

2次元ドリフト方程式における2種の非線形性の役割

京大理学部 荒木圭典 (Keisuke Araki)
京大理学部 藤 定義 (Sadayoshi Toh)
京大理学部 川原琢治 (Takuji Kawahara)

1. はじめに

プラズマ中のドリフト波と回転流体におけるロスビー波とが同じタイプの近似方程式によって記述されることはよく知られている。これは、ローレンツ力とコリオリ力の類似性によるもので、運動が磁場または回転軸に垂直で2次元であると仮定すると、最も基本的な近似方程式として Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式 [1]

$$\partial_t (1 - \Delta) \phi = \nu \partial_y \phi + \nabla \phi \times \nabla (\Delta \phi) \quad (1.1)$$

が導かれる。磁場方向 (z 方向) に垂直な2次元座標 (x, y) に関する2次元の勾配演算子を ∇ 、2次元ラプラシアンを $\Delta \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$ と表す。

(1.1) 式の右辺第2項は2次元の流体の運動方程式の対流項に由来する項であり、ヤコビアン形の非線形項になっている。(以下、これをベクトル型非線形項と呼ぶ。)

一方、ドリフト波において、背景電子の温度勾配の効果を考慮するとCHM方程式の左辺に非一様項、右辺にスカラー型の非線形項 $\phi \partial_y \phi$ が加わった近似方程式 (以下変形CHM方程式と呼ぶ)

$$\partial_t (1 - \kappa x - \Delta) \phi = \nu \partial_y \phi + \nabla \phi \times \nabla (\Delta \phi) - \kappa \phi \partial_y \phi \quad (1.2)$$

が得られる [2]。(1.2) 式はベクトル非線形項とスカラー非線形項とをもつ

式となっている。ロスビー波においてもコリオリ・パラメーターの2次までの展開において、(1.2)式に類似の2種の非線形性をもつ式が得られる[2,3]。

ところで、CHM方程式には、双極子型の定常孤立渦解（モードン）が存在し、この孤立渦解は衝突に関しても安定で、ソリトンの振舞をすることが、Makino et al. [4] の数値実験によって明らかにされている。一方、(1.2)式でベクトル非線形項と左辺の非一様項を無視して、スカラー非線形項のみを残した場合には、Benjamin-Bona-Mahoney (BBM) 方程式を2次元へ一般化した方程式になる。この方程式の定常解の性質は磁化プラズマ中のイオン音波の近似方程式として導かれた2次元 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程式と同等となる[5]。

ZK方程式は、定常解として軸対称な孤立波解（単極子渦解）をもつ。この解は相互作用（衝突）に関して非保存的であるが、単一では極めて安定に伝播することが数値実験によって確かめられている (Iwasaki et al. [6])。

それでは、ベクトル型非線形性とスカラー型非線形性が共存する(1.2)の形の方程式においては如何なる解が存在するのであろうか。双極子渦あるいは単極子渦は安定であるのか、あるいは構造不安定となるのか、その場合2種の非線形性はどのような役割を果たすのかという点が問題となる。

本報告では、(1.2)式の左辺の非一様項を無視した方程式（以下2次元ドリフト方程式と呼ぶ）(Petviashvili [7])

$$\partial_t (1 - \Delta) \phi = \nu \partial_y \phi + \nabla \phi \times \nabla (\Delta \phi) - \kappa \phi \partial_y \phi \quad (1.3)$$

を取り上げ、ベクトル非線形性およびスカラー非線形性と双極子渦解あるいは単極子渦解との関係について考える。まず最初に、プラズマ中のドリフト波について近似方程式の導出手順を明らかにする。次に、2種の非線形性を含む非線形方程式を数値的に解いた結果を示す。双極子渦定常解（モードン）は、スカラー非線形項の存在により不安定となり、単極子渦に移行することが示される。

2. 近似方程式の導出

A. 基礎方程式とポテンシャル渦度

冷たいイオンプラズマにおけるドリフト波を考える。基礎方程式は、

$$\text{連続の式: } \partial_t n + \text{div}(n u) = 0 \quad (2.1)$$

イオンの運動方程式:

$$m [\partial_t u + (u \cdot \text{grad}) u] = -e \text{grad} \phi + e u \times B \quad (2.2)$$

で与えられる。ここで、 e はイオンの電荷、 m はイオンの質量、 ϕ は静電ポテンシャル、 B はトロイダル磁場を表す。(2.1) (2.2) を閉じた方程式系とするためにイオンの密度分布に対する準中性の条件

$$n = n_0 \exp [e \phi / T_0] \quad (2.3)$$

を用いる。ここで、 n_0 、 T_0 はそれぞれ背景電子の密度分布と温度分布を表す。電子は磁場に沿ってボルツマン分布しており、 ϕ の変化に対して断熱的に応答すると仮定している。

