

On knot groups

関西学院大学 前田 亨

1. Knot groups .

定義。finitely presented な群 G が次の 3 つの条件を満足するとき, knot group と呼ぶ。

- (1) $H_1(G) \cong \mathbb{Z}$, ($\mathbb{Z}$ は無限巡回群)
- (2) G の weight が 1 である,
- (3) $H_2(G) = 0$ 。

ここに、群 G の weight とは、normal closure が G となる部分集合全体の中での、最小濃度のことである。今、weight が 1 を決定する G の元 x を、 G の weighted element と呼ぶ。

H. Hopf [3] によれば、任意の自由群 F と任意の全射準同形写像 $\varphi : F \rightarrow G$ に対し、 $R = \text{Ker } \varphi$ とすれば、

$$H_2(G) = ([F, F] \cap R) / [F, R]$$

である。

この定義を *knot group* と呼ぶことにしたのは、次の M. A. Kervaire の proposition [4] による。

(1.1) S^n, S^{n+2} は $n, (n+2)$ 次元球面, $f: S^n \rightarrow S^{n+2}$ を可微分な埋め込みとすれば、全ての $n \geq 1$ に対し、 $G = \pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$ は、条件(1), (2), (3)を満たす。逆に、群 G が条件(1), (2), (3)を満たすならば、任意の $n \geq 3$ において、可微分な埋め込み $f: S^n \rightarrow S^{n+2}$ で、 $\pi_1(S^{n+2} - f(S^n)) \cong G$ を満足するものが存在する。

$n = 1, 2$ に対して、群 G の *knot group* $\pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$ としての実現には、 G が Wirtinger presentation をもつことが大きな意味をもつ。群 G が Wirtinger presentation をもつとは、 G が次の様な presentation で表わされることである。

$$G = \langle x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_n \rangle_\varphi$$

$$r_i = x_{k_i} u_i x_{l_i}^{-1} u_i^{-1},$$

$$1 \leq k_i, l_i \leq m, \quad (i = 1, \dots, n).$$

u_i は $x_1, \dots, x_m$ による語,

幾何学的には、(1.1) より、全ての *knot group* が Wirtinger presentation をもつことは明らかであるが、代数的証明が Yajima [9] に与えられている。すなわち、

(1.2) *knot group* G は、任意の weighed element x に

対し、 x を生成系に含む、Wirtinger presentation をもつ。

さらに、 G が Wirtinger presentation をもつならば、Yajima [7] の方法により、次の proposition を得る。

(1.3) 全ての knot group G に対し、 $\pi_1(R^4 - F) \cong G$ となる 2-dimensional connected closed orientable surface F が存在する。

ここで、Wirtinger presentation に対し、2つの補題を述べておく。

(1.4) 群 G が Wirtinger presentation をもち、条件 (1) を満足するならば、 G は、次の形の Wirtinger presentation をもつ。

$$G = \langle x_0, x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_p \rangle_{\varphi}$$

$$r_i = x_i u_i x_0^{-1} u_i^{-1} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$s_j = x_0 v_j x_0^{-1} v_j^{-1} \quad (j = 1, \dots, p),$$

u_i, v_j は $x_0, x_1, \dots, x_n$ による語である。

(1.5) 群 G が (1.4) の presentation をもつとき、 G が knot group であることと、 G の presentation が、

$$G = \langle x_0, x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_n, [x_i, s_j] \rangle_{\varphi}$$

(但し、 i, j は全てをとる必要はない。)
となる。

(1.4) の証明。

G の Wirtinger presentation に対し、Yajima [8], p.441, で用いられている diagram を考える。条件(1)を満たすことから、connected component は1である。よって、diagram に適当に、maximal tree をとり、一つの頂点を x_0 とすると、 x_0 から他の頂点 x_i への path で、tree を通るものが一つ決定される。それに対応する relator を r_i とする。さらに、maximal tree に属さない辺に対し、その辺だけが maximal tree に属さない x_0 から x_0 への closed path が唯一つ決まる。それに対し、 s_j をつくれば、明らかに (1.4) の結論を得る。

