

L-fuzzy 論理

水本雅晴, 豊田順一, 田中幸吉

(大阪大学・基礎工学部・情報工学科)

あいまいな事柄を数量的に表わすために Zadeh [1] は fuzzy 集合なる理論を導入した (1965 年). それ以来, fuzzy 集合およびその応用, たとえば, パターン認識, fuzzy 論理, fuzzy 言語, fuzzy 位相空間, fuzzy 事象の確率, fuzzy オートマトンなどに関する研究が各方面で盛んに行なわれている.

fuzzy 集合に対する数学的な議論は通常の集合の場合のすなわち拡張として議論することができる. fuzzy 集合はある集合から区間 $[0, 1]$ への写像として定義されるが, $[0, 1]$ を $\{0, 1\}$ なる区間とすると fuzzy 集合は通常の集合となる. Goguen は単に $[0, 1]$ でなくもっと一般に半順序集合, 束な

どとすることにより L-fuzzy 集合なる概念を定式化し、興味深い種々の性質を導き出している[2]。

論理の分野では、(L-)fuzzy 集合に基づいて Marinos [3] は fuzzy 論理回路に対する基礎的な考察を行なっている。また、Goguen [4] は不正確な概念を表現するための論理 (L-fuzzy 論理) に関する理論的考察を行ない、2 値論理では表現できなかったある種のパラドックスが解決できることを示している。ここではこの Goguen による L-fuzzy 論理についてのあらましを紹介する。

1. L-Fuzzy 集合

まず準備として fuzzy 集合および L-fuzzy 集合について簡単に説明しておく。

(定義 1.1) L-fuzzy 集合 A とは、集合 $X = \{x\}$ から半順序集合 L (真理値集合と名付ける) への写像のことである。

すなわち

$$A: X \rightarrow L \quad (1.1)$$

値 $A(x)$ は命題 " $x \in A$ " の真理値を表わす。

ここで、もし $L = [0, 1]$ ならば L-fuzzy 集合 A は Zadeh

の定義した fuzzy 集合となり, さらに $L = \{0, 1\}$ ならば, A は通常の集合となる.

L -fuzzy 集合の演算は通常の集合の演算の拡張として, づぎのように定義することが出来る. A, B をそれぞれ $A: X \rightarrow L, B: Y \rightarrow L$ なる L -fuzzy 集合とすると

包含 $A \subseteq B \iff A(z) \leq B(z), z \in X \subseteq Y \quad (1.2)$

相等 $A = B \iff A(z) = B(z), z \in X = Y \quad (1.3)$

和 $A \cup B \iff A \cup B(z) = \begin{cases} A(z) & z \in X, z \notin Y \\ A(z) \vee B(z) & z \in X \cap Y \\ B(z) & z \notin X, z \in Y \end{cases} \quad (1.4)$

交わり $A \cap B \iff A \cap B(z) = A(z) \wedge B(z), z \in X \cap Y \quad (1.5)$

である. ただし, 演算 $\leq, \vee, \wedge$ はそれぞれ L における順序関係, 上限, 下限を表わす演算である.

ここで, $L = [0, 1]$ の場合, すなわち Zadeh による fuzzy 集合である場合, 演算 $\vee$ は $\max$ に, $\wedge$ は $\min$ となり, 補集合 $\bar{A}$ はづぎのように定義される.

補集合 $\bar{A} \iff \bar{A}(x) = 1 - A(x), x \in X \quad (1.6)$

L-fuzzy 関係 直積空間 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ における L-fuzzy 関係 とは, $X \times Y$ における L-fuzzy 集合 R のことで, つぎのように定義される

$$R: X \times Y \rightarrow L \quad (1.7)$$

もし $X = Y$ ならば, $X \times X$ における L-fuzzy 関係 $R \in X$ の上の L-fuzzy 関係という.

さらに一般に, 直積空間 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ における n 項 L-fuzzy 関係 とは, X における L-fuzzy 集合 R のことである. すなわち

$$R: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow L \quad (1.8)$$

L-fuzzy 関係において L を完備束半群, 完備分配束とすると, L-fuzzy 関係の 合成 (あるいは 積) はつぎのように表わされる. R_1, R_2 を X の上の, すなわち $X \times X \rightarrow L$ なる L-fuzzy 関係とすると, 合成 $R_1 R_2$ はつぎのようになる.