ここでは、トロイダル磁場は時間的空間的に一様で平行であり（低ベータ・プラズマ）、イオンの運動は準2次元的であると仮定する。すなわち、イオンの密度と運動はトロイダル磁場（この方向を z 軸にとる）に平行な方向に一様であり、垂直方向の運動に寄与しないとする。このとき、運動方程式は z 軸に垂直な面内において

$$m [\partial_t v + (v \cdot \nabla) v] = -e \nabla \phi + e B v \times z \quad (2.4)$$

となる。 v は2次元速度、 ∇ は2次元勾配演算子、 z は z 方向の単位ベクトルである。(2.4) の両辺の rot をとると、 z 軸方向に対して

$$\partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \omega + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \omega_{ci}$$

という式を得る。ここで $\omega_{ci} = eB/m$ はイオン・サイクロトロン周波数である。これより

$$-(d/dt) \ln(\omega + \omega_{ci}) = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.5)$$

を得る。ただし $d/dt = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ である。

また、連続の式 (2.1) より

$$-(d/dt) \ln(n) = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.6)$$

を得る。

(2.5) (2.6) 式よりポテンシャル渦度の保存を表す関係

$$(d/dt) [(\omega + \omega_{ci})/n] = 0 \quad (2.7)$$

を得る。

B. 摂動展開

ポテンシャル渦度の保存式 (2.7) から摂動展開によりドリフト波の近似方程式を導く手順について述べておく (Nycander [2])。

まず、時間スケールのオーダーとして

$$\varepsilon_t \sim \omega_{ci}^{-1} \partial_t \quad (2.8)$$

を導入する。このときポテンシャル渦度が流体粒子の運動に関して保存されるという性質を保つために

$$\partial_t \sim \mathbf{v} \cdot \nabla \sim \varepsilon_t$$

であると仮定する。このことは、同時に

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} \sim \varepsilon_t$$

であることを意味している。 ε_t が十分に小さいとすると (2.4) 式の左辺は最低次で無視できて

$$0 = - (e/m) \nabla \phi + \mathbf{v}^{(0)} \times \omega_{ci} \mathbf{z}$$

となるから

$$\mathbf{v}^{(0)} = (e/m\omega_{ci}) \mathbf{z} \times \nabla \phi \quad (2.9)$$

となり、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度を得る。また、この関係から静電ポテンシャル ϕ は系の流れ関数としての性格を併せ持っていることがわかる。

次に、静電ポテンシャル ϕ の振幅のスケールを

$$e\phi/T_e \sim \varepsilon_p \quad (2.10)$$

とする。このとき ε_t と ε_p の比をとると

$$\varepsilon_t / \varepsilon_p \sim \rho_i^2 \Delta \quad (2.11)$$

$$(\rho_i^2 = T_e / \omega_{ci}^2 m_i : \text{実効ラーマー半径})$$

となる。したがって ϕ の振幅のスケールと渦度 ω (したがって時間 t) のスケールの比によって系に特徴的な波長のスケールが決まることになる。この点は、通常の逓減摂動法において振幅と時間および波長に関する空間スケールを任意の大きさに取ることが出来たのとは異なっている。

イオン・プラズマに対するCHM方程式を得るために、準中性条件 (2.3) に現れる背景電子の温度および密度分布の空間スケールを評価する必要がある。

ここでは、これら背景不均一性の特徴的なスケールとして

$$\begin{aligned} \text{密度勾配: } & (n_0(x) \text{ の波長})^{-1} / (\phi \text{ の波長})^{-1} \\ & \sim |\nabla \ln n_0| / |\nabla \ln \phi| \sim \varepsilon_n \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{温度勾配: } & (T_e \text{ の波長})^{-1} / (\phi \text{ の波長})^{-1} \\ & \sim |\nabla \ln T_e| / |\nabla \ln \phi| \sim \varepsilon_T \end{aligned} \quad (2.13)$$

を導入する。

以上の微小パラメーターを用いてポテンシャル渦度の保存式 (2.7) を摂動展開する。 (2.7) 式を次の無次元化パラメーター

$$\begin{aligned} \text{時間: } & \omega_{ci}^{-1} = m / e B, \quad \text{長さ: } \rho_i^2 = \omega_{ci}^{-1} (T_{e0} / m_i)^{-1/2} \\ \text{ポテンシャル: } & T_{e0} / e \quad (\text{ただし } T_{e0}: \text{電子の基準温度}) \end{aligned}$$

