

## E-cycle 付き DS-diagram の変形

神戸大 教養 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

東洋大 工 山下正勝 (Masakatsu Yamashita)

2次元球面  $S^2$  上に描かれた connected 3-regular graph について考える. このグラフの頂点, 辺, 面に,

- (0) 頂点は 4 点ずつ同じラベルがついている,
- (1) 辺は 3 本ずつ同じラベルがついている,
- (2) 面は 2 枚ずつ同じラベルがついている

ようにラベルがついているものを **DS-diagram** という. DS-diagram の頂点, 辺, 面に対してそのラベルを  $[\ ]$  であらわす. たとえば, 辺  $\varepsilon$  に付いたラベルは  $[\varepsilon]$  である.

DS-diagram 上の辺を次々につないで得られる loop (= simple closed curve) は  $S^2$  を 2 つの半球  $S^+$  と  $S^-$  に分ける. いまそのような loop を  $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  とする. すなわち, 各  $\varepsilon_i$  は DS-diagram 上の辺であり,  $S^2 = \dot{S}^+ \cup \dot{S}^-$ ,  $S^+ \cap S^- = E$  である.  $E$  が DS-diagram の **E-cycle** であるとは

- (1)  $i \neq j$  ならば  $[\varepsilon_i] \neq [\varepsilon_j]$ ,
  - (2)  $S^*(\# = +, -)$  上の 2 つの面  $\alpha, \beta$  に対して,  $\alpha \neq \beta$  ならば  $[\alpha] \neq [\beta]$
- が成り立つことである.

E-cycle 付き DS-diagram については

[1] Ikeda, H., DS-diagrams with E-cycles, Kobe J. Math., 3(1986), 103-112. で詳しく論じてある. 我々の "E-cycle 付き DS-diagram の変形" の議論のために, E-cycle の性質を簡単に列挙しておく.

(P 1) DS-diagram の任意の辺を  $\sigma$  とすれば, ラベル  $[\sigma]$  を持つ辺は 3 つある. 1 つは E-cycle 上に, 1 つは  $S^+$  内に, 1 つは  $S^-$  内にある.

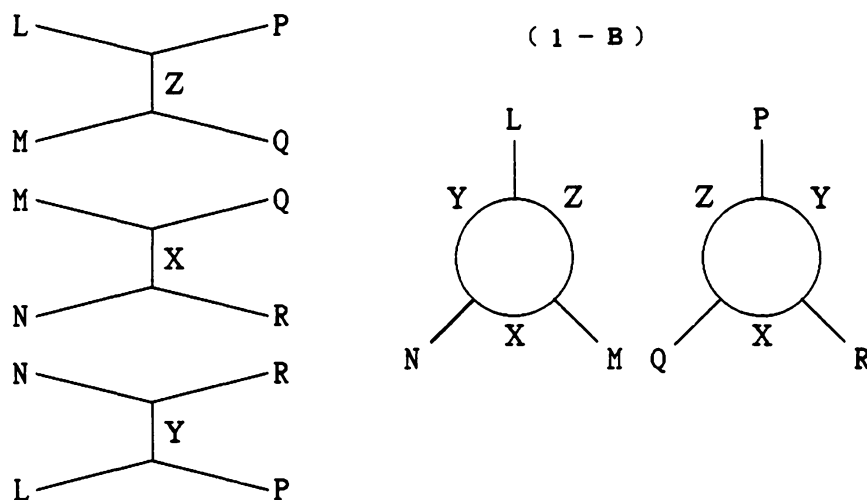
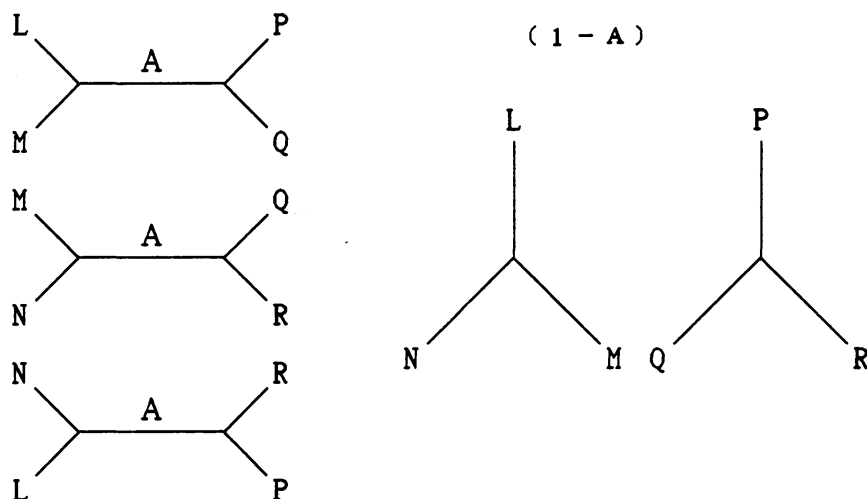
(P 2) DS-diagram の任意の頂点を  $v$  とすれば, ラベル  $[v]$  を持つ頂点は 4 つある. 2 つは E-cycle 上に, 1 つは  $S^+$  内に, 1 つは  $S^-$  内にある.

