

CABLE KNOTS OF FIBRED KNOTS ARE FIBRED

東大理 大川 哲 介

§ 1. 定理の Statement.

$L = \cup K_i$ を μ -components link, L' を L の $(p_1, g_1; p_2, g_2; \dots, p_\mu, g_\mu)$ -型 cable link とする. さらに, $p_1 = p_2 = \dots = p_\mu = p$, $g_i \neq \sum_{j \neq i} \text{lk}(K_i, K_j)$ を仮定する. (lk は linking number を示す.) 以後この記号及び仮定を通して使う. 以上の仮定のもとに, 次の諸定理が成立する.

定理 1. L が fibred なら L' も fibred である.

系 iterated torus knot は fibred である

定理 2. $\text{lk}(K_i, K_j) = 0$ ($i < j$) なる仮定をさらに付け加える. L, L' の Seifert 行列を各々 $\Gamma(L), \Gamma(L')$ とすると, $\Gamma(L')$ は次の様になる.

$$\Gamma(L') = \left(\begin{array}{cccc} \Gamma(L), & \Gamma(L) & \cdots & \Gamma(L) \\ \Gamma(L)^* & \Gamma(L) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma(L)^*, & \Gamma(L)^*, & \cdots & \Gamma(L) \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \Gamma(L), & \Gamma(L) & \cdots & \Gamma(L) \\ \Gamma(L)^* & \Gamma(L) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma(L)^*, & \Gamma(L)^*, & \cdots & \Gamma(L) \end{pmatrix}} \right\} p$$

p

$$\oplus (B_{p,g_1}) \oplus (B_{p,g_2}) \oplus \cdots \oplus (B_{p,g_\mu})$$

ここで, $*$ は転置行列, $\oplus$ は対角和, B_{p,g_i} は (p, g_i) 型 torus link の Seifert 行列を表す.

系 さらに L, L' を共に knot とする. L, L' の Alexander polynomial を各々 $\Delta_L, \Delta_{L'}$ とすると, 次の式が成立する. $g = g_1$ とする.

$$\Delta_{L'}(t) = \Delta_L(t^p) \frac{(t^{pg} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^g - 1)}$$

§2. 記号及び規約

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad \partial D^2 = S^1,$$

$$\varphi_{p,g,i} : S^1 \rightarrow D^2 \times S^1,$$

$$\varphi_{p,g,i}(z) = \left(\frac{1}{2} z^{g/r} \zeta^i, \frac{1}{2} z^{p/r} \right), \quad (i=0, 1, \dots, r-1)$$

ここで $p, g \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, $r = \text{G.C.D.}(p, g)$, $\zeta = e^{2\pi i/r}$

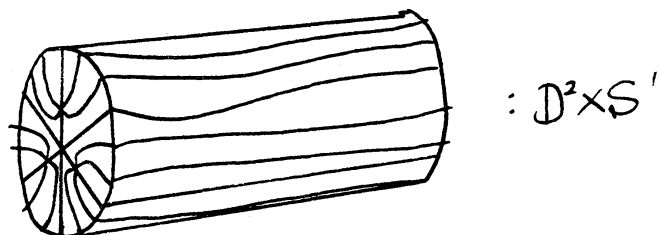
$\varphi_{p,g} = \bigcup_i \varphi_{p,g,i}$ を $D^2 \times S^1$ に於ける (p, g) 型

torus link と呼ぶ. $F_{p,g} : (D^2 \times S^1 - \text{Im } \varphi_{p,g}) \rightarrow S^1$

$$F_{p,g}(z, t) = \text{Arg} \frac{2^{p-g} z^p t^{-g} - 1}{2^{p-g} t^{-g} - 1} \quad (\text{Arg: 偏角})$$

すると, $F_{p,g}$ は fibration である. $p=3$ の場合を
図示すると,

右図の如くとなる.



$$L = \bigcup_i K_i, \quad K_i : S^1 \rightarrow S^3, \quad (i=1, 2, \dots, \mu) :$$

μ -components link, $N = \bigcup N_i$,

$N_i : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ を L の正則近傍で

$K_i(S^1) = N_i(0 \times S^1)$ なるものとする.

定義. $T = (p_1, g_1; p_2, g_2; \dots; p_\mu, g_\mu) \in \mathbb{Z}^{2\mu}$,

$p_1, p_2, \dots, p_\mu > 0$, さらに $N_i(1 \times S^1)$ が K_i の
longitudes であるとする. ($i=1, 2, \dots, \mu$) このとき,

$L' = \bigcup N_i \circ \varphi_{p_i, g_i}$ を L の T -型の cable
link と云う.

