

複素射影空間に微分同相な

1

リーマン多様体

塩浜勝博

I. Introduction. M を compact なリーマン多様体と

する。 M が 1 次元の微分幾何学的条件の下に, rank 1, compact type の射影空間に (以下簡単のため, モデルと呼ぶことにする) 等長となることをまず考える。等長の条件を relax することにより M がモデルに微分同相となる条件が見出されたことを期待するからである。

まずモデルが持つ特徴を pick out することから始める。 M^* をモデルの一つとすると, M^* は次の特徴を持つ:

(1) M^* 上の任意の測地線は simply closed, 且つ長は一定。各測地線上の任意の点に対してその対点が M^* の測地線に沿う共役点であり, 共役点の重複度は一定 λ , ここに λ は

$$\lambda = 0, 1, 3, 7, \dim M^* - 1$$

(2) 任意の測地線に沿う cut point は第一共役点と一致する。

(3) 任意の点 $p^* \in M^*$ と, 任意の $x^* \in C(p^*)$ ($C(p^*)$ は p^* の cut locus) に対し $\text{distance}(p^*, x^*) = \text{一定}$ 。

(4) $N(p^*, x^*)$ を $p^*, x^* \in C(p^*)$ を結ぶ最短測地線分上の点の全体よりなる集合とする。 $N(p^*, x^*)$ は $(\lambda+1)$ -次元 compact, 定曲率リーマン部分多様体。2 球に等長である。ここに

$\lambda =$	$M^* =$
0	real projective space
1	complex " "
3	quaternionic " "
7	Cayley " "
$\dim M^* - 1$	球

(5) 任意の点 $p^* \in M^*$ に対し $\text{cut locus } C(p^*)$ は totally geodesic submanifold (無限遠超平面) である。

(6) M^* の断面曲率 K^* は metric を normalize することにより $1/4 \leq K^* \leq 1$ を満たす。

と 2, (i) ($1 \leq i \leq 6$) を条件として持つ M はどの程度モデルに近いかを考える。

定理 1 (中川-塩浜; [5]) M 上に一点 p が存在し, $C(p)$ 上の任意の点 x に対し, もしも $d(p, x) =$ 一定ならば, 点 p に関し以下が成立する。

(1)" M 上の測地線が p より出発するものは全 2 geodesic loop が長さ一定且つ p のホーミ役点の重複度も一定 λ である。

(2)" p から出る任意の測地線に沿うホーミ役点は p の cut point に一致する。

(4)" 任意の $x \in C(p)$ に対し $N(p, x)$ は $(\lambda+1)$ -次元 submanifold が p に於て singular point をもつ。

(5)" $C(p)$ は compact submanifold が, 次元は $\dim M - (\lambda+1)$ 。

更に中川の定理により ([4]) M の Homology type は M^* のそれと同型である事が (1)" より導かれる。

もう少し M に対する条件を追加すると:

定理 2 (中川-塩浜; [5]). M with (3) は以下の特徴をもつ。

(4') 任意の $p \in M$, 任意の $x \in C(p)$ に対し $\exists N(p, x)$ は $(1+1)$ -次元 compact submanifold z , 球に同相である。

(5') 任意の点 p に対し $\exists C(p)$ は $\dim M - (1+1)$ -次元 compact submanifold.

また, M^* の一点 p^* に関する無限遠超平面 $C(p^*)$ は M^* と同一の微分幾何学的構造をもつ。その理由として考えられる事は, $C(p^*)$ が totally geodesic subm. であることに因り, M^* の持つ特徴が $C(p^*)$ に遺伝する事である。要するに

定理 3 (中川-塩浜; [5]). M with (3) and (5) につき以下が成立する。

(*) もしも $N(p, x)$ が任意の $p \in M$, 任意の $x \in C(p)$ に対し $\exists$ 定曲率ならば M は M^* に等長である。

(**) $\lambda = 1$ ならば M は $P(C)$ に等長である。

また, 定理 3 の条件を relax する事を考える。

条件 (A): (4') に於ける singular point の出現をまじり, 又, 計算の都合により条件 (3) は保留する。i.e. (A) := (3).