(1.5) の証明。

必要条件は、[9], p.997 により明らか。十分条件は、 G が (1.4) の presentation を満たすことから、条件(1), (2)は明らか。よって、条件(3)を示せばよい。今、 $F = \langle x_0, x_1, \dots, x_n : \quad \rangle$, $R = \text{Ker } \varphi$ (すなわち、 F における $\{r_i, [x_i, s_j]\}$ の normal closure) に対し、 $[F, R] \supseteq ([F, F] \cap R)$ を示す。 ω を $[F, F] \cap R$ の元とする。 $\omega \in R$ であるから、

$$\omega = \prod_{k=1}^m W_k t_k^{\epsilon_k} W_k^{-1}, \quad \epsilon_k = \pm 1, \quad t_k = r_i \text{ or } [r_i, s_j],$$

$$W_k \in F,$$

と書ける。ここで、 $t_k = [x_i, s_j]$ に関し、 k が小さい順に、 $k'_1, \dots, k'_c$, $t_k = r_i$ に対し、 $k''_1, \dots, k''_d$ とする。さらに、

$$U_u = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k'_1, \dots, k'_{u-1}}}^{k'_u-1} W_k t_k^{\epsilon_k} W_k^{-1}, \quad U_u^* = U_u W_{k'_u} t_{k'_u}^{\epsilon_{k'_u}} W_{k'_u}^{-1} U_u^{-1},$$

$$U = \prod_{u=1}^c U_u^*, \quad V = \prod_{v=1}^d W_{k''_v} t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}} W_{k''_v}^{-1},$$

とすれば、

$$\omega = U \cdot V.$$

仮定より、 $s_j \in R$ 。よって、 $[x_i, s_j] \in [F, R]$ 。故に $U \in [F, R]$ 。よって $V \in [F, R]$ を示せばよいことになる。

$\omega \in [F, F]$ であるから、各生成元 x_i に対し、 ω 中の index sum $\sigma_{x_i}(\omega) = 0$ である。ところが、 $\sigma_{x_i}(U) = 0$ ($i=1, \dots, n$) であるから、 $\sigma_{x_i}(V) = 0$ ($i=1, \dots, n$) を得る。よって、

$$\begin{aligned} \sigma_{x_i}(V) &= \sigma_{x_i} \left(\prod_{v=1}^d W_{k''_v} t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}} W_{k''_v}^{-1} \right) \\ &= \sum_{v=1}^d \sigma_{x_i}(t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

一方、 $\sigma_{x_i}(r_i) = 1$, $\sigma_{x_i}(r_j) = 0$ ($i \neq j$) であるから、 $t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}}$ が r_i であれば必ず $t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}} = r_i^{-1}$ となる v'' が存在する。よって、例えば、 $V = V' r_i V'' r_i^{-1} V'''$ ならば、 $V = (V' [r_i, V''] V'^{-1}) V' V'' V'''$ となる。 $[r_i, V''] \in [F, R]$ であるから、 $V' V'' V''' \in [F, R]$

を示すこととなり、 V に行なったと同様のことを考えれば、結論を得る。

2. Commutator subgroups.

G を knot group. $N = [G, G]$ とすれば、条件(1)より、 G は N の $\mathbb{Z}$ による splitting extension と見ることが出来る。そこで、いくらかのよく知られている群に対し、 $\mathbb{Z}$ からその群の自己同形群への準同形を考えることにより、その群を N としてもつ knot group の存在について連記しておく。

(2.1) $N = 1$, the trivial group.

N の $\mathbb{Z}$ による extension は $\mathbb{Z}$ だけであり、これは knot group.

(2.2) $N = \mathbb{Z}_m$, the cyclic group of order m .

m が偶数のとき、存在しない。(1), (2) を同時に満足できない)
 m が奇数のとき、存在する。

(2.3) $N = D_m = \langle a, b : a^m = 1, b^2 = 1, b^{-1} a b = a^{-1} \rangle$,
the dihedral group.

存在しない。($m = 1$ のとき、 $N = \mathbb{Z}_2$ 。 $m = 2$ のとき、(1), (2) を満足するものは存在するか、(3) を満足しない。 $m \geq 3$ のとき、(1) を満足しない。)

(2.4) $N = \langle a, b : a^{2m} = 1, b^2 = a^m, b^{-1} a b = a^{-1} \rangle$,
the dicyclic group.

$m = 1$ のとき、存在しない ($N = \mathbb{Z}_4$)。 $m = 2$ のとき、 N は quaternion group であり、存在する。事実、 S^4 中の twist spun knot として実現できる。 $m \geq 3$ のとき、存在しない (1) を満足しない)。

(2.5) $N = F_m$: the free group of rank n .

$m = 1$ のとき、存在しない (1) を満足しない)。 $m \geq 2$ のとき、少なくとも 1 つ存在する。

(2.6) $N =$ the free abelian group of rank m .

