を述べる。(図6) a の値が Feigenbaum の臨界点以下、したがって安定な周期状態の場合には $\alpha = 0$ 、臨界点以上すなわちカオス状態では $\alpha = 0.4 \sim 0.5$ となる。さらに臨界点以上で α の値がちいさくなっている所は周期ウィンドー状態に対応している。周期ウィンドー状態での指数 α の値は、 N が $10 \sim 10000$ のデータから求めているが N の大きさを大きくするとさらに減少する傾向にあり、 $N \rightarrow \infty$ で 0 になるものと思われる。この意味で安定周期状態とウィンドウ中のトポロジカルなカオス状態とは指数 α の値では区別できないことになる。周期ウィンドウ中のトポロジカルなカオスの特徴が有限状態モデルのどのような特性として現れるかはより詳しい解析によって明らかになるものと思われる。

最後に、有限状態モデルの臨界点近傍での振る舞いについて調べる。力学系 f のある種の臨界点近傍では、その有限状態モデルの性質がモデルのサイズ N_c を境にして不連続に変化する現象がみられる。この特徴的なモデルサイズ N_c は臨界点からの距離 $|a - a_c|$ に反比例する。一番目の例ではタンジェント分岐点の近傍で有限状態モデルの最大不変集合の大きさ M と

モデルサイズ N との関係が $N = N_c$ を境に変化している。(図7) 2番目の例はテント写像

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x > 1/2) \\ a(1-x) & (x \leq 1/2) \end{cases}$$

の場合で、 $a = 2$ の近傍で最大不変集合の大きさとサイズの関係が $N = N_c$ を境に変化している。(図8) 前者の場合 N が N_c を越えると臨界点の上か下かに従ってそれぞれカオス状態と安定周期状態の場合と同様なふるまいをしめす。後者の場合 $a = 2$ がどのような意味で臨界的なのかは今の所あまりあきらかにはなっていない。

力学系の複雑さはここで用いられた有限状態モデルを用いることによってグラフの複雑さとしてとらえられることがわかった。指数 α はそのひとつの定量化をあたえる。臨界状態の特徴も有限状態モデルのグラフにあらわれる。ウィンドー中のトポロジカルなカオスはグラフのより詳細な解析によってとらえられる可能性がある。エルゴード測度を用いた確率モデルによる解析とここで展開したような有限状態モデルによる計算論的な解析との内在的な関連を明らかにすることが、本研究の最終的な目標である。

参考文献

1. S. Smale Differential and combinatorial topology, Princeton Univ. Press, (1964) 63-80
2. F. Rannou Astron. Astrophys. 31 (1974), 289
3. D. E. Knuth The Art of Computer Programming vol. 1, Addison-Wesley, Massachusetts (1973)