によって無次元化すると

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) (\phi / \tau(x) - \nabla \times \mathbf{v} + \ln n_0(x)) &= 0 \quad (2.14) \\ (\tau(x) = T_e(x) / T_{e0}: \text{無次元温度}) \end{aligned}$$

を得る。

ここで

$$\varepsilon_p \sim \varepsilon_t \sim \varepsilon_n \sim \varepsilon_T \sim \varepsilon \ll 1$$

を仮定すると、(2.14) 式の最低次は ε^2 となる。したがって、その次のオーダーである ε^3 以上の項を無視するとCHM方程式

$$\partial_t (1 - \Delta) \phi = \nu \partial_y \phi + \nabla \phi \times \nabla (\Delta \phi) \quad (1.1)$$

を得る。ここで $\nabla \ln n_0(x) \simeq 1 + \nu x$ と展開した。

また、温度勾配のスケールが小さいとき、すなわち

$$\varepsilon_p \sim \varepsilon_t \sim \varepsilon_n \sim \varepsilon \ll \varepsilon_T \ll 1$$

のとき、(2.14) 式において $\varepsilon^2 \varepsilon_T$ までの項をとると変形 CHM 方程式

$$\partial_t (1 - \kappa x - \Delta) \phi = \nu \partial_y \phi + \nabla \phi \times \nabla (\Delta \phi) - \kappa \phi \partial_y \phi \quad (1.2)$$

を得る。ここでは $\tau(x) \simeq 1 + \kappa x$ と展開した。温度勾配によって κ を係数とする2つの項が新たに加わる。左辺第2項は2次元ドリフト方程式 (1.3) (Petviashvili [7]) においては欠落している。この項の有無により方程式の性格が変わることになる。(1.3) 式の場合には、摂動展開で同じオーダーの項を落としていることになり、そのため静電ポテンシャル ϕ はポテンシャル渦度の保存式 (2.7) を満たさなくなっている。

3. 定常解について

A. CHM方程式の定常解

CHM方程式 (1.1) は2次元的に局在した定常進行波解をもつ (具体的な表示は例えば Makino et al. [4] 参照)。この解はベッセル関数を用いて解析的な表示として与えられ、正と負の渦から成る双極子型の孤立渦を表し、しばしばモードン (modon) と呼ばれている。この孤立渦解の性質は、Makino et al. [4] による数値実験によって調べられており、次のような結果が得られている。

- (i) 単一の孤立渦は安定であり、形と速度を変えずに伝播する。
- (ii) 2つの孤立渦の正面衝突においては、衝突後個々の孤立渦は完全に初期値に戻る。
- (iii) 追越し衝突においては伝播速度が変化するが、衝突後には安定な孤立渦となる。

以上、CHM方程式の枠内では孤立渦解は安定でソリトン的に振舞うことが示されている。

B. ドリフト方程式の定常解

2次元ドリフト方程式 (1.3) は、 y 軸正方向に速度 c で動く定常進行波を考えると

$$-c \partial_y (1 - \Delta) \phi = \nu \partial_y \phi + \nabla \phi \times \nabla (\Delta \phi) - \kappa \phi \partial_y \phi \quad (3.1)$$

となる (本節では $y - ct$ を新たに y と表している)。この式は

$$\nabla (\phi - cx) \times \nabla [(1 - \kappa x) \phi - \Delta \phi + \nu x + c \kappa x^2 / 2] = 0 \quad (3.2)$$

と書き直すことができる。

したがって、定常進行波解の満たすべき方程式は一般に任意関数 f を用いて

$$(1 - \kappa x) \phi - \Delta \phi + \nu x + c \kappa x^2 / 2 = f(\phi - cx) \quad (3.3)$$

と表すことができる。 f の関数形は、十分遠方において ϕ と $\nabla \phi$ が十分速く減衰するという境界条件のもとで

$$f(\phi) = -(\nu/c) \phi + (\kappa/2c) \phi^2$$

となる。このとき (3.3) は

$$\Delta \phi - (1 + \nu/c) \phi + (\kappa/2c) \phi^2 = 0 \quad (3.4)$$

となる。これが局在した定常解の満たすべき方程式である。

一方、(3.1) において最初からベクトル非線形項を無視した式を考えると

$$\partial_y [\Delta \phi - (1 + \nu/c) \phi + (\kappa/2c) \phi^2] = 0 \quad (3.5)$$

となり、これを積分し積分定数を0とすれば (3.4) 式となる。

すなわち、ベクトル非線形項を最初から落とした場合の定常進行波解はドリフト方程式の局在した定常進行波解になっているのである。このことは Zakharov-Kuznetsov 型の局在単極子渦解が2次元ドリフト方程式の基本解となる可能性を示唆している。