$m = 1$, 存在しない ($N =$ the free group of rank 1)。

$m = 2$ のとき、存在しない (1), (2) を満足するものは存在するが、(3) を満足しない。幾何学的証明は、M. A. Kervaire [4], p.117 の J. Milnor の例)。 $m \geq 3$ のとき、存在する (幾何学的証明は、S. E. Cappel and J. L. Shaneson [1] により与えられている)。

Yajima の proposition (1.2) の逆の問題、「群 G が条件 (1) を満たす Wirtinger presentation をもつならば、 $H_2(G)$ が消えるか。」は、まだ解けていない。上記の例において、(1), (2) を満たすが (3) を満たさない $N = D_4$ (Klein 4-group) と $N = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が反例の候補であったが、いずれも Wirtinger presentation をもたないことが示される。

3. Composition of knot groups.

knot group G の任意の weighted element x は、 $x \notin [G, G]$ であるから、 x により生成される G の部分群 $\langle x \rangle$ は、 Z に同形となる。よって、knot group G_1, G_2 , それらの weighted element x, y に対し、the free product with amalgamation

$$G = * (G_1, G_2, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \phi)$$

が定義できる。 ϕ は、 $\phi(x) = y$ で定義される $\langle x \rangle$ から $\langle y \rangle$ への同形写像である。ここで、 G_1, G_2 は G の部分群と見なす。便宜上、 $G = (G_1, x) \# (G_2, y)$ と記す。

(3.1) $(G_1, x) \# (G_2, y)$ は、knot group である。

証明。

(1.2), (1.4) より G_1, G_2 は、次の様な presentation をもつ。

$$G_1 = \langle x_0, x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_p \rangle_\varphi$$

$$G_2 = \langle y_0, y_1, \dots, y_n : R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_g \rangle_\psi$$

$$\varphi(x_0) = x, \quad \psi(y_0) = y,$$

$$r_i = x_i u_i x_0^{-1} u_i^{-1}, \quad s_j = x_0 v_j x_0^{-1} v_j^{-1},$$

$$R_k = y_k U_k y_0^{-1} U_k^{-1}, \quad S_l = y_0 V_l y_0^{-1} V_l^{-1}.$$

よって、 G は次の presentation をもつことになる。

$$G = \langle x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n :$$

$$r_1, \dots, r_m, R_1, \dots, R_n, x_0 = y_0,$$

$$s_1, \dots, s_p, S_1, \dots, S_q, \quad \rangle_{\xi},$$

$$\xi(x_u) = \varphi(x_u) \quad (u = 0, 1, \dots, m),$$

$$\xi(y_v) = \psi(y_v) \quad (v = 0, 1, \dots, n).$$

G_1, G_2 は knot group であるから、(1.5) より、

$$G_1 = \langle x_0, x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_m, [x_i, s_j] \rangle_{\varphi},$$

$$G_2 = \langle y_0, y_1, \dots, y_n : R_1, \dots, R_n, [y_k, S_l] \rangle_{\psi}$$

となる。但し、 i, j, k, l は全てをとる必要はない。よって、

$$G = \langle x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n :$$

$$r_1, \dots, r_m, R_1, \dots, R_n, x_0 = y_0,$$

$$[x_i, s_j], [y_k, S_l] \quad \rangle_{\xi}$$

$$= \langle x_0, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n :$$

$$r_1, \dots, r_m, R_1^*, \dots, R_n^*,$$

$$[x_i, s_j], [y_k^*, S_l^*] \quad \rangle_{\xi}.$$

ここに*のついたものは、その語の中の y_0 を全て x_0 で書き換えたものである。よって再び (1.5) より、 G は knot group である。

C. Mac Gordon [2] は、3つの S^4 中の twist-spun knot K_1, K_2, K_3 を構成し、それらの knot group は全て同形であるが、 $K_i \# K_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) の6つの knot group は全て同形

でないことを証明している。これは、 $(G_1, x) \# (G_2, y)$ が、 G_1, G_2 によるばかりか、 x, y の選び方にもよることを示す良い例といえる。その証明について述べておくことにする。

$$\textcircled{1} \quad G_1 = \langle X_1, Y_1 : X_1^2 = Y_1^3, (Y_1^{-1} X_1)^5 X_1 = X_1 (Y_1^{-1} X_1)^5, \\ (Y_1^{-1} X_1)^5 Y_1 = Y_1 (Y_1^{-1} X_1)^5 \rangle_{\varphi_1^*}$$