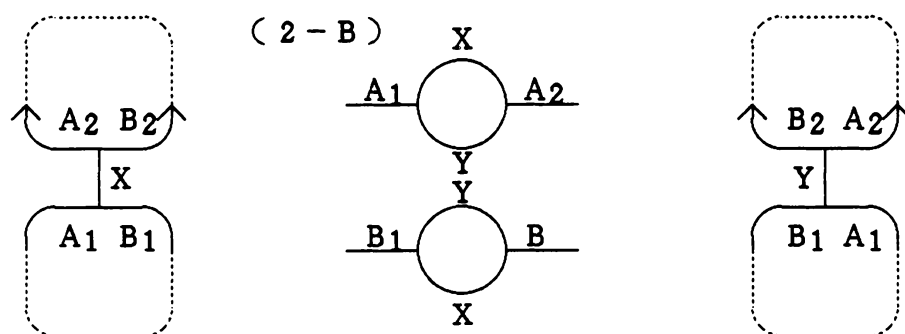
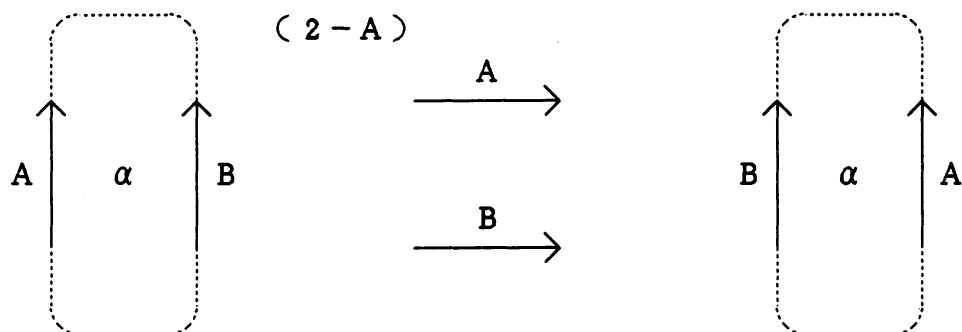
DS-diagram 上の loop  $E$  が E-cycle であるか否かの判定条件として次の定理は便利である.

定理 0 [1].  $S^2 = S^+ \cup S^-$ ,  $\dot{S}^+ \cap \dot{S}^- = E$  で,  $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in S^* (\# = +, -)$  なる 2-cell  $\alpha, \beta$  に対しては  $[\alpha] \neq [\beta]$  であるような loop  $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  に対して, 次の (i), (ii) は同値である:

- (i)  $i \neq j$  ならば  $[\varepsilon_i] \neq [\varepsilon_j]$ .
- (ii) DS-diagram の辺の個数は  $2n$  個.

勝手な DS-diagram は E-cycle を持つとは限らないが, closed 3-manifold を考えるにあたっては E-cycle 付き DS-diagram を調べるだけで十分である (石井一平氏の結果). そこで我々は E-cycle 付き DS-diagram を, 他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変形について調べてみた. もちろん, 対応する closed 3-manifold の位相型を変えない変形についてである. 次の四種 (正逆を区別しなければ二種) の変形が基本的である.



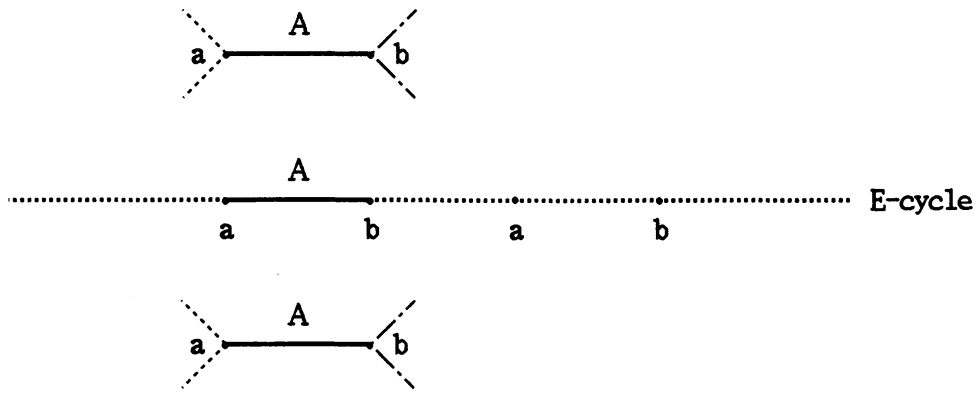


**定義**  $(1-A) \Rightarrow (1-B)$  を **type  $I^+$  の変形**,  
 $(1-B) \Rightarrow (1-A)$  を **type  $I^-$  の変形**,  
 $(2-A) \Rightarrow (2-B)$  を **type  $II^+$  の変形**,  
 $(2-B) \Rightarrow (2-A)$  を **type  $II^-$  の変形**  
 という.  $I^+, I^-, II^+, II^-$  を総称して **初等 DS-変形** という.

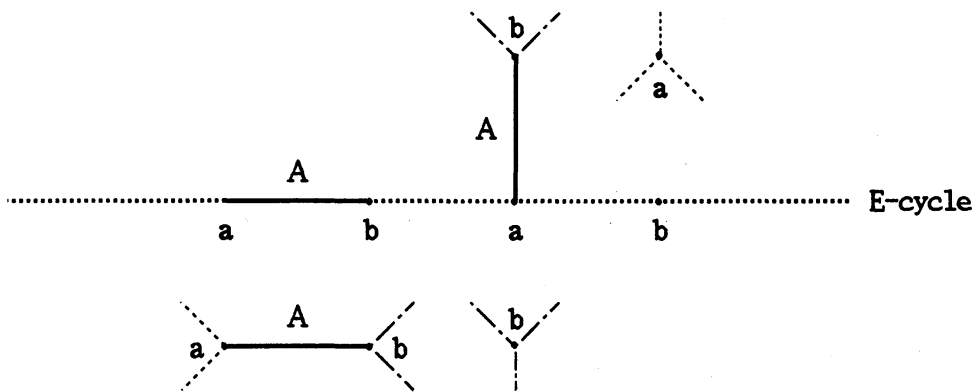
**定理 1** type  $I^+$  の変形は E-cycle 付き DS-diagram を E-cycle 付き DS-diagram に移す変形である.