(1) L が完備束半群である場合:

$$R_1 R_2(x, z) = \bigvee_y R_1(x, y) * R_2(y, z) \quad (1.9)$$

ただし, $\vee, *$ はそれぞれ完備束半群 L における上限, 半群の演算である.

(2) L が完備分配束である場合:

$$R_1 R_2(x, z) = \bigvee_y R_1(x, y) \wedge R_2(y, z). \quad (1.10)$$

〔備考〕 完備束 L が, 演算 $*$ の下で単位元をもつ半群であり, かつ, つぎの分配律を満たすとき, L を 完備束半群 (complete lattice ordered semigroup) という.

$x, y, x_i, y_i \in L$ に対して

$$x * \bigvee_i y_i = \bigvee_i (x * y_i),$$

$$(\bigvee_i x_i) * y = \bigvee_i (x_i * y).$$

完備束半群 L において, $*$ を $\wedge$ に置きかえると, L は 完備分配束 (complete distributive lattice) となる.

簡単な例として, $L \in [0, 1]$ とし, $\vee$ を $\max$, $*$ を $\cdot$ (通常の掛算) とすると, 完備束半群となる. さらに, $\cdot$ のかわりに $\min$ を採用すると, 完備分配束となる.

L-fuzzy関係 R は, Zadeh による fuzzy 関係, すなわち

$$R: X \times X \rightarrow [0, 1] \quad (1.11)$$

であると, fuzzy 関係 R_1, R_2 の合成は (1.9), (1.10) において, $\vee \rightarrow \sup$, $*$ $\rightarrow \cdot$ (積算), $\wedge \rightarrow \min$ と書き変えることにより, 次のように表わされる.

$$R_1 R_2(x, z) = \sup_y [R_1(x, y) \cdot R_2(y, z)] \quad (1.12)$$

$$R_1 R_2(x, z) = \sup_y \min [R_1(x, y), R_2(y, z)] \quad (1.13)$$

つぎに L-fuzzy 関係において成立する基本的な性質を述べてみよう. まず, L-fuzzy 関係の演算について述べよう.

L-fuzzy 関係は L-fuzzy 集合であるので, L-fuzzy 集合の場合と同様に L-fuzzy 関係の包含($\subseteq$), 和($\cup$), 交わり($\cap$)などがつぎのように定義される. $x, y \in X$ とすると

$$1. R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow R_1(x, y) \leq R_2(x, y) \quad (1.14)$$

$$2. R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow R_1 \cup R_2(x, y) = R_1(x, y) \vee R_2(x, y) \quad (1.15)$$

$$3. R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow R_1 \cap R_2(x, y) = R_1(x, y) \wedge R_2(x, y) \quad (1.16)$$

L-fuzzy 関係を Zadeh による fuzzy 関係とすると

$$4. \bar{R}_1 \Leftrightarrow \bar{R}_1(x, y) = 1 - R_1(x, y) \quad (1.17)$$

L-fuzzy関係の逆 L-fuzzy関係 R^c は

$$5. \quad R^c \Leftrightarrow R^c(y, x) = R(x, y) \quad (1.18)$$

さらにつぎのような基本的な L-fuzzy 関係が定義できる。
ただし, $I, 0$ はそれぞれ L における最大元, 最小元である。

$$6. \quad I \Leftrightarrow I(x, y) = \begin{cases} I & \dots x=y \\ 0 & \dots x \neq y \end{cases} \quad (1.19)$$

$$7. \quad 0 \Leftrightarrow 0(x, y) = 0 \quad (1.20)$$

$$8. \quad E \Leftrightarrow E(x, y) = I \quad (1.21)$$

これより L-fuzzy 関係に対して, つぎのような基本的な性質が導かれる。

$$(a) \quad (R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3) \quad (1.22)$$

$$(b) \quad IR = RI = R$$

$$OR = RO = 0$$

$$ER = RE = E$$

(1.23)

$$(c) \quad S \subseteq T \text{ ならば}$$

$$RS \subseteq RT$$

$$SR \subseteq TR$$

(1.24)