(3.4) 式は変数変換

$$\Phi = [\kappa / 2 (c + \nu)] \phi, \quad R = (1 + \nu / c)^{1/2} r$$

によって

$$\Delta_R \Phi - \Phi + \Phi^2 = 0 \quad (3.6)$$

の形に規格化できる。この方程式には、単一の固有値に対応する軸対称解（唯一解）が存在し、数値的に求められている（Iwasaki et al. [6]）。軸対称な場合には可積分性の判定基準であるパンルベ性を満たさないので解析解は存在しないと考えられる。

(3.6) 式の解と変数変換との関係から $\nu > 0$ のときには

$$c < -\nu \quad \text{または} \quad 0 < c$$

において解が存在することが言える。とくに $c < -\nu$ のときには、解は負のピークをもつ。すなわち、ZK方程式の場合と異なり、2次元ドリフト方程式 (1.3) においては、正負いずれの渦に対応する単極子解も存在し得ることになる。

4. 数値実験の結果

我々は2次元ドリフト方程式 (1.3) の数値実験を行った。(1.3) をフーリエ変換し擬スペクトル法を用いて 85^2 のフーリエ・モードに分解して系の時間発展を求めた。

初期条件としては、CHM方程式のモードン解 (速度: $c=1.0$ 、接続半径: $r_0=2.0$) (例えば文献 [4] 参照) およびフーリエ空間でランダム位相をもつガウス分布を採用した。パラメータの値は、密度勾配係数を $\nu=1.00$ に固定し、温度勾配係数 κ を次のように変化させた。

(A) モードンが初期条件の場合:

$$\kappa = 0.00, \quad 0.25, \quad 0.30, \quad 0.35, \\ 0.40, \quad 0.45, \quad 0.50, \quad 1.00.$$

(B) ガウス分布が初期条件の場合:

$$\kappa = 0.25, \quad 0.50.$$

2つの初期条件とそれぞれに対応する数値実験の結果の例とを図1～図4に示す。

得られた結果をまとめると以下の通りである。

(A) モードン初期条件の場合

1. $\kappa \neq 0$ のとき、dipole 構造は崩れて monopole へと移行する。
(同様な結果が Spatschek et al. [8] によって最近得られた。)
2. 渦領域は円形になろうとする傾向を示す。
3. 正極 (anticyclone) が強められ、負極は弱められる傾向を示す。