**証明** 図 (1-A) について考える. ラベル A の辺は 3 つある. 一つは E-cycle 上に, 一つは  $S^+$  内に, 一つは  $S^-$  内にある. E-cycle 上にない辺を  $A^* \in S_\pm$  ( $\# = +, -$ ) とする.  $A^* \in S^*$  ( $\# = +, -$ ) と E-cycle との共通部分は  $\emptyset$  であるか一点である. したがって辺  $A^+, A^-$  と E-cycle との交点の組は  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  の 4 組である.  $(0, 1)$  と  $(1, 0)$  は  $A^+$  と  $A^-$  の立場をいれかえただけだから, 結局次の (3-1), (3-2), (3-3) の 3 つの場合について示せばよい.

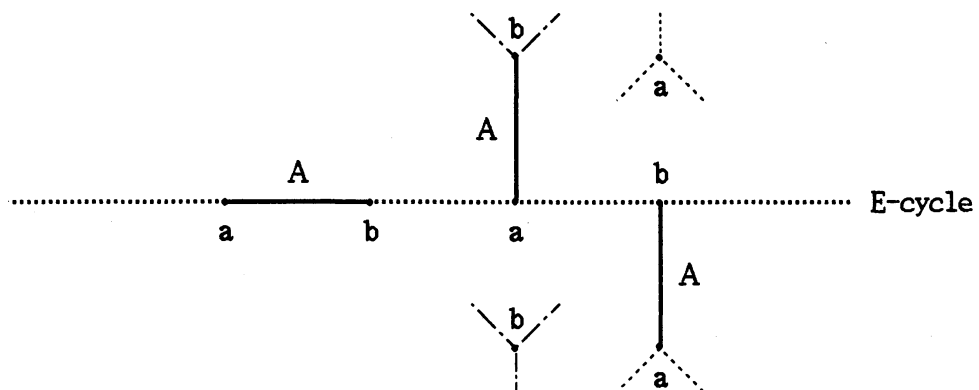
( 3 - 1 )



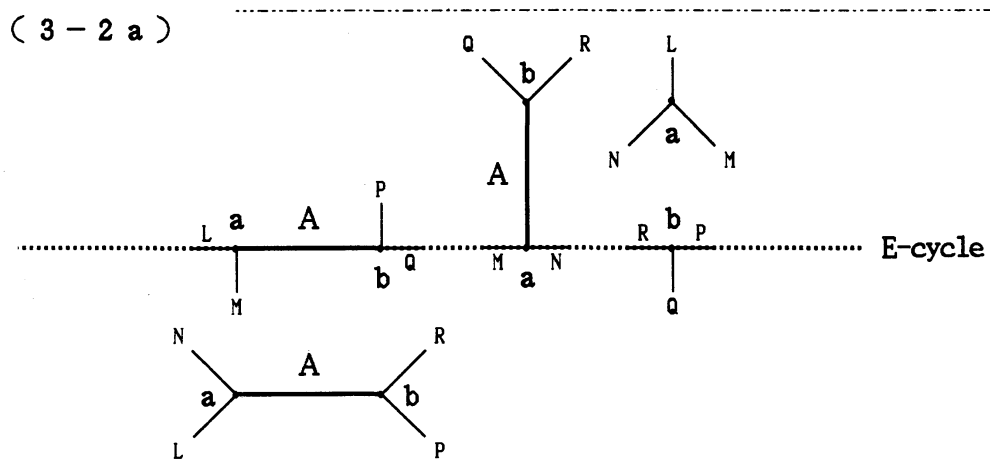
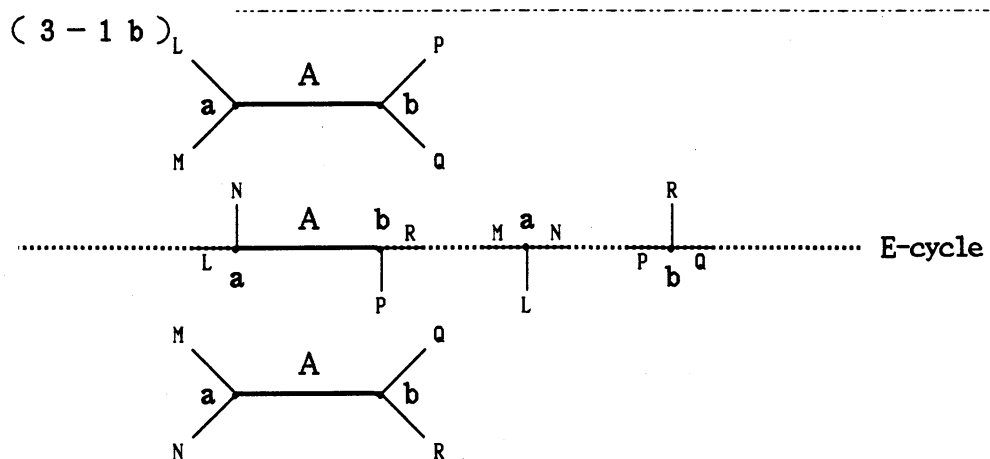
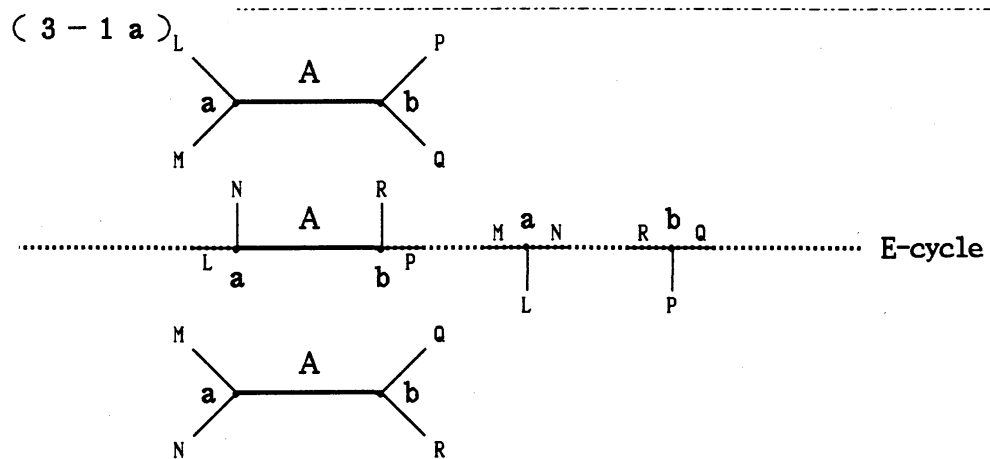
( 3 - 2 )