条件 (B'): 条件 (*) を δ -pinched にあきかえる。

条件 (C'): 条件 (5) は任意の点 p を fix したとき任意の $x \in C(p)$ に於ける任意の normal vector $v \in M_x$ に関する π -基本形式の定める endomorphism $S_v: T_x N(p, x) \rightarrow T_x N(p, x)$ の固有値が「十分 0 に近い」と云う条件にあき換わったとあるう, こゝに $T_x N(p, x)$ は点 x に於

る $N(p, x)$ の接空間を表わす。実とし $X \in T_x N(p, x)$ を $S_v(X) = \alpha X$ なる vector とする α , $d(p, x) =: l$, $\gamma: [0, l] \rightarrow M$ を $\gamma(0) := p$, $\gamma(l) := x$, $\gamma'(l) := v$ なる測地線, Y を γ に沿う Jacobi 場とし, $Y(0) := 0$, $Y(l) := X$ なるもののとするととき:
第二変分公式より

$$0 = \int_0^l (\langle Y', Y' \rangle - \langle R(Y, \gamma) \gamma, Y \rangle) dt + \langle S_v(X), X \rangle.$$

従, $\alpha = -\langle Y, Y' \rangle(l)$. 故に γ に沿う vector 場 $Y/|Y|$ が十分に平行な近ければ α は 0 に近づく。曲率の言葉に翻訳すれば $K(Y, \gamma)$ が pinch されるければ α は 0 に近づく。

実としに, 以下の如く曲率の条件 (B)', (C)' を formulate する事が可能である。

定義 1.

$$G_1 := \{(X, Y); X, Y \in TN(p, x) \text{ for all } p \in M \text{ and all } x \in C(p)\}$$

$$G_2 := \{(X, Z); X \in TN(p, x), Z \text{ is normal to } TN(p, x) \Rightarrow X \text{ for all } p \in M \text{ and all } x \in C(p)\}$$

定義 2.

$$\delta := \frac{\min \{K(X, Y); (X, Y) \in G_1\}}{\max \{K(X, Y); (X, Y) \in G_1\}}$$

$$\kappa := \frac{\min \{K(X, Z); (X, Z) \in G_2\}}{\max \{K(X, Z); (X, Z) \in G_2\}}$$

Remark 1. 上述の G_1, G_2 を $M^* = P(C)$ の場合に α, β は α, β と G_1, G_2 は α, β holomorphic, anti-holomorphic sections の集合であり δ, κ は M^* 上では α, β に 1 とある。

また我々が証明したい事は以下である。

主定理[7]. M は compact リーマン多様体で条件 (A) を満たし、且つ $\lambda = 1$ とする。このとき単調増加数列 $\{\delta_n\}$ と $\{K_n\}$ とが存在し、

$$(B): \quad \delta > \delta_m$$

$$(C): \quad K > K_m$$

を満たす M は $P(C)^m$ (複素次元) に微分同相である。

II. Outline of Proof. 以下 cut locus までの距離を ℓ とし、 $M^* = P(C)$ の曲率は $\frac{\pi^2}{4\ell^2} \leq K^* \leq \frac{\pi^2}{\ell^2}$ を満たすものとする。 $p \in M$, $p^* \in M^*$ を任意に fix する。 $C(p)$ が p^* に属する無限遠超平面 $C(p^*)$ に微分同相 2° があるのは、証明は終り。実際、 $h: C(p^*) \rightarrow C(p)$ が diffeom. 2° があるとき、 $x^* \in C(p^*)$, $x := h(x^*) \in C(p)$ に於ける 2-次元 normal subspace in $M_{x^*}^*$, M_x を夫々 $V(x^*)$, $V(x)$ とおくと、 $\tilde{h}: M^* \rightarrow M$ を $\tilde{h} := (\exp_x|_{V(x)}) \circ h \circ (\exp_{x^*}|_{V(x^*)})^{-1}$ と定義すると $\tilde{h}$ は diffeom. になる。従って $C(p)$ の微分構造に我々は注目する。

$C(p)$ を点 p からながめると、 $x \in C(p)$ に対して M_p 内の 2-次元 linear subspace $T_p N(p, x)$ が自然に対応する。 $\{T_p N(p, x); x \in C(p)\}$ を M_p 内の原点中心の単位超球面 2° cut すると $C(p)$ に対して $S_p(1)$ 上の大円族に対応する。かくして $(2m-1)$ -次元 standard 球面上の S^1 free action が得られる。実際 $\tilde{j}: S_p(1) \rightarrow S_p(1)$ を上述の大円上の 90° 回転を与える変換とする (即ち $\tilde{j}^2 = -\text{id.}|_{S_p(1)}$)、 $S^1 \cong [0, 2\pi]$ の任意の元 θ に対して $\tilde{\varphi}_\theta: S_p(1) \rightarrow S_p(1)$; $\tilde{\varphi}_\theta(u) := u \cos \theta + \tilde{j}u \sin \theta$, $u \in S_p(1)$