$$(d) \quad R(\bigcup_i R_i) = \bigcup_i (R R_i) \quad (1.25)$$

$$(\bigcup_i R_i) R = \bigcup_i (R_i R)$$

$$(e) \quad R(\bigcap_i R_i) \subseteq \bigcap_i (R R_i) \quad (1.26)$$

$$(\bigcap_i R_i) R \subseteq \bigcap_i (R_i R)$$

$$(f) \quad (R_1 R_2)^c = R_2^c R_1^c \quad (1.27)$$

$$(g) \quad (\bigcup_i R_i)^c = \bigcap_i R_i^c \quad (1.28)$$

$$(\bigcap_i R_i)^c = \bigcup_i R_i^c$$

$$(h) \quad (R^c)^c = R \quad (1.29)$$

X 上の L -fuzzy 関係 R が 対称的 (symmetric) であるとは,

$$R = R^c, \text{ すなわち } R(x, y) = R(y, x), x, y \in X$$

となることである. R が 反射的 (reflexive) であるとは

$$R \supseteq I, \text{ すなわち } R(x, x) = I, x \in X$$

となることである. R が 推移的 (transitive) であるとは

$$RR \subseteq R, \text{ すなわち } \bigvee_z R(x, z) * R(z, y) \leq R(x, y)$$

となることである.

2. L-fuzzy 論理

通常の2値論理においては、真、偽いずれかがまえてきまっているものだけに限定するものである。しかし、実際には真、偽だけでは片付けられない命題が沢山ある。たとえば“ x is short”という命題は真、偽だけでは論じられない。このような正しい命題を取り扱うには fuzzy 集合、もっと一般には L-fuzzy 集合の概念が役立つ。

2値論理においては、命題 $P(x)$ は、 $X=\{x\}$ を定義域とし、 $\{0,1\}$ を値域（すなわち、偽=0, 真=1）とする1変数関数で表わされる。これを1変数の述語と呼んでいる。さらに一般に直積 $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ 上で定義され、値域として $\{0,1\}$ を持つ関数 $P: X^n \rightarrow \{0,1\}$ を n 変数の述語、または n 項関係ともいう。

この2値論理における n 変数の述語の値域 $\{0,1\}$ をある半順序集合 L に置きかえると、つきのように n 変数の L-fuzzy 述語が定義できる。

(定義2.1) n 変数の L-fuzzy 述語 (簡単に n 項 L-述語ともいう) とは、 L をある半順序集合とすると、

$$P: X^n \rightarrow L \quad (2.1)$$

はる関数である。

これより、1項L-述語はX上のL-fuzzy集合となり、
2項L-述語はL-fuzzy関係となる。

(注) $L=[0,1]$ の場合、すなわち Zadeh による fuzzy 集合の場合、 $[0,1]$ を I とおき、 n 項L-述語を n 項I-述語 ということがある。

[例] "x is short" という命題は1項I-述語、すなわち fuzzy 集合 S で表わされる。また、"x looks like y" という命題は2項I-述語、すなわち fuzzy 関係 R で表わされる。この命題 S, R を用いて命題 P "being short and looking like x" を考えよう。この場合、 $P(y)$ は $P(y) = S(y) \wedge R(x, y)$ と表わすことができる。ここで " $\wedge$ " は "and" をモデル化したもので、値 $S(y)$ と $R(x, y)$ の小さい方を取るものとする。同様に " $\vee$ " は " $\vee$ " で表わすことができる。しかし、この例においては shortness と looks like とは相関関係があるので $\wedge$ の代わりに掛算 $\cdot$ を採用した方がよいであろう。すなわち $P(y) = S(y) \cdot R(x, y)$ 。
一般に言語の記述の場合、"and" を表わすのには $\wedge$ よりも $\cdot$ を使った方がいよいように思われる。掛算の場合

$$a \cdot b \leq a \wedge b$$

が成立し、この場合 " $\vee$ " は双対的に

$$a \hat{\cdot} b = 1 - (1-a)(1-b) = a + b - a \cdot b$$

と表わされる。明らかに

$$a \hat{\cdot} b \geq a \vee b$$

となる。

次に命題 K "looking like a man who lives near x " を考えてみよう。"lives near" は fuzzy 関係 N によって表わされているものとする。すると命題 $K(y)$ は fuzzy 関係の合成 (式 (1.12)) を使うことにより $RN(y, x)$ で表わされる。すなわち

$$RN(y, x) = \bigvee_{z \in X} R(y, z) \cdot N(z, x)$$

2つの1項J-述語を1つの2項J-述語に変換する演算 π を導入することが出来る。 A, B を1項J-述語とすると $(A \pi B)(x, y) = A(x) \wedge B(y)$ なる2項J-述語に変換出来る。たとえば, B を " x is bald man " なる命題とすると, 命題 " x is short and y is bald " は $S \pi B(x, y)$ で表わされる。演算 π は種々の応用に使えり。もし, I を " y is man " なる述語とすると, $B \pi I(x, y)$ は $B(x)$, すなわち " x is bald " となる。