ここで、 $x_0 = Y_1^{-1} X_1, x_1 = X_1 Y_1^{-1}$ とおけば、次の Wirtinger presentation を得る。

$$G_1 = \langle x_0, x_1 : x_1 = (x_0 x_1) x_0 (x_0 x_1)^{-1}, \\ x_0 = (x_1^{-1} x_0^5 x_1) x_0 (x_1^{-1} x_0^5 x_1)^{-1} \rangle_{\varphi_1}$$

$$\textcircled{2} \quad G_2 = \langle X_2, Y_2 : X_2^3 = Y_2^5, (Y_2^2 X_2^{-1})^2 X_2 = X_2 (Y_2^2 X_2^{-1})^2, \\ (Y_2^2 X_2^{-1})^2 Y_2 = Y_2 (Y_2^2 X_2^{-1})^2 \rangle_{\varphi_2^*}$$

ここで、 $y_0 = Y_2^2 X_2^{-1}, y_1 = X_2 Y_2^{-3} X_2, y_2 = X_2^{-1} Y_2^2$ とおくと、

$$G_2 = \langle y_0, y_1, y_2 : y_1 = (y_2 y_0 y_1 y_2) y_0 (y_1 y_0 y_1 y_2)^{-1}, \\ y_2 = (y_1 y_2 y_0 y_1)^{-1} y_0 (y_1 y_2 y_0 y_1), \\ y_0 = ((y_2 y_0 y_1 y_2)^{-1} y_0^2 (y_2 y_0 y_1 y_2)) y_0 ((y_2 y_0 y_1 y_2)^{-1} y_0^2 (y_2 y_0 y_1 y_2))^{-1}, \\ y_0 = ((y_1 y_2 y_0 y_1)^{-1} y_0^2 (y_1 y_2 y_0 y_1)) y_0 ((y_1 y_2 y_0 y_1)^{-1} y_0^2 (y_1 y_2 y_0 y_1))^{-1} \rangle_{\varphi_2}$$

$$\textcircled{3} \quad G_3 = \langle X_3, Y_3 : X_3^5 = Y_3^2, (Y_3 X_3^{-2})^3 X_3 = X_3 (Y_3 X_3^{-2})^3, \\ (Y_3 X_3^{-2})^3 Y_3 = Y_3 (Y_3 X_3^{-2})^3 \rangle_{\varphi_3^*}$$

ここで、 $z_0 = Y_3 X_3^{-2}, z_1 = X_3^{-2} Y_3$ とおくと、

$$G_3 = \langle z_0, z_1 : z_1 = (z_1 z_0)^{-2} z_0 (z_1 z_0)^2,$$

$$z_0 = ((z_1 z_0 z_1) z_0^3 (z_1 z_0 z_1)^{-1}) z_0 ((z_1 z_0 z_1) z_0^3 (z_1 z_0 z_1)^{-1})^{-1} >_{\varphi_3}$$

これら3つのknot groupに対し、

$$G = \langle t, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 :$$

$$t^{-1} a_i t = a_i \ (i = 0, 1, \dots, 4)$$

$$a_0 a_2 = a_1, \ a_1 a_3 = a_2, \ a_2 a_4 = a_3,$$

$$a_3 a_0 = a_4, \ a_4 a_1 = a_0 \rangle_{\varphi}$$

を考えれば、例えば、次の写像 f_i は、 G_i から G への同形写像を induce する。

$$f_1 : (x_0, x_1) \longrightarrow (a_1 a_0^{-1} a_1^{-1} t, a_1^{-1} a_0 t),$$

$$f_2 : (y_0, y_1, y_2) \longrightarrow (a_0^{-2} a_1^{-1} t, a_2 a_0^{-2} a_1^{-1} t, a_3 a_0^{-2} a_1^{-1} t),$$

$$f_3 : (z_0, z_1) \longrightarrow (a_0^2 a_1^{-1} a_0 t, a_0^3 a_1^{-1} a_0 t)。$$