により S^1 free action $(S_p(1), \tilde{\varphi}, S^1)$ が得られる。更に $\exp_p$ を介して CCP は $S_p(1)/\tilde{\varphi}$ と同一視される。 CCP^* においても同様の考察から standard action $(S_{p*}(1), \varphi, S^1)$ を得る。 $S_{p*}(1) \rightarrow S_{p*}(1)/\varphi$ は Hopf fibration である。 J を almost complex structure とし、 $\theta \in S^1$ に対して $\varphi_\theta: S_{p*} \rightarrow S_{p*}(1)$ は $\varphi_\theta(u) := u \cos \theta + Ju \sin \theta$ で与えられる。

我々の bundle は明らかに principal bundle であるから bundle space 上の fibre preserving diffeom. を条件 (B), (C) の下に構成する事が前述の $\psi: CCP^* \rightarrow CCP$ を induce する。即ち $S_p(1)$ と $S_{p*}(1)$ とを linear isometry により同一視したとき、我々は次の map に注目する。

定義 3. $f := \tilde{f} \circ J^{-1}$

さて、 $\tilde{f}$ と J との「差」は f により測られる。その「差」が十分小さい時に fibre preserving diffeom. が構成されるのである。その「差」は条件 (B), (C) により control される。以下に fibre preserving diffeom. を構成する方法を述べる。

定理 4. 任意の $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{4}]$ に対して、 $\delta(m, \varepsilon)$, $K(m, \varepsilon)$, $L_\bullet: M_{p*}^* \rightarrow M_p(S_{p*}(1) \text{ と } S_p(1) \text{ の identification})$ が存在し、 $\delta \geq \delta(m, \varepsilon)$, $K \geq K(m, \varepsilon)$ は次の不等式を imply する。

$$\text{Max}\{\phi(u, f(w)); u \in S^{2m-1}\} = \beta < \varepsilon$$

$$\text{Max}\{\phi(\tau_1 A, d\tau_1 A); A \in TS^{2m-1}\} = \varepsilon,$$

ここに $2m = \dim M$, τ_1 は $u, f(w)$ を結ぶ大円に沿う平行移動である。

また、定理4の条件を満たす f は以下の意味に於て $\text{id.}|S^{2m-1}$ に *diffeotopic* である: 任意の u に対し $\gamma_u:[0,1] \rightarrow S^{2m-1}$ を $u, f(u)$ を結ぶ最短測地線とする, 且し $\lambda \mapsto \gamma_u(\lambda)$ は弧長に比例して $\gamma_u(0) := u, \gamma_u(1) := f(u)$ とする様にとりゃてゐるものとする。
 $F:[0,1] \times S^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1}$ を $F(t,u) := \gamma_u(t)$ で定義し,
 $F_t:S^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1}$ を $F_t(u) := F(t,u)$ とおけば, F_t は全ての $t \in [0,1]$ に対し diffeom. であり, 特に $F_0 = \text{id.}, F_1 = f$.

定義4. $J_t := F_t \circ J \quad t \in [0,1]$.

このとき $\angle(u, J_t(u)) = \frac{\pi}{2}$ が全ての $u \in S^{2m-1}, t \in [0,1]$ に対し成立するから J_t は S^{2m-1} 上の単位 *vector field* とみなせる。この $\{J_t\} (0 \leq t \leq 1)$ を用いて fibres の $\mathcal{F}$ から φ の *local deformation* を構成した。この準備として以下のものを定義する。

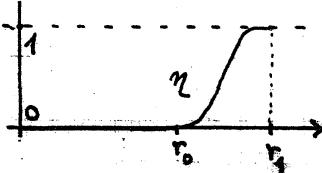
定義5.

$r_1 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \beta)$ なる正の数を固定する。 $r_0 := \frac{\pi}{4}$.
 $B_{r_1}(u) := \{v \in S^{2m-1}; \langle Ju, v \rangle = 0, \angle(u, v) < r_1\}$.

$r: B_{r_1}(u) \rightarrow \mathbb{R}; \quad r(v) := \angle(u, v)$.