§3. 定理の証明

定理1の証. 仮定より,

$$R_i = g_i - \sum_{j \neq i} \text{lk}(K_i, K_j) \neq 0$$

$\pi: S^3 - \text{Im } L \rightarrow S^1$ を仮定により存在する fibration, とすると, L' は $\mathcal{U}_k(N_i(1 \times S^1), K_i)$ を適当に取ることにより, $L' = \bigcup N_i \circ \varphi_{p_i, k_i}$ の様にも表わすことが出来る. ここで 2つの fibration:

$g_p \circ \pi \circ N_i|_{\partial D^2 \times S^1}$ と $F_{p_i, k_i}|_{\partial D^2 \times S^1}$ は $(g_p(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^p)$, compatible であるから最初から一致していたものと考えて良い. これらをつなぎ合わせることによって L' の fibration を得る. Q.E.D.

定理 2 の証明 S を L の Seifert surface, $S_0 = \mathcal{U}(S - \text{Im } N)$, $S_i (i=1, 2, \dots, p)$ を S_0 の small deformations とする. (一の向きにより自然な順番にとる) これらは $\mathcal{U}(S^3 - \text{Im } N)$ の中にあり, かつ 互いに disjoint とする. さらに

$$\partial \left(\bigcup_{i=1}^{\mu} N_i(F_{p, g_i}^{-1}(1)) \right) = \bigcup_{j=1}^p \partial S_j$$

と仮定して良い. すると

$$S' = \left(\bigcup_{i=1}^{\mu} N_i(F_{p, g_i}^{-1}(1)) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^p S_j \right)$$

は L' の Seifert surface となる.

$$M_{1i} = H_1(S_i), (i=1, 2, \dots, p)$$

$$M_{2i} = H_1(N_i(F_{p, g_i}^{-1}(1))), (i=1, 2, \dots, \mu) \text{ とする.}$$

但しホモロジーは全て $\mathbb{Z}$ 係数とする。すると、

$$H_1(S') = (\oplus_{i=1}^p M_{1i}) \oplus (\oplus_{i=1}^m M_{2i}),$$

$$\langle M_{1i}, M_{2j} \rangle = 0 \quad (\forall i, j), \quad \langle M_{2i}, M_{2j} \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$
となる。但し、 $\langle x, y \rangle = \text{lk}(x, z^+(y))$, z^+ は + 方向への押出しとする。さらに $\langle, \rangle$ の意味を考えることにより、 $\langle M_{1i}, M_{1j} \rangle$ に対する関係行列は、
 $i \leq j$ のとき $\Gamma(L)$, $i > j$ のとき $\Gamma(L)^*$ と同一視される。但し $\Gamma(L)$ は L の Seifert 行列, $\Gamma(L)^*$ はその転置を表わす。最後に $\langle M_{2i}, M_{2i} \rangle$ の部分であるが、これは knot K_i が trivial な位置にあるとしても、その incident 行列は不変であるから (p, g_i) -型 torus link の Seifert 行列と一致する。 **Q.E.D.**

系の証明は初等的な計算であるから省略する。

§4. 応用

$f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ を原点に於いて既約な多項式, $S_\varepsilon^{2n-1} = \{p \in \mathbb{C}^n \mid |p| = \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$: 十分小), とする。
すると knot $S_\varepsilon^3 \cap \{z \in \mathbb{C}^2 \mid f(z) = 0\} \subset S^3$ は iterated torus knot となり、一般には torus knot とならない。定理 1 により、この knot K の Seifert 行列は reducible だから、 $K' = \{z \in \mathbb{C}^4 \mid f(z_1, z_2) + z_3^2 + z_4^2 = 0\} \cap S^7$ についてもそうで

ある. これは A'Campo の問題 に対する否定的な例を与える.

References

1. N. A'Campo, Some Problems in Topology, Edited by M. Kato, Manifold Tokyo, 1973, p.421
2. Lê Dũng Tráng, Sur les noeuds algebraiques, *Compo. Math*; 25(1972) pp. 283~321
3. J. Stallings. On fibering certain 3-manifolds, *Topology of 3-manifolds*, Prentis-Hall, (1962) pp. 95~100
4. M. Yamamoto, Regular projections, and Seifert matrices of iterated torus knots, to appear

Note. 定理1は Simon により, 定理2は Hacon により (knot の場合) 独立に得られていることが最近わかった.

5. J. Simon *Proc. Amer. Math. Soc.* 57 (1976), 140~142