(B) ガウス分布初期条件の場合

1. 初期に存在する大きな負の渦領域が変形し円形に集中して、monopole (cyclone) が生成されていくように見える。

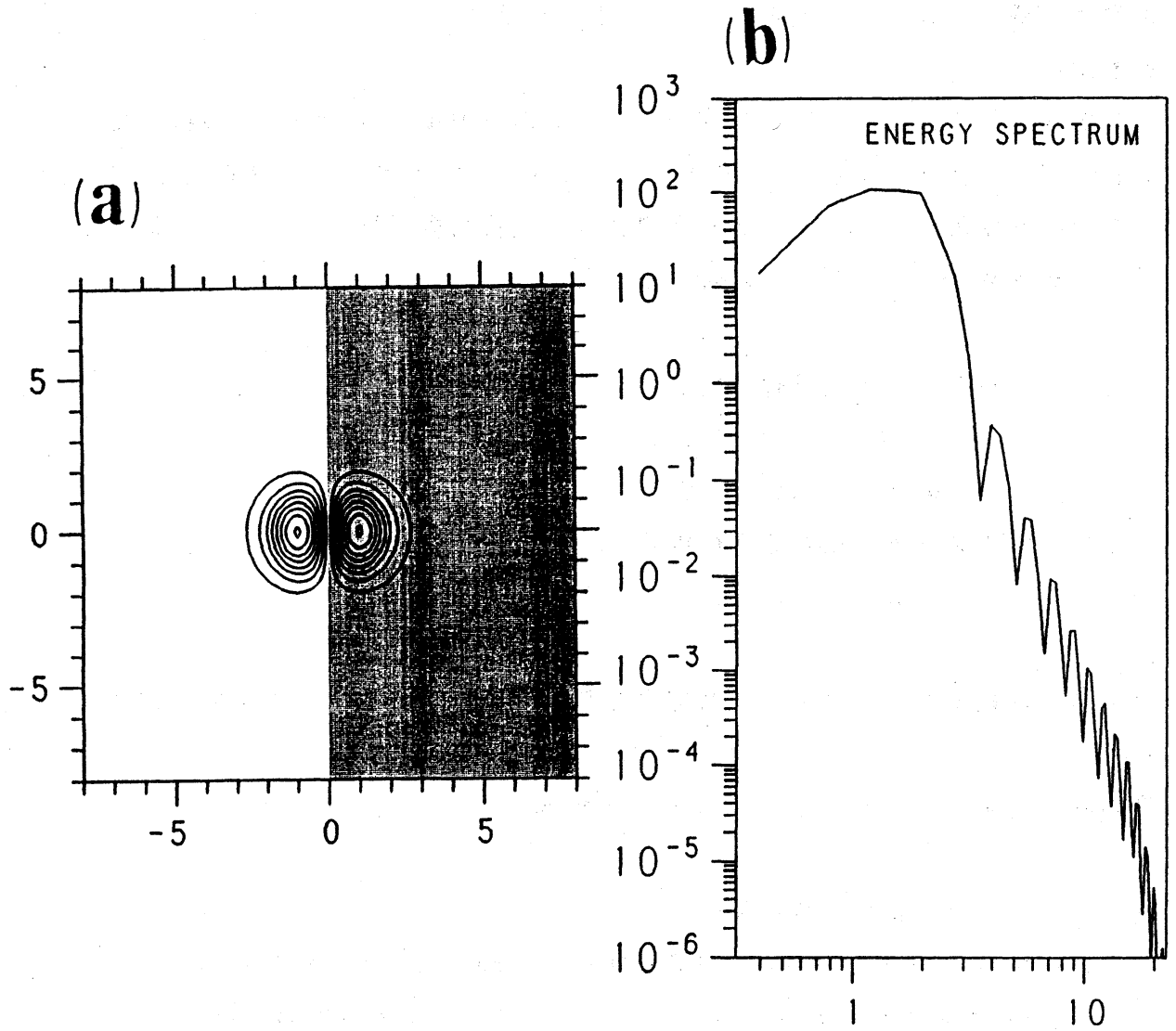


図 1. モードン (CHM方程式の定常解)

(速度: $c = 1.00$, 接続半径: $r_0 = 2.00$)