$\eta: [0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}$ 右図の如き C^∞ -関数

$\phi: B_{r_1}(u) \times S^1 \rightarrow S^{2m-1}$ s.t.



$\phi(v, \theta) := \exp_v \theta \cdot J_{\eta(r(v))}(v), \quad v \in B_{r_1}(u), \theta \in S^1.$

$\phi^{-1}(x) := (px, \theta_x).$

$\phi_v: [0, 2\pi] \rightarrow S^{2m-1}, \quad \phi_v(\theta) := \phi(v, \theta).$

以上の準備の下に;

定理 5. 正数 ε_0 が存在し, $\text{Max} \{ \tau(A), df(A) \} < \varepsilon_0$ ならば $\phi: B_{r_1}(u) \times S^1 \rightarrow S^{2m-1}$ は u のとりおに無関係に diffeom. となる。従って ϕ は coordinate function とみなせる。

定理 5 より我々は新しい S^1 free action $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}_1, S^1)$ を得る。実際 $\tilde{\varphi}_1$ は;

$$\tilde{\varphi}_1(v, \theta) = \begin{cases} \varphi(v, \theta) & v \in \phi(B_{r_0}(u), S^1) \\ \phi_{pv}(pv, \theta_v + \theta) & v \in \phi(B_{r_1}(u) - B_{r_0}(u), S^1) \\ \tilde{\varphi}(v, \theta) & v \in S^{2m-1} - \phi(B_{r_1}(u), S^1) \end{cases}$$

で与えられる。 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\varphi}_1$ の間には equivariant diffeom. が存在するから $S^{2m-1}/\tilde{\varphi}$ と $S^{2m-1}/\tilde{\varphi}_1$ とは diffeom. である。更に $B_{r_0}(u)$ 内では $\tilde{\varphi}_1$ と φ とは一致する。この $\tilde{\varphi}_1$ に対し再び $\tilde{J}_1$ を $\tilde{J}_1^2 = -\text{id}$. で定義し、定義する $\tilde{J}_1$ と $\tilde{\varphi}_1$ の diffeomorphism $f_1 := \tilde{J}_1 \circ J^{-1}$ を考える。

$$\text{Max} \{ \tau(u, f_1(u)); u \in S^{2m-1} \} =: \beta_1$$

$$\text{Max} \{ \tau(A, df_1 A); A \in TS^{2m-1} \} =: \varepsilon_1,$$

とあくと, β_1, ε_1 に関する情報は local cross section $B_{r_1}(u)$ 上での ϕ の作りおから知れる。実上 $\beta_1 \leq \beta$ であり, ε_1 は β, ε の関数として表わされる。つまり $\tilde{\varphi}_1$ から $\{\eta, \eta'\}$ 等 φ の fibres の local deformation を実行する為の routine work を定める事が出来る。かくして次の定理を得る。

定理 6. 単調減少数列 $\{\varepsilon_i\}$ が存在して,
 定義 3 で与えた f が $\text{Max}\{f(\pi H, d\pi H); H \in TS^{2m-1}\} < \varepsilon_k$
 を満たすとき, $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}, S^1)$ は k 回の local deformations
 (定義 5 で与えた方法での) を許容する。

主定理の証明. Standard fibre のまわりの半
 径 $\sin r_0$ の tubular nbds で bundle space S^{2m-1} の open
 finite covering になっている様なものの最小の
 個数を $N(m)$ とする。 $N(m) > \frac{1}{(\sin r_0)^{2m-2}}$ だとすれば
 なる事は tubular nbd. の体積と S^{2m-1} の体積の比
 から解る。従って $N(m)$ は次元に依りて depend
 する。定理 4 より $\delta_m := \delta(m, \varepsilon_{N(m)})$, $\kappa_m := \kappa(m, \varepsilon_{N(m)})$
 が存在し, $\delta > \delta_m$, $\kappa > \kappa_m$ 有るとき $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}, S^1)$ は
 $N(m)$ 回の local deformation を許容する。かくして
 S^1 free actions

$$\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_{N(m)} = \varphi$$

を得るが互いに与り合うものとしては equivalent
 だから結局 $\tilde{\varphi}$ は φ に equivalent になる。

Remark 2. $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}, S^1)$ の orbit $S^{2m-1}/\tilde{\varphi}$ は pc と同型
 な Homotopy type を持つ事が一般論から云える [1]。
 更に Hsiang 兄弟の定理 ([2]) によると, (S^{2m-1}, ψ, S^1) の
 orbit 上に無限個の互いに異なる微分構造が存在する。
 我々の場合に orbit space $S^{2m-1}/\tilde{\varphi} = C(P)$ 上
 にどのくらい互いに異なる微分構造があるの
 か? 全ての fibre が大同である様な "exotic action"
 の counter example はあるか? この点につて;