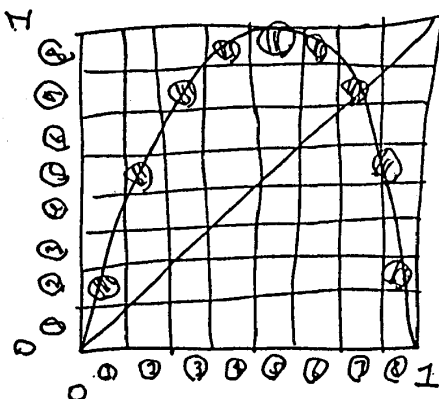


図 1

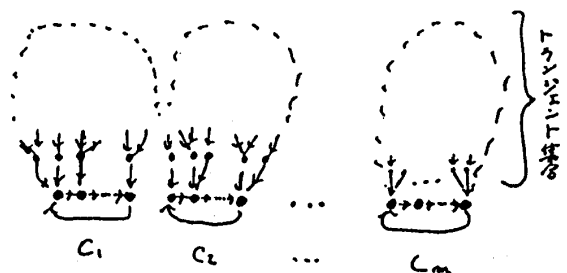


図 2

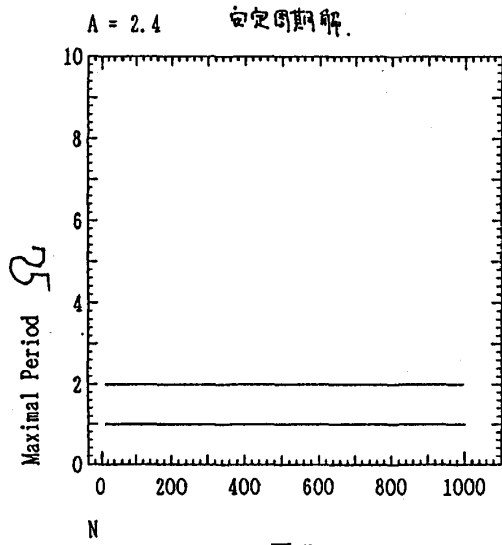


図 3

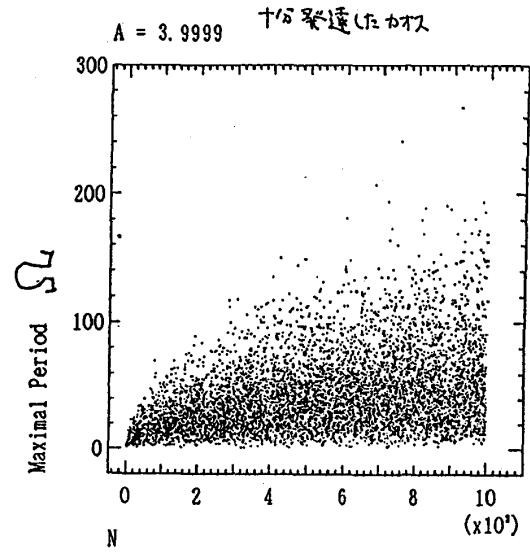


図 4

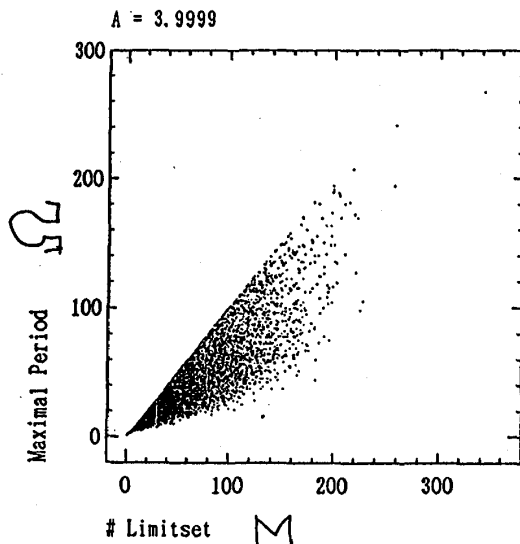


図 5

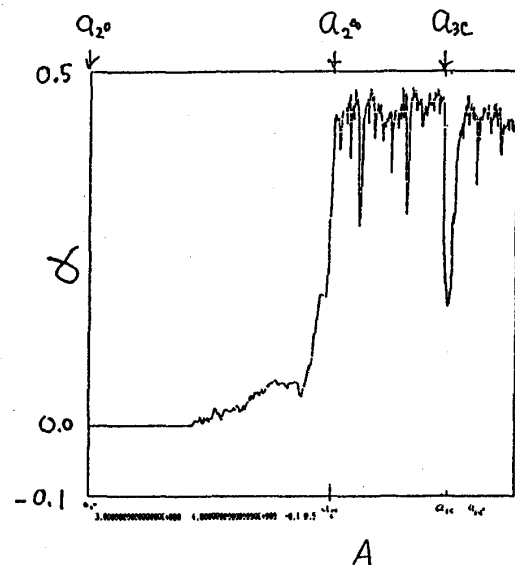


図 6

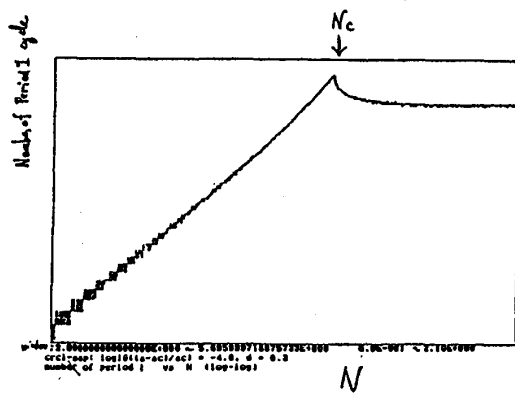


図 7

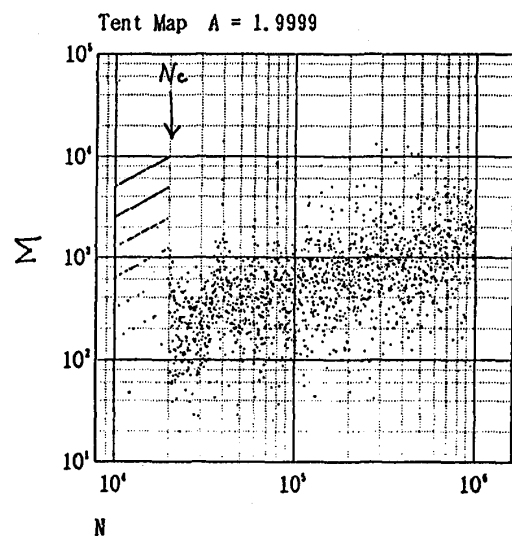


図 8