次に命題 Q "being short and looking like a bald man who lives near x " なる命題が与えられているものとする。すると命題 $Q(y)$ は

$$S(y) \wedge [(R \wedge (B \pi I)) N(y, x)]$$

と表わされる。特に, $R \wedge (B \pi I)(y, z) = R(y, z) \wedge B(z)$

と表わされ, "looks like a bald man" を表わしている。

上式を書き直すと

$$S(y) \wedge \bigvee_{z \in X} [R(y, z) \wedge B(z)] \cdot N(z, x)$$

となる。分配律を使い, $\vee$ を $\sup$, $\wedge$ を $\min$ に書き変えると

$$\sup \{ \min \{ S(y), R(y, z) \cdot N(z, x), B(z) \cdot N(z, x) \} \mid z \in X \}$$

となる。これは "being short and looking like a short bald man who lives near x " なる命題を表わしている。これは先程の命題 Q と等値になっていることがわかる。

L-fuzzy論理における命題に対する和, 交わり, 包含などの演算は L-fuzzy集合の場合とまったく同じ様に定義される ((1.2)~(1.5) 参照)。真理値集合 L が完備束半群の場合, 含意, 否定などの演算はつきのようなになる。

L が 完備束半群 の場合, $a, b, x \in L$ とすると, 含意 $\rightarrow$ は

$$a \rightarrow b = \bigvee \{x \mid a * x \leq b\} \quad (2.2)$$

と定義される。[†] ここで $*$ は半群の演算である。

たとえば, $L = [0, 1]$, $\bigvee = \max$, $*$ $= \cdot$ (掛算) とすると

$$a \rightarrow b = \begin{cases} \frac{b}{a} & \dots a > b \\ 1 & \dots a \leq b \end{cases}$$

となる。

この場合, modus ponens は

$$a * (a \rightarrow b) \leq b$$

となる。

[†] L が 完備分配束 の場合, $*$ $= \wedge$ とおくことにより, 含意は

$$a \rightarrow b = \bigvee \{x \mid a \wedge x \leq b\}$$

となり, Brouwerian 論理の場合と同じになる。さらに L がブール代数の場合, よく知られた含意の公式

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$$

が導かれる。

含意 $\rightarrow$ に対して次の基本的な公式が導かれる。

((性質)) L を完備束半群とし, $a, b, c, x, a_i, b_i \in L$ とする
と

$$1^\circ \quad a * x \leq b \iff x \leq (a \rightarrow b)$$

$$2^\circ \quad a \rightarrow I = I, \quad 0 \rightarrow a = I, \quad I \rightarrow b = b$$

$$3^\circ \quad (a \rightarrow b) * (b \rightarrow c) \leq (a \rightarrow c)$$

$$4^\circ \quad (\bigvee_i a_i) \rightarrow b = \bigwedge_i (a_i \rightarrow b)$$

$$5^\circ \quad a \rightarrow (\bigwedge_i b_i) = \bigwedge_i (a \rightarrow b_i)$$

$$6^\circ \quad (a \rightarrow (a * b)) \geq b$$

$$7^\circ \quad (a * b) \rightarrow c = b \rightarrow (a \rightarrow c)$$

$$8^\circ \quad \bigvee_i (a_i \rightarrow b) \leq (\bigwedge_i a_i) \rightarrow b$$

$$9^\circ \quad \bigvee_i (a \rightarrow b_i) \leq a \rightarrow (\bigvee_i b_i)$$

$$10^\circ \quad a \geq b \text{ ならば,} \\ (a \rightarrow c) \leq (b \rightarrow c), \quad (c \rightarrow a) \geq (c \rightarrow b)$$