不等式 $L \leq L_i$ は $i = 1, 2, \dots, m$ に対し

$$\varphi(u, f(u)) \leq \beta_i(L) \quad \text{for any } u \in U_i$$

$$\varphi(v, f(v)) \leq \bar{\beta}_i(L) \quad \text{for any } v \in U_{i+1}, \langle v, U_i \rangle = 0$$

を imply する。且 U_i は $S_p(U)$ の $2i$ -linear subspace spanned by $\{e_1, Je_1, \dots, e_i, Je_i\}$ の交わり。

次に M 上の Jacobi の Twist の評価式を用いて;

Proposition 3.3. 任意の正数 ε に対し

$\delta(\varepsilon)$, $\kappa(m, \varepsilon)$ が存在し, 二つの不等式

$$\delta \geq \delta(\varepsilon), \quad \kappa \geq \kappa(m, \varepsilon)$$

は

$$\max \{ \varphi(\tau_t A, dfA) ; A \in TS_p(U) \} = \varepsilon$$

を imply する。

証明. $B := J^{-1}A$ とおく ($A \in T_u S_p(U)$)

$$\varphi(A, dfA) \leq \varphi(A, f(A)) + \varphi(\tilde{J}B, d\tilde{J}B).$$

$\langle B, f(u) \rangle = 0$ の場合の φ essential である。sphere pinching で用いた手法を用いて

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 1 \\ \kappa \rightarrow 1}} \varphi(\tilde{J}B, d\tilde{J}B) = 0$$

が云える。

Remark. 3. 上記の limit argument に於ての φ

δ が介入してしまふ。しかし δ を ε 以上とするのが本質的か否かは不明である。モデルを $P(Q)$ に変えた時には本質的に必要であろう。

さ 2, deformation を実行する為の準備として,
diffeotopy $\{F_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) の各元 F_t が満たす角度評価式を求めよう。

定理 3.4. f は定義 3 で与えたものとし,
更に以下の仮定を満たすものとする:

$$L^{-1} \leq \|df\| \leq L$$

$$\text{Max}\{\angle(u, f(u)); u \in S^{2m-1}\} =: \beta < \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Max}\{\angle(H, dF_t H); H \in TS^{2m-1}\} = \varepsilon.$$

このとき F_t は各 $t \in [0, 1]$ に対し 2 以下を満たす。

$$\hat{L} \leq \|dF_t\| \leq \hat{H}$$

$$\angle(\tau_t H, dF_t H) \leq \hat{\varepsilon} \quad \text{for any } H \in TS^{2m-1},$$

ここに

$$\hat{L}^2 := L^2 \cos^2 \varepsilon - L \sqrt{L^2 + 1 - L^2 \cos^2 \varepsilon} \cdot \sin 2d$$

$$\hat{H}^2 := L^2 + 1 - L^2 \cos^2 \varepsilon + L \sqrt{L^2 + 1 - L^2 \cos^2 \varepsilon} \cdot \sin 2d$$

$$\cos \hat{\varepsilon} := (\cos d - \sin d) L^{-1} \cos \varepsilon / \sqrt{L^2 + 1 - L^2 \cos^2 \varepsilon},$$

$$\cos d := \frac{L^{-1} \cos \varepsilon}{\sqrt{1 + L^2 - L^2 \cos^2 \varepsilon}}.$$

IV. Deformation of fibres. 定義 5 で与えた

$\phi: B_{r_1}(u) \times S^1 \rightarrow S^{2m-1}$ が 1-1 且つ regular な map であるように, 正数 ε_0 が $(\text{Max}\{\angle(\Sigma, H, dF_t H)\} < \varepsilon_0$ とする ε_0) とすれば定理 5 は証明されたことになる。

任意の v と任意の $H \in T_v B_{r_1}(u)$, $v \in B_{r_1}(u)$ に

ここに $\mu_\perp, \omega_\perp, L_\perp, H_\perp$ は $\beta, \varepsilon, \eta', L$ の関数であり,
 $\mu_T, \omega_T, L_T, H_T$ は $\hat{\varepsilon}, \hat{H}, \hat{L}, \beta, r_1$ で表わされる。