(a) 実空間での ϕ プロファイル (以下影をつけた部分は $\phi > 0$ の領域を表す) (b) エネルギー・スペクトル

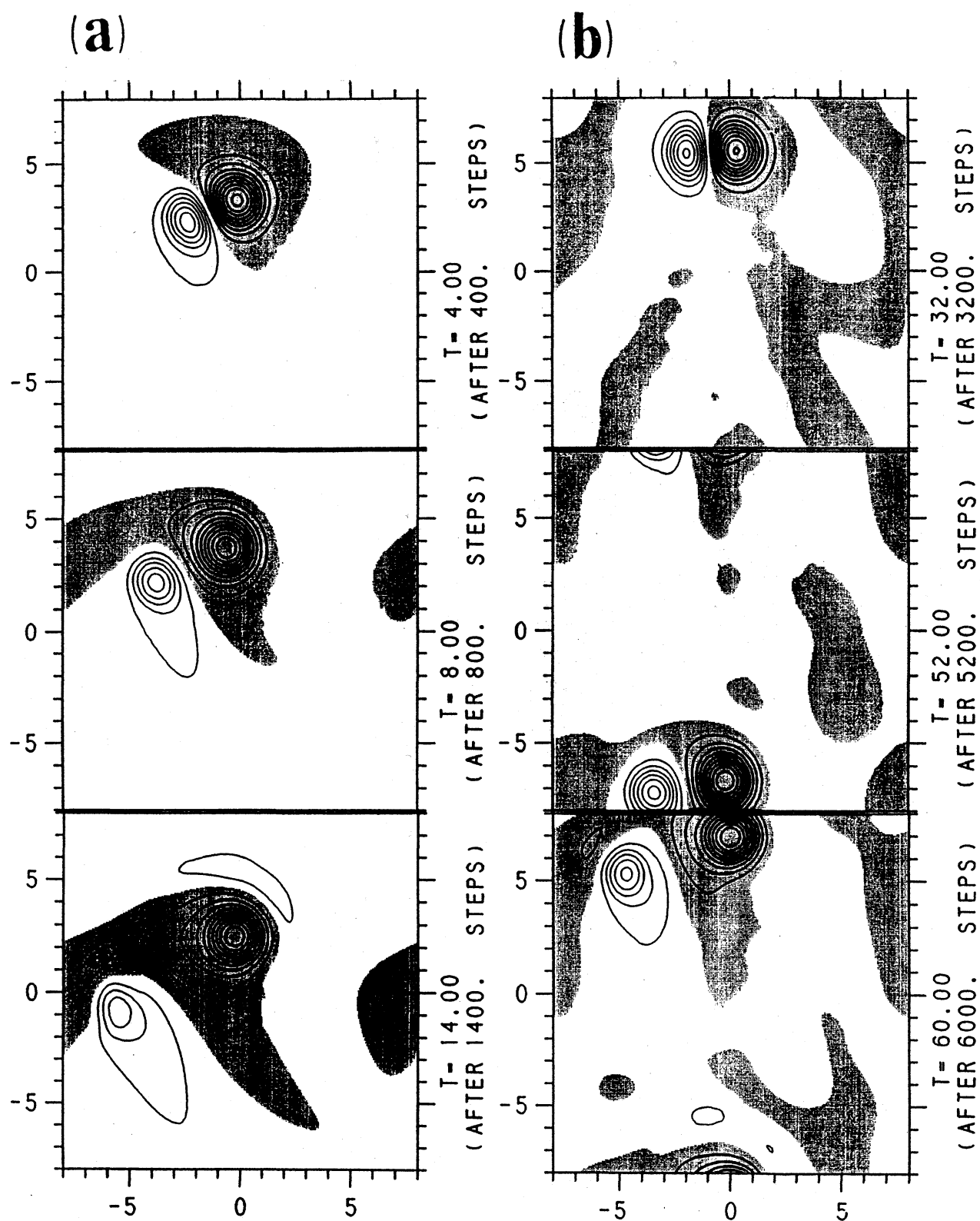


図2. モードン (図1) を初期条件としたときの ϕ プロファイルの時間発展
 (密度勾配: $\nu = 1.00$) (a) 温度勾配: $\kappa = 0.40$
 (b) $\kappa = 0.25$