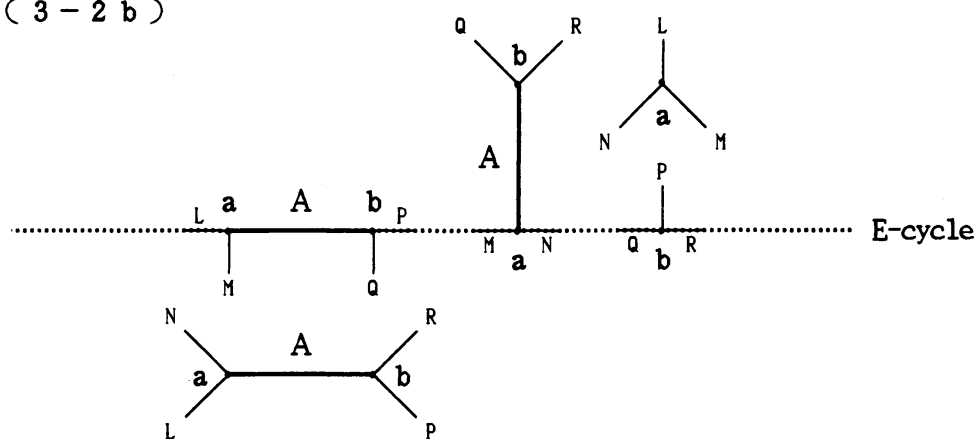
( 3 - 3 )



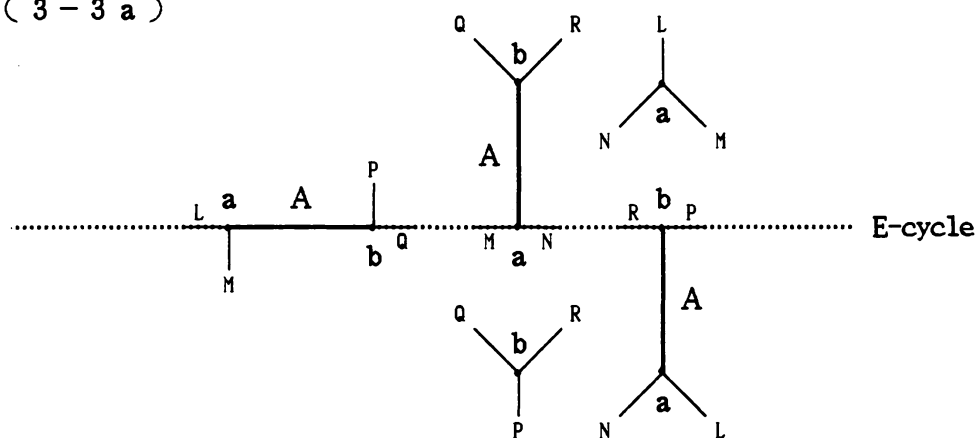
(3-1)~(3-3)での頂点  $a$ ,  $b$  の近くの様子は次の(3-1a)~(3-3a)のようになる.



( 3 - 2 b )

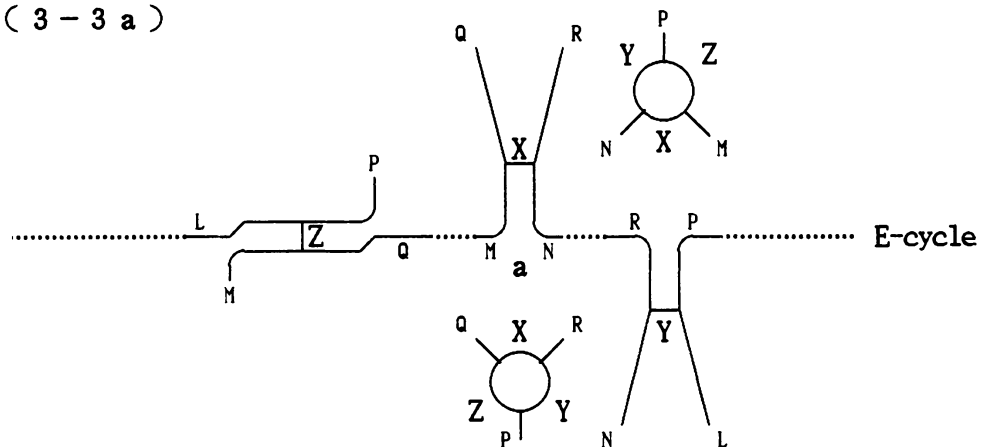


( 3 - 3 a )

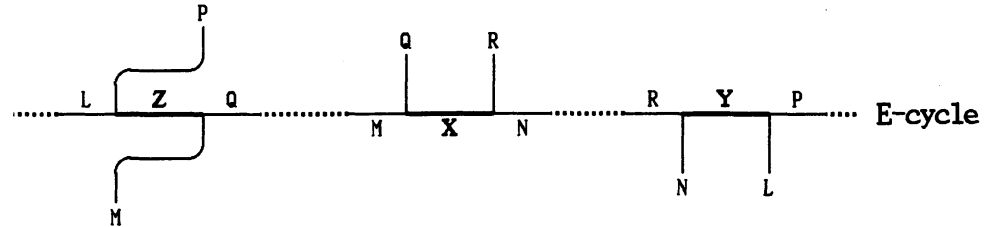


たとえば, (3-3a) に type  $I^+$  の変形を適用すれば,

( 3 - 3 a )