$x = \varphi f_1(x_0)$, $y = \varphi f_2(y_0)$, $z = \varphi f_3(z_0)$ とし、 $G_{11} = (G, x) \# (G, x)$, $G_{22} = (G, y) \# (G, y)$, $G_{33} = (G, z) \# (G, z)$, $G_{12} = (G, x) \# (G, y)$, $G_{23} = (G, y) \# (G, z)$, $G_{31} = (G, z) \# (G, x)$ とする。 G_1 に関する presentation から、 $x^5 \in C(G)$, $x \notin C(G)$ 。よって、 $\langle x \rangle \cap C(G) = \langle x^5 \rangle$, 同様に、 $\langle y \rangle \cap C(G) = \langle y^2 \rangle$, $\langle z \rangle \cap C(G) = \langle z^3 \rangle$ である。このことから、

$$C(G_{11}) = \langle x^5 \rangle, \ C(G_{12}) = \langle x^{10} \rangle = \langle y^{10} \rangle,$$

$$C(G_{22}) = \langle y^2 \rangle, \ C(G_{23}) = \langle y^6 \rangle = \langle z^6 \rangle,$$

$$C(G_{33}) = \langle z^3 \rangle, C(G_{31}) = \langle z^{15} \rangle = \langle x^{15} \rangle.$$

となる。これらの $H_1(G_{ij})$ での像が、全て異なることより G_{ij} は全て同形でないことが解る。

よって、knot group の composition には、weighted element の指定が必要である。knot group に対し、weighted element の影響まで含めた (G, x) の対で考えることとする。そこで、composition に対しても、 $(G_1, x) \# (G_2, y) = (G, z)$, $G = * (G_1, G_2, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \phi)$, $z = x = y$ と改めて考えなおすことにする。

$\mathcal{G} = \{ (G, x) \mid G \text{ は knot group, } x \text{ は } G \text{ の weighted element} \}$ において、knot group を考えることにしたのであるが、この $\mathcal{G}$ の元に対しては、次の様なものは同一視するのが自然であろう。すなわち、 $(G, x), (G', x') \in \mathcal{G}$ に対し、 G から G' への同形写像 f で、 $f(x) = x'$ となるものが存在するとき、 (G, x) と (G', x') は同値 $(G, x) \sim (G', x')$ とする。明らかにこれは、 $\mathcal{G}$ における同値関係である。 $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} / \sim$ とする。

$\mathcal{G}^*$ の元を $(G, [x])$ で記す。ここに G は、抽象群、 $[x]$ は、 G の自己同形写像によって x の像となり得る全ての G の元のつくる class である。例えば、 $[G, G]$ が可換ならば、

$H_1(G)$ の generator t 及び t^{-1} の G での原像は全て weighted element である。すなわち、 x を G の weighted element とすれば、 $x[G, G] \cup x^{-1}[G, G]$ が G の weighted element の全体となる。さらに、 x を $x[G, G]$ の任意の元へ、 $[G, G]$ の元は、同じ元へ対応をつければ、これは G の自己同形写像を induce するので、 $x[G, G] \subseteq [x]$ 、同様に、 $x^{-1}[G, G] \subseteq [x^{-1}]$ となり、 G の weighted element のつくる class は、高々 2 つとなる。これが 1 つとなる為の必要十分条件は、 x による G の内部自己同形写像を $[G, G]$ に制限したものを h とすれば、 $[G, G]$ の自己同形写像 f で、 $f h f^{-1} = h^{-1}$ を満足するものが存在することである。よって h の period が 1, 2 の場合には $f = h^{-1}$ とすることにより、weighted element の class は 1 つとなる。period が 1 となるのは恒等写像だけであるから、 h は内部自己同形写像。よって $[[G, G], [G, G]] = [G, G]$ でなければならず、これより、 $[G, G] = 1$ を得る。すなわち、 $G = \mathbb{Z}$ 。

(3.2) $(G_1, x) \sim (G'_1, x')$, $(G_2, y) \sim (G'_2, y')$ ならば $(G_1, x) \# (G_2, y) \sim (G'_1, x') \# (G'_2, y')$ 。

証明。

[5], p. 207 の Cor. 4.4.4. より明らか。

(3.2) より、 $(G_1, [x]), (G_2, [y]) \in \mathcal{G}^*$ に対し、 $(G_1, [x]) \# (G_2, [y])$ が induce される。

(3.3) $(G, [z]) = (G_1, [x]) \# (G_2, [y])$ ならば、
 $[G, G] = [G_1, G_1] * [G_2, G_2]$ 。