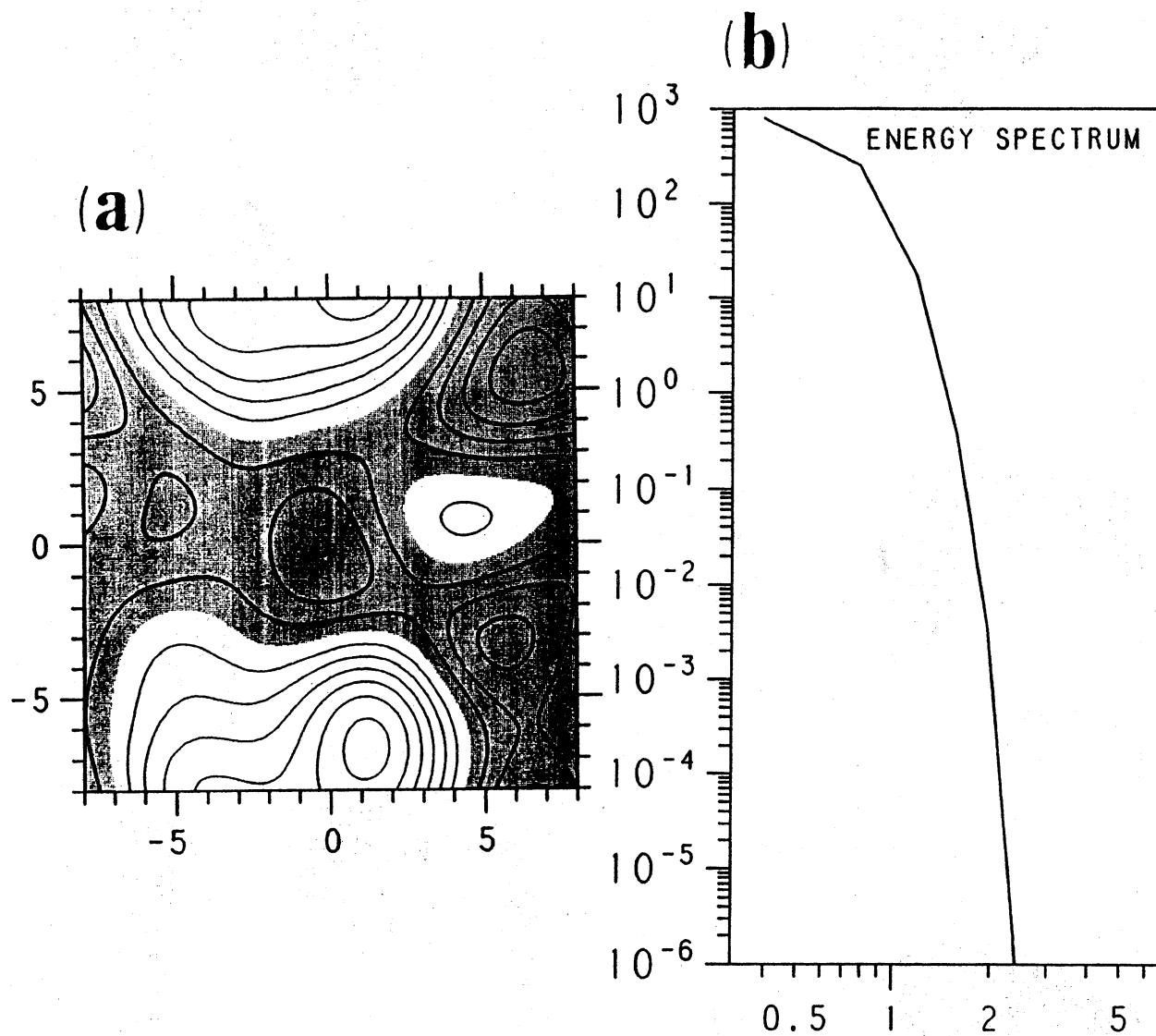


図 3. ランダム位相ガウス分布 (フーリエ空間)

$$\hat{\phi}(0) = 0, \quad \hat{\phi}(k) = A \exp(-k^2 / \sigma^2 + i\xi), \quad (k \neq 0)$$