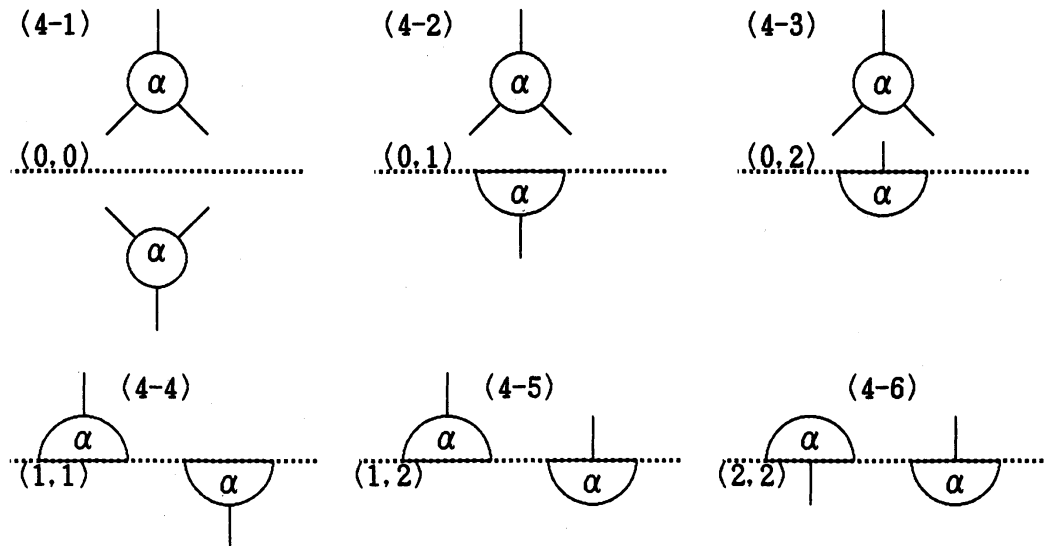


が得られる. 元の E-cycle の付近を整理して描き直せば,



となる. そのとき元の E-cycle  $\dots LAQ \dots MN \dots RP \dots$  から新たに得られた loop  $\dots LZQ \dots MXN \dots RYP \dots$  は増えた頂点の関係から E-cycle であることが分かる. 他の場合についても同じようにして, E-cycle を保つ変形であることが分かる. ■

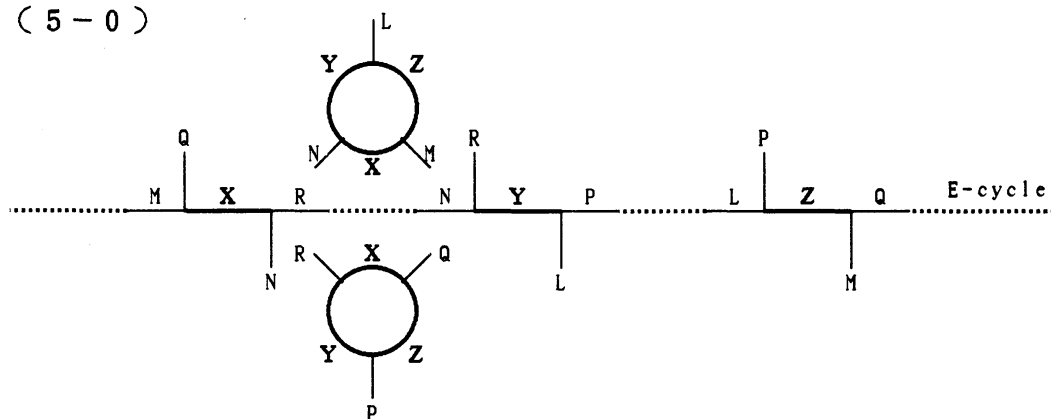
次に type I<sup>-</sup>の変形について調べてみる. まず I<sup>-</sup>-変形をほどこすべき 3 辺形を捜す. いまその 3 辺形のラベルを  $\alpha$  とする. このラベルの 3 辺形の一方は  $S^+$  側にあり, 他方は  $S^-$  側にある. 3 辺形が E-cycle と頂点だけで交わることはない (3-regular の条件に反するから). したがって, 3 辺形と E-cycle の共通部分は  $\emptyset$  であるか, 1 辺か 2 辺かの何れかである. 3 辺形と E-cycle の共通部分の辺の数の組  $(*, *)$ ,  $*=0, 1, 2$ , により次の図のような 6 通りの場合が考えられる.



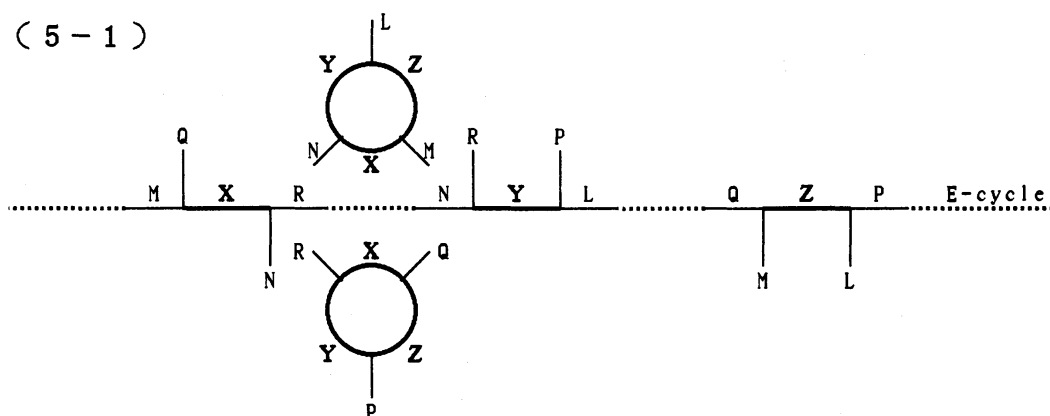
しかしながら, E-cycle 上には同じラベルの辺は 1 本しかないことから (4-6) の場合は決して起こらない.