証明。

G_1, G_2 は G の部分群であるから、 $[G, G] \supseteq [G_i, G_i]$ ($i = 1, 2$)。また、[5], p. 201, Theorem 4.4 より、 $g \in G$ は $g = z^d \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_k$, d は整数, $\nu_i \neq 1$, $\nu_i \in [G_1, G_1]$ 又は $[G_2, G_2]$, ν_i, ν_{i+1} は同時に $[G_1, G_1]$ 又は $[G_2, G_2]$ に属さない、ように unique に書ける。一方、 $g \in [G, G]$ と、 $d = 0$ とは同値であるから、 $[G, G]$ の元は、その部分群 $[G_i, G_i]$ ($i = 1, 2$) の元の積として unique に表わせることになり結論を得る。

(3.3) より、次の 3 つの Corollary を得る。

(3.4) $(G, [z]) = (G_1, [x]) \# (G_2, [y])$ の L -polynomial は、 $(G_1, [x])$ と $(G_2, [y])$ の L -polynomial の積に等しい。

証明。群 K に対し、 $K' = [K, K]$, $K'' = [K', K']$ とすれば、

(3.3) より、 $G'/G'' = (G_1'/G_1'') \oplus (G_2'/G_2'')$ 。 G_1', G_2'

$\wedge$ の $H_1(G)$ の action は、 $G_i \wedge$ の $H_1(G_i)$ の action と同じ。
よって明らか。

(3.5) 全ての $(G, [x]) \in \mathcal{L}_j^*$ に対し、 $(G, [x]) \# (K, [y]) = (G, [x])$ であることと、 $(K, [y]) = (Z, [t])$ とは、同値である。

証明。

十分条件は明らか。必要条件を示す。 $(G, [x])$ として $(Z, [t])$ をとれば、仮定より、 $(Z, [t]) \# (K, [y]) = (Z, [t])$ 。
 $[Z, Z] = 1$ であるから、(3.3) より、 $1 * [K, K] = 1$ 。
故に、 $K = 1$ 。

(3.6) $\mathcal{L}_j^*$ は、 $\#$ に関して単位元 $(Z, [t])$ をもつ半群を構成する。

証明。

(3.5) により明らか。

$(G, [x]) = (G_1, [y]) \# (G_2, [z])$ ならば、必ず $(G_1, [y]) = (Z, [t])$ 又は、 $(G_2, [z]) = (Z, [t])$ となる。
 $(G, [x]) \in \mathcal{L}_j^*$ を prime と呼ぶ。(3.3) より次の proposition は明らか。

(3.7) knot group G が、有限あるいは、nontrivial な center を含む commutator subgroup をもつならば、 $(G, [x])$ は prime である。

最後に次の問題を提起しておく、

[問題] H. Schubert [6] は、 S^3 における全ての knot は prime knot に unique に分解できることを示している。では、 $\mathcal{K}^*$ に対し、次の Theorem は成立するか。

Unique decomposition theorem. もし、 $(G, [x])$ が prime の積として次の様に 2 通りに書けたとする。

$$\begin{aligned}(G, [x]) &= (G_1, [y_1]) \# \cdots \# (G_p, [y_p]) \\ &= (K_1, [z_1]) \# \cdots \# (K_q, [z_q]),\end{aligned}$$

このとき、 $p = q$ であり、 $(G_i, [y_i]), (K_j, [z_j])$ の間に、 $(G_i, [y_i]) = (K_j, [z_j])$ となる一対一の対応がつかう。

References

- [1] Cappel, S.E. and Shaneson, J.L., There exist inequivalent knots with the same complement, Ann. of Math., 103 (1976), 349 - 353.
- [2] Gordon, C.McA, Some higher dimensional knots with the same homotopy groups, Quat. J. Math., Oxford

- (2), 24 (1973), 411-22.
- [3] Hopf, H., Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comm. Math. Helv.*, 14 (1941), 257-309.
- [4] Kervaire, M. A., On higher dimensional knots, *Diff. and Comb. Topology*, edited by S. S. Cairns, Princeton Univ. Press. (1965), 105-119.
- [5] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, Interscience Pub. New York (1966).
- [6] Schubert, H., Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, *Sitz. der Heidelberger Akad., Math. Natur. Klasse*, 3 (1949), 57-104.
- [7] Yajima, T., On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space, *Jour. of Math., Osaka City Univ.*, 13 (1962), 63-71.
- [8] Yajima, T., On a characterization of knot groups of some spheres in R^4 , *Osaka J. of Math.*, 6 (1969), 435-46.
- [9] Yajima, T., Wirtinger presentations of knot groups, *Proc. of Japan Acad.*, 46 (1970), 997-1000.