このとき $\text{Max}\{\phi(\tau X, dfX); X \in TS^{2m-1}\} \rightarrow 0$ に従って

$$\lim H_\perp = \lim H_T = \lim L_\perp = \lim L_T = 1$$

$$\lim \omega_\perp = \lim \omega_T = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim \mu_\perp = \lim \mu_T = 0$$

が成立する。

Proposition 4.1. $\text{Max}\{\phi(\tau X, dfX); X \in TS\} \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

ϕ が local regular であるための十分条件は

$$\begin{aligned} & \text{Max}\{H_T \cos \omega_T, H_\perp \cos \omega_\perp\} + \text{Max}\{H_T, H_\perp\} \{|\cos \mu_T - \cos \mu_\perp| + \sin \mu_\perp \sin \mu_T\} \\ & < \left[\text{Min}\{L_T^2, L_\perp^2\} - \text{Max}\{H_T^2, H_\perp^2\} \{ \sin(\mu_T + \mu_\perp) + \sin \mu_T \sin \mu_\perp \} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が満たされることである。

更に ϕ が local regular のとき、次のことがいえる。

Proposition 4.2. Prop. 4.1 の不等式が成立する

ϕ に対し、

$$\frac{1}{L_1} \leq \frac{\|Z_A(0 + \frac{\pi}{2})\|}{\|Z_A(0)\|} \leq L_1$$

が任意の点 $v \in B_{r_1}(u)$ に対して任意の $H \in T_v B_{r_1}(u)$ に対し

(2) 成立する；ここに L_1 は

$$L_1^2 := \frac{\text{Max}\{H_T^2 + H_T \cos \omega_T, H_\perp^2 + H_\perp \cos \omega_\perp\} + C}{\text{Min}\{L_T^2 - H_T \cos \omega_T, L_\perp^2 - H_\perp \cos \omega_\perp\} - C},$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} \cdot C := \text{Max} \left\{ \begin{aligned} & \text{Max}\{H_\perp, H_T\} \cdot \{|\cos \mu_\perp - \cos \mu_T| + \sin \mu_\perp + \sin \mu_T\} \\ & H_T \cdot H_\perp \{ \sin(\mu_\perp + \mu_T) + \sin \mu_\perp \sin \mu_T \} \end{aligned} \right\}.$$

Proposition 4.3. Prop. 4.1 の仮定の下に更に

$$\cos^{-1}\left(\frac{C}{L_1^2}\right) \geq \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}H_1}\left\{\frac{\sin\beta}{\sin L_1\beta} - H_1 \sin\mu_1 \frac{\sin L_1\beta}{\sin\beta}\right\} + \beta$$

が成立したとする。このとき ϕ は 1-1 2' がある。

証明. ϕ が 1-1 2' ないとして仮定する。essential trouble は以下の場合に起る；

$$\hat{r} := \sup\{r; \phi|_{B_r(u)} \times S^1 \text{ is diffeomorphic}\}$$

$$\bar{\theta} := \sup\{\theta; \phi|_{\partial B_{\hat{r}}(u)} \times [0, \theta) \text{ is diffeomorphic}\}$$

とおいたとき、互いに異なる 2 点 $x_1, x_2 \in \partial B_{\hat{r}}(u)$ が存在し、 $\phi(x_1, \bar{\theta}) = \phi(x_2, \bar{\theta})$ となる。 ϕ の local regularity より restricted map

$$\psi_{\bar{\theta}}: \partial B_{\hat{r}}(u) \rightarrow S^{2m-1}, \quad \psi_{\bar{\theta}}(x) := \phi(x, \bar{\theta})$$

は $(2m-2)$ -sphere の S^{2m-1} の immersion 2', double cover になる。もしも $\psi_{\bar{\theta}}(\partial B_{\hat{r}}(u))$ が実射影空間であれば Topology の定理 [I] により矛盾となる。しかし我々の situation 2' は $\psi_{\bar{\theta}}$ に対する強い制約がないので image が実射影空間となるかは疑わしい。