(4-1)~(4-5) についてその頂点の近くの様子を調べると, 次の (5-0)~(5-5) が考えられる. (4-1) からは (5-0), (5-1) の 2 つの場合が起こる.  $k=2, 3, 4, 5$  に対しては, (4- $k$ ) から (5- $k$ ) が必然的に定まる.

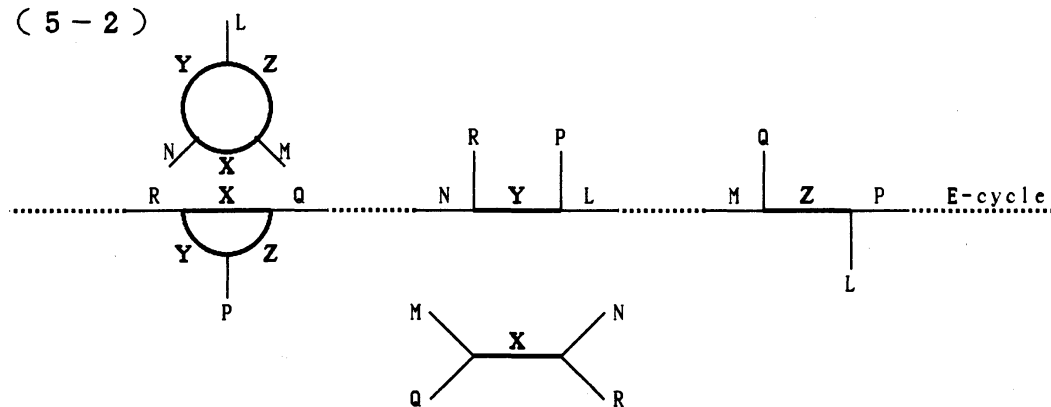
(5-0)



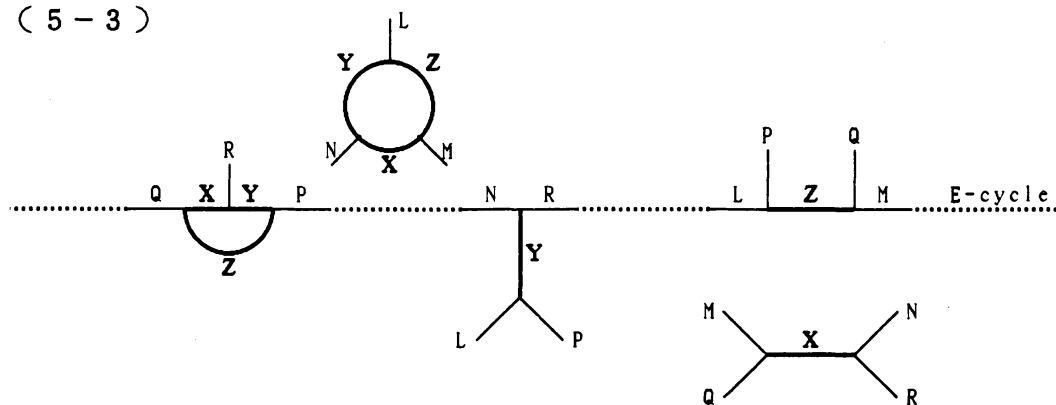
(5-1)



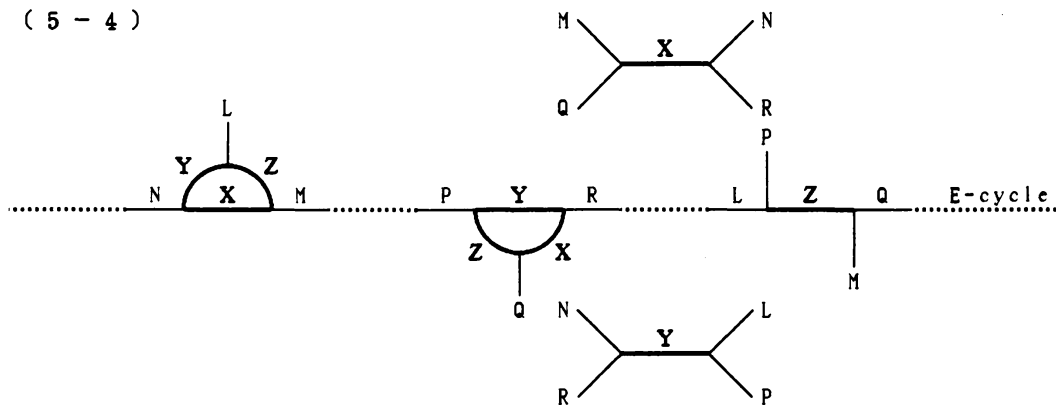
(5-2)



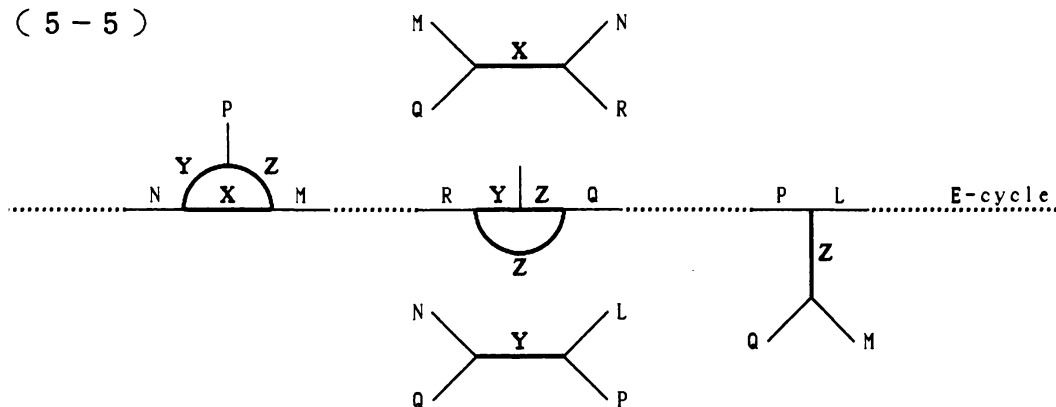
( 5 - 3 )