$A = 200$, $\sigma^2 = 0.5$, $\xi: [0, 2\pi)$ の一様乱数

(a) 実空間での ϕ プロファイル

(b) エネルギー・スペクトル

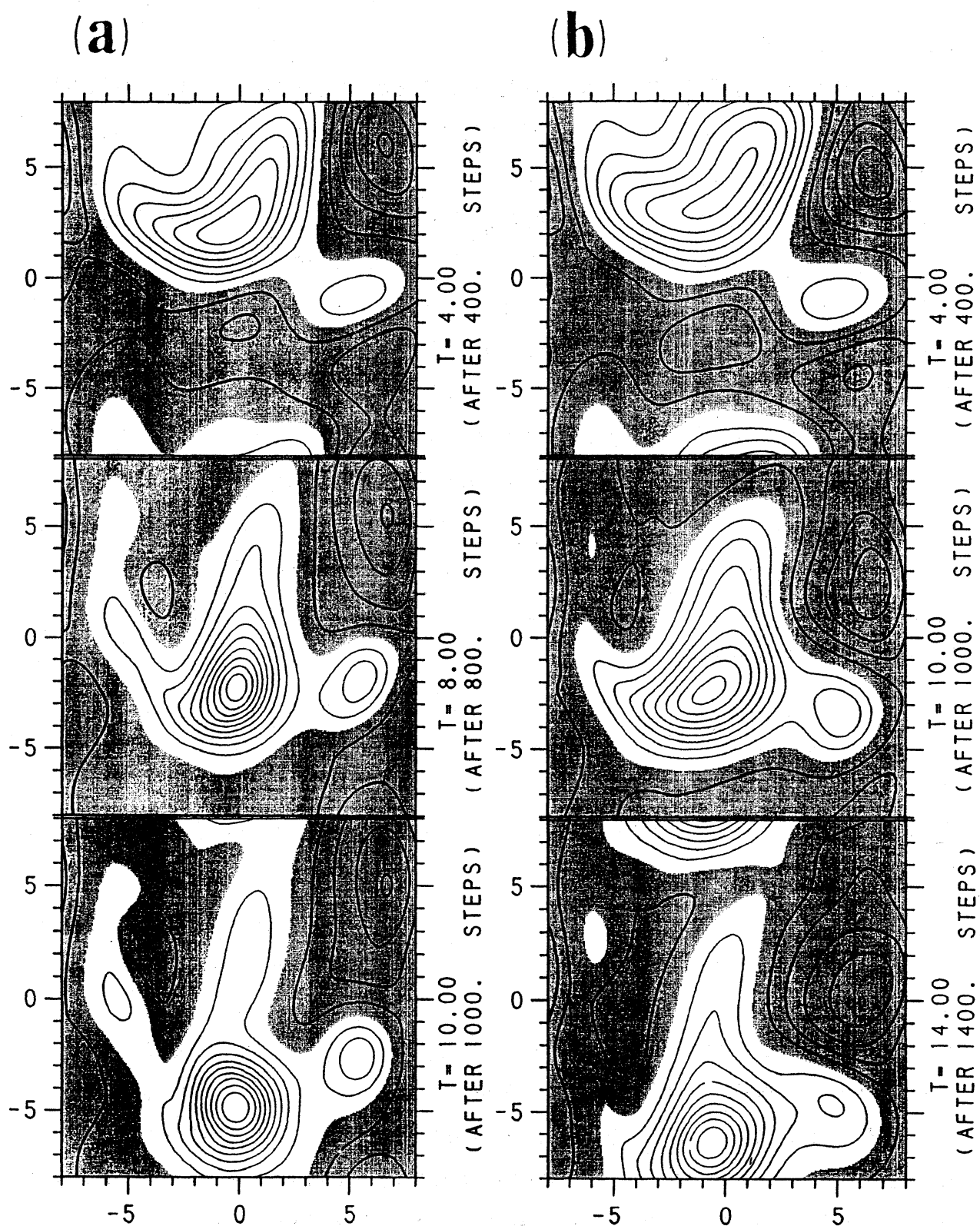


図4. ランダム位相ガウス分布 (図3) を初期条件としたときの ϕ プロファイルの時間発展 (密度勾配: $\nu = 1.00$)

(a) 温度勾配: $\kappa = 0.50$ (b) $\kappa = 0.25$

5. まとめ

ドリフト波に対し背景電子の温度勾配の効果を取り入れると、2種の非線形項をもつ変形CHM方程式(1.2)が得られる。その導出の手順からも明らかなように(1.2)式では、スカラー非線形項と同じオーダーの近似で左辺に κx に比例する非一様項が現れている。温度勾配の効果調べるには(1.2)式を取り扱うのが妥当と考えられるが、非一様項を含んだまま数値実験を行うことは難しい。そこで本報告では、CHM方程式にスカラー非線形項が加わった(1.3)式について数値実験を行い、2種の非線形項の役割を調べる試みを行った。

その結果、スカラー非線形項の存在により双極子解(モードン)が不安定化されることが明かとなった。しかし、このモードンの不安定性が、非一様項を無視した(1.3)式の”保存則の破れ”によるものか、非一様項とスカラー非線形項とをもつ(1.2)式においても生じるものであるのかは、今のところ解っていない。

(1.2)式的双極子解については、モードン解から摂動解が構成できることをNycander [10] が示している。一方、(1.2)式の単極子型の構造をもつ解については、定常進行波解を

$$\phi(x, y - ct) = \phi(x, y - ct) - cx$$

の形に仮定し、十分遠方において ϕ が十分速く0に近づくとする(3.4)を導出したのと同様な手続きにより

$$\Delta\phi - [(c+v)/2c]\phi + (\kappa/4c)\phi^2 = 0$$

を得る。このことから、 $-cx$ のようなポテンシャルの長波長揺動の存在下でも単極子型の構造が可能であることが分かる。この場合、 ϕ^2 の項はスカラー非線形項に由来するので、解の単極子構造にはスカラー非線形項が寄与していると言える。これより、(1.2)式における単極子構造の性質は、非一様項を含まない(1.3)式においても定性的に保持されていると期待される。

数値実験の結果では、単極子型の円形の渦が支配的となることが分かった。定常解の議論で示されたように、定常進行波型の単極子解はベクトル非線形項を含む (1.3) 式の解になっているので、数値実験の結果を併せて考慮すると単極子解が (1.3) 式の基本解となることが期待される。その際、(1.3) 式の定常解として正あるいは負の渦に対応する単極子解が両方とも可能であることに注意する必要がある。このことは、正負の単極子の相互作用が系の発展に関与していることを示唆している。したがって、個々の単極子解の安定性はもちろん、正負の単極子の相互作用における安定性なども興味のある問題となる。これらは今後の課題である。

参考文献

- [1] A.Hasugawa and K.Mima: Phys.Fluids 21(1978)87-92.
- [2] J.Nycander: Phys.Fluids B1(1989)1788-1796.
- [3] T.Matsuura and T.Yamagata: J.Phys.Oceanogr. 12(1982)440-456.
G.P.Williams: J.Atmos.Sci. 42(1985)1237-1243.
- [4] M.Makino, T.Kamimura and T.Taniuti: J.Phys.Soc.Japan 50(1981)
980-989.
- [5] V.E.Zakharov and E.A.Kuznetsov: Sov.Phys.JETP 39(1974)285-286.
- [6] H.Iwasaki, S.Toh and T.Kawahara: Physica D43(1990)293-303.
- [7] V.I.Petviashvili: JETP Lett. 32(1980)619-622.
- [8] K.H.Spatschek, E.W.Laedke, Chr.Marquardt, S.Musher and H.Wenk:
Phys.Rev.Lett. 64(1990)3027-3030.
- [9] M.Kono and E.Miyashita: Phys.Fluids 31(1988)326-331.
- [10] J.Nycander: Phys.Scripta 39(1989)758-763.