次に、否定は含意を用いることにより

$$a' = a \rightarrow 0 \tag{2.3}$$

と表わされる。すなわち $a' = \bigvee \{x \mid a * x = 0\}$ である。

$*$ が可換である場合、否定に関して次の公式が得られる。

((性質)) L が 交換完備束半群 である場合,

$$1^\circ \quad 0' = I, \quad I' = 0$$

$$2^\circ \quad a \leq b \Rightarrow a' \geq b'$$

$$3^\circ \quad a'' \geq a, \quad a'' = a'$$

$$4^\circ \quad x \leq a' \Leftrightarrow a * x = 0$$

$$5^\circ \quad (\bigvee_i a_i)' = \bigwedge_i a_i'$$

$$6^\circ \quad \bigvee_i a_i' \leq (\bigwedge_i a_i')$$

L -fuzzy 論理式 A に対する真理値を $[A]$ と表わすと, 和, 交わり, 含意, 否定, 積などは

$$[A \vee B] = [A] \vee [B] \quad (2.4)$$

$$[A \wedge B] = [A] \wedge [B] \quad (2.5)$$

$$[A \Rightarrow B] = [A] \rightarrow [B] \quad (2.6)$$

$$[\neg A] = N([A]) \quad (2.7)$$

$$[A * B] = [A] * [B] \quad (2.8)$$

$$A \leq B \Leftrightarrow [A] \leq [B] \quad (2.9)$$

$$A \equiv B \Leftrightarrow [A] = [B] \quad (2.10)$$

と表わされる. ここで含意, 否定は (2.2), (2.3) より定義される.

さらに、全称記号 $\forall$ 、存在記号 $\exists$ が論理式に含まれる場合、

$$[\exists x P] = \bigvee_{x \in X} [P(x)] \quad (2.11)$$

$$[\forall x P] = \bigwedge_{x \in X} [P(x)] \quad (2.12)$$

と定義される。

これより、次式が成立する。

$$(A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow C) \subseteq (A \Rightarrow C)$$

$$((\exists x A(x)) \Rightarrow B) \equiv \forall x (A(x) \Rightarrow B)$$

$$(A \Rightarrow \forall x B(x)) \equiv \forall x (A \Rightarrow B(x))$$

$$((A * B) \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$\exists x (A(x) \Rightarrow B) \subseteq (\forall x A(x)) \Rightarrow B$$

$$\exists x (A \Rightarrow B(x)) \subseteq A \Rightarrow \exists x B(x)$$

$$A \subseteq \neg \neg A, \quad \neg \neg \neg A \equiv \neg A$$

$$\neg (\forall x A(x)) \supseteq \exists x \neg A(x)$$

$$\neg (\exists x A(x)) \equiv \forall x \neg A(x)$$

また、 $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow A)$ なる記法を使うと
上式より、次式はトートロジーとなる。

$$((A \Rightarrow B) * (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

$$((\exists x A(x)) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x (A(x) \Rightarrow B)$$

$$(A \Rightarrow \forall x B(x)) \Leftrightarrow \forall x (A \Rightarrow B(x))$$

$$B \Rightarrow (A \Rightarrow (A * B))$$

$$((A * B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$(\exists x (A(x) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\forall x A(x)) \Rightarrow B)$$

$$(\exists x (A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow \exists x B(x))$$

$$A \Rightarrow \neg\neg A, \quad \neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A$$

$$(\exists x \neg A(x)) \Rightarrow \neg (\forall x A(x))$$

$$\neg (\forall x B(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg B(x)$$

参考文献

1. L.A. Zadeh: "Fuzzy sets", Inform. Control 8, 338-353 (1965).
2. J.A. Goguen: "L-fuzzy sets", J. Math. Anal. Appl., 18, 145-174 (1967)
3. P.N. Marinos: "Fuzzy logics and its application to switching systems", IEEE Trans. on Computers, c-18, 4, 343-348 (1969).
4. J.A. Goguen: "The logic of inexact concepts", Synthese, 19, 325-373 (1968).

5. G. Birkhoff : "Lattice Theory", AMS Collo. Pub., 25, Providence, R.I., 1948.
6. 水本, 豊田, 田中 : "Fuzzy 代数", 京大数解研究所講究録 81, 多価論理およびその応用研究会報告集, (DP 45-03).
7. M. Mizumoto, T. Toyoda, and K. Tanaka : "General formulation of formal grammars", Information Sciences (to appear).