( 5 - 4 )



( 5 - 5 )



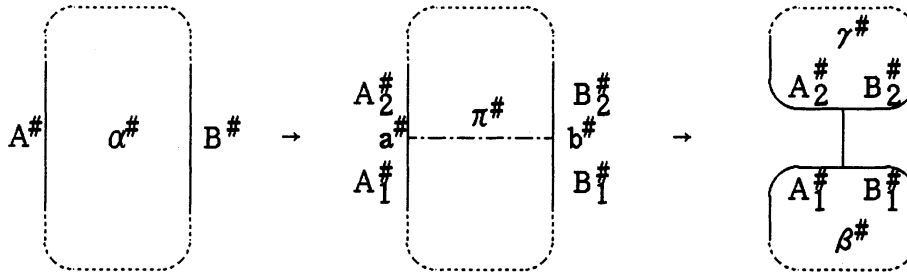
定理 2 (5-0) の場合を除けば type I<sup>-</sup>の変形は E-cycle 付き DS-diagram を他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変形である。

定理 1 のときと同様にして, E-cycle を保つことを示すことができる. ■

type II<sup>+</sup>の変形について, その作り方を説明する. DS-diagram 内の面は同じラベルのものがそれぞれ1つずつ  $S^+$ ,  $S^-$  内にあって対になっている. ラベル  $\alpha$  を持つ面の1組を  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  とする.  $\alpha^*$  ( $\# = +, -$ ) 内の simple arc  $\pi^*$  を考える.  $\pi^*$  の両端点を  $a^*$ ,  $b^*$  とする. 但し, 次の条件を満たすものとする:

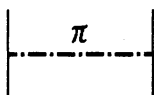
- (1)  $\dot{\pi}^* \subset \dot{\alpha}^*$ ,  $\dot{\pi}^* = \{a^*, b^*\} \subset \dot{\alpha}^*$ , 但し,  $\# = +, -$ .
- (2)  $\alpha^+$  と  $\alpha^-$  の同一視から induce されるラベル付けに対して,  
 $[\pi^+] = [\pi^-]$ ,  $[a^+] = [a^-]$ ,  $[b^+] = [b^-]$ ,  $a = b$ .

このときのラベル  $\pi$  を II<sup>+</sup> のための補助線 という. (2-A) の辺  $A^*$  から  $B^*$  へ補助線  $\pi^*$  を引いて (2-B) に変形することを  $\pi$  に関する type II<sup>+</sup> の変形 というのである. ここで, 上の (1), (2) を満たしているならば,  $A^* = B^*$  でもよい.



$\pi^*$  ( $\# = +, -$ ) の両端と E-cycle との交点は  $\emptyset$ , 1点, 2点のいずれかである. したがって,  $\pi^*$  ( $\# = +, -$ ) に関して次の3種類の場合が考えられる.

(6-1)



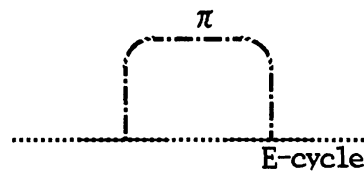
E-cycle

(6-2)



E-cycle

(6-3)

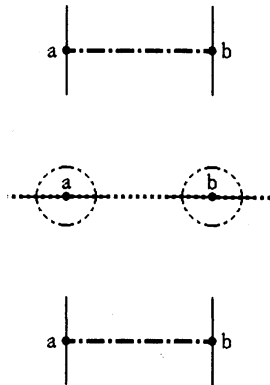


E-cycle

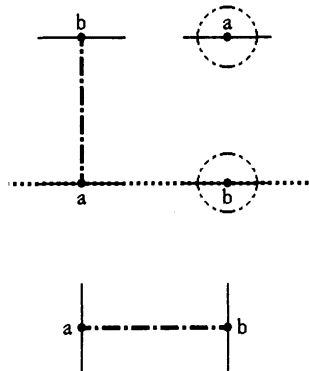
**定理 3**  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  のいずれもその両端が同時に E-cycle 上にないならば,  $\pi$  に関する type II<sup>+</sup> の変形は E-cycle 付き DS-diagram を他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変換である.

証明 仮定により, 次の3つの場合について考えればよいことになる.

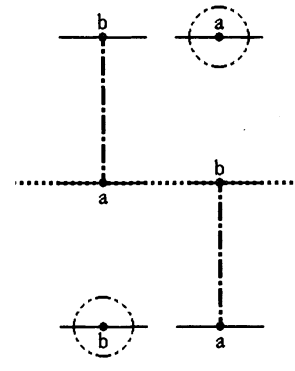
(7-1)



(7-2)

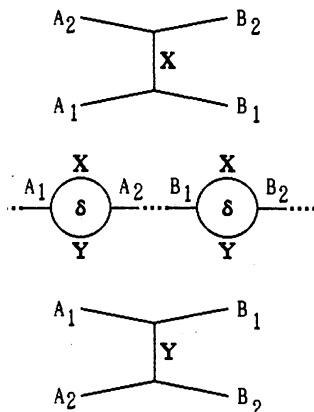


(7-3)

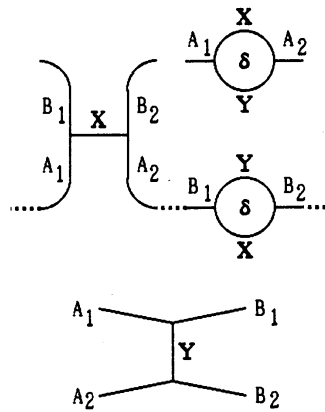


それぞれについて type II<sup>+</sup>の変形をほどこすと次のようになる(A, Bの向きや位置によってバリエーションがあるが本質的には下図だけ).