$\sigma_i: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow S^{2m-1}$ を $B_{\hat{r}}(u)$ 上の大円弧で

$$\sigma_i(0) := u, \quad \sigma_i(\hat{r}) := x_i \quad \phi(x_1, \bar{\theta}) = \phi(x_2, \bar{\theta})$$

$$B_i := \sigma_i'(\hat{r})$$

とする。 $Z_{\perp}^i$ は ϕ_{x_i} に沿う Jacobi field 2'.

$$Z_{\perp}^i(0) := B_i$$

とする。このとき $Z_{\perp}^1(\bar{\theta})$ と $Z_{\perp}^2(\bar{\theta})$ とは S^{2m-1} 内の超曲面 $\phi(\partial B_{\hat{r}}(u) \times S^1)$ の点 $\phi(x_i, \bar{\theta})$ に沿う接平面に属し 2 対反側の位置にある。従って $Z_{\perp}^1(\bar{\theta}), Z_{\perp}^2(\bar{\theta})$

は計算により

$$\angle(Z_1^1(\bar{\theta}), Z_1^2(\bar{\theta})) \geq 2 \cdot \cos^{-1}\left(\frac{c}{L_1}\right)$$

を満たす必要がある。一方この角度の upper bd.

は

$$\angle(Z_1^1(\bar{\theta}), Z_1^2(\bar{\theta})) \leq \begin{cases} \angle(Z_1^1(\bar{\theta}), B_1) + \angle(B_1, B_2) + \angle(B_2, Z_1^2(\bar{\theta})), & (\bar{\theta} < \frac{\pi}{2}) \\ \angle(Z_1^1(\bar{\theta}), -B_1) + \angle(-B_1, -B_2) + \angle(-B_2, Z_1^2(\bar{\theta})), & (\frac{\pi}{2} < \bar{\theta} < \pi) \end{cases}$$

$$\leq 2 \left\{ \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2} H_1} \left(\frac{\sin \beta}{\sin L_1 \beta} - H_1 \sin \mu_1 \frac{\sin L_1 \beta}{\sin \beta} \right) + \beta \right\}.$$

ここでも $\bar{\theta} > \frac{\pi}{4}$ (定義 5 の $r_0 := \frac{\pi}{4}$ より従う) は

$\angle(B_1, B_2) < 2\beta$ を導く為に essential に使われた。

実際問題として r_0 が小さくあれば $\angle(B_1, B_2)$ は大きくなる。

かくして定理 5 で主張した $\varepsilon_0 > 0$ は Propositions 4.1, 4.3 の不等式を満たす ε の sup として与えられる。これ routine work が定まった事になる。

定理 5 で述べた $(S^{2m-1}, \hat{\varphi}_1, S^1)$ から $\tilde{f}_1, f_1 := \tilde{f}_1 \circ J^{-1}$ を定義し、再び角度計算を実行すると次を得る。

Prop. 4.4.

$$\beta_1 \leq \beta,$$

$$\frac{1}{L_1} \leq \|df_1\| \leq L_1,$$

$$\angle(\tau_1 A, df_1 A) \leq \varepsilon_1$$

== k

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + 3\beta}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\tilde{\varepsilon}_1 + \beta}{4}\right) - (L_1 - 1) \right\}}{H_1},$$

$$\cos \tilde{\varepsilon}_1 := \frac{\text{Min} \{ L_T \cos \mu_T, L_\perp \cos \mu_\perp \} - (H_T \sin \mu_T + H_\perp \sin \mu_\perp)}{H_1}.$$

定理 6 の証明は Prop. 4.4 より自明である。

References.

- [1] Cheeger , Pinching Theorems for a Certain Class of
Riemannian Manifolds , Amer. J. Math., 91(1969), 807-834
- [2] Wu-chung and Wu-yi Hsiang , Some free differentiable
actions on 11-spheres , Quart. J. Math., 151(1964), 371-374
- [3] Husemoller , Fibre bundles , Mc Graw-Hill, New York, 1966.
- [4] Nakagawa , A note on Theorems of Bott and Samelson ,
J. Math. Kyoto, 7(1967), 205-220.
- [5] Nakagawa-Shiohama , Geodesics and Curvature Structures
Characterizing Projective Spaces, Diff. Geom., in honor
of K. Yano. , Kinokuniya, Tokyo 1972.
- [6] Sugimoto-Shiohama-Kancker , On the Differentiable Pinching
Problem, Math. Ann., 195(1971), 1-16
- [7] Shiohama , Riemannian Manifolds Diffeomorphic to Complex
Projective Space , to appear.