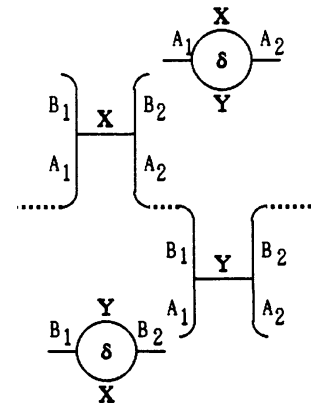
(8-1)



8-2)



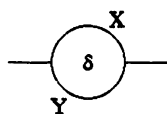
(8-3)



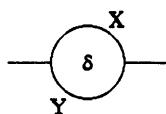
いずれの場合もはじめの DS-diagram の E-cycle を利用した loop:  
 $\dots A_1 X A_2 \dots B_1 Y B_2 \dots$   
 が新たな DS-diagram の E-cycle になっている. ■

type II<sup>-</sup>の変形を実行するにはラベル  $\delta$  の面の組 ( $\delta^+$ ,  $\delta^-$ ) を目標にすればよい.  
 $\# = +, -$  に対して,  $\delta^* = X^* Y^*$ ,  $[X^*] = X$ ,  $[Y^*] = Y$  とする.  $\delta^*$  と E-cycle  
 との交わりは  $\emptyset$  か一辺 ( $X^*$ ,  $Y^*$  のうちのどちらか) である. したがって, 次の 3 つの  
 場合が起こる.

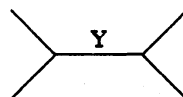
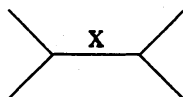
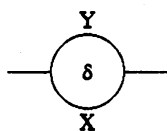
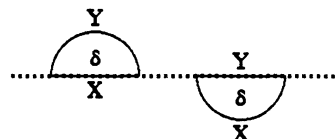
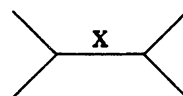
(9-1)



(9-2)

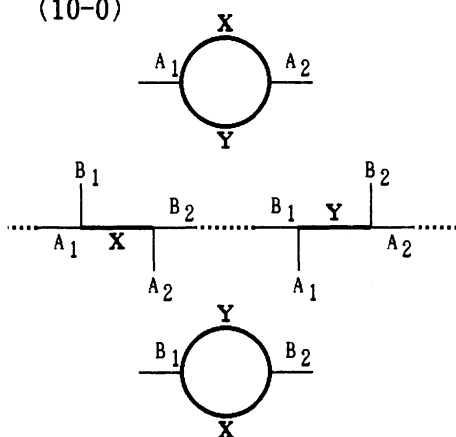


(9-3)

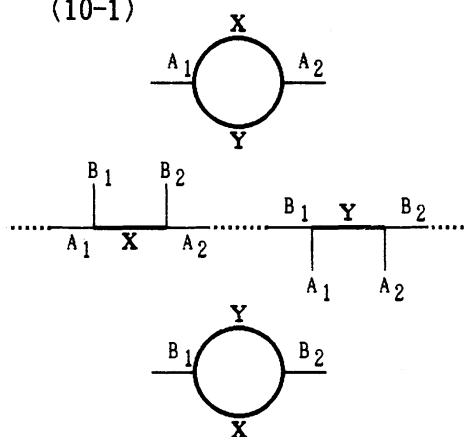


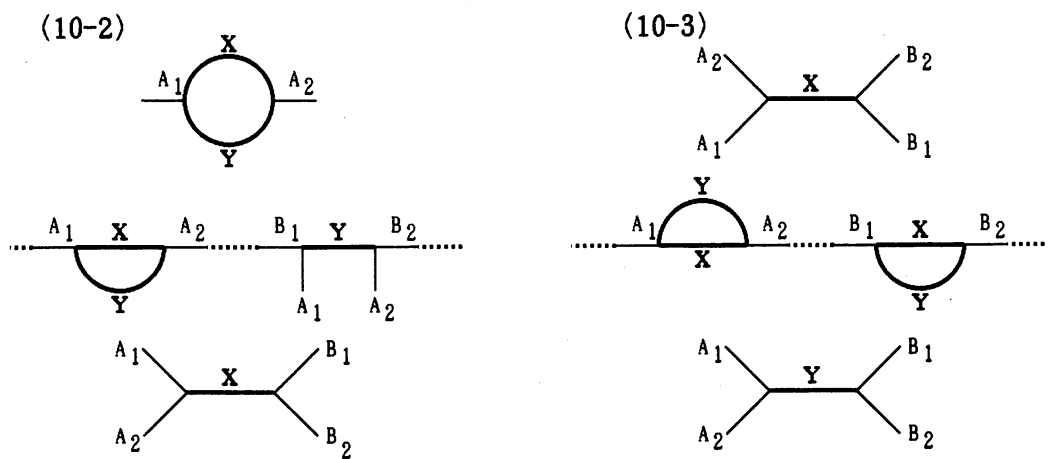
隣接した辺の記号まで書けば本質的に次の 4 つの場合が起こる.

(10-0)



(10-1)





**定理 4** (10-0) の場合を除けば type II<sup>-</sup> の変形は E-cycle 付き DS-diagram を他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変形である。

証明の方法はもはや明らかであろう。