

Characterization of generalized Besov Morrey spaces
by ball means of differences¹
(Generalized Besov Morrey 空間と差分による特徴づけ)
首都大学東京 理工学研究科 野井貴弘

Takahiro Noi
Tokyo Metropolitan University

1 関数空間の定義

$r > 0$ とし, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$ とする.

$0 < q < \infty$ とする. $\mathcal{G}_q$ で, 次の性質を満たす非減少関数 $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 全体の集合とする;

$$\varphi(t_1)t_1^{-n/q} \gtrsim \varphi(t_2)t_2^{-n/q} \quad (0 < t_1 \leq t_2 < \infty).$$

定義 1.1 (Generalized Morrey 空間 [1]). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする. このとき,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

を満たす可測関数 f 全体の集合を $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ で表し, これを generalized Morrey 空間という.

Besov 空間を定義するために, 滑らかな単位の分解を導入する.

定義 1.2. $\Theta(\mathbb{R}^n)$ を次の 3 条件を満たす $\{\theta_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合とする;

(i)

$$\begin{cases} \text{supp } \theta_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\} \\ \text{supp } \theta_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \text{ if } j = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

(ii) 任意の多重指数 α に対して, ある正の定数 c_α が存在し

$$2^{j|\alpha|} |\partial^\alpha \theta_j(x)| \leq c_\alpha$$

が, 任意の $j = 0, 1, \dots$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ,

(iii) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(x) = 1.$$

フーリエ変換と逆フーリエ変換をそれぞれ $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ で表し, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\varphi(D)f \equiv \mathcal{F}^{-1}[\varphi \mathcal{F} f]$ と定義する.

¹岡山大学 出来光夫氏との共同研究

定義 1.3 (Generalized Besov Morrey 空間 [2]). $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $\{\theta_j\}_{j=0}^\infty \in \Theta(\mathbb{R}^n)$ とする. The (nonhomogeneous) generalized Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n)$ を, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ でセミノルム

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s} \equiv \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsr} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}^r \right)^{\frac{1}{r}} & (r < \infty), \\ \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{js} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} & (r = \infty) \end{cases}$$

が有限なものの全体の集合とする.

注意 1.4. 今後 $\left(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}^r \right)^{\frac{1}{r}}$ を $\|\{f_j\}_{j=0}^\infty\|_{\ell^r(\mathcal{M}_q^\varphi)}$ と表すことがある.

2 差分の球平均 (ball means of difference) による特徴づけ

$\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n)$ の差分の球平均による特徴づけを述べる. そのために, まず差分を定義する. f を $\mathbb{R}^n$ 上の関数とし, $h \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき,

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義する. 高次の差分は次のように帰納的に定義する;

$$\begin{aligned} \Delta_h^M f(x) &:= \Delta_h^1(\Delta_h^{M-1} f)(x) \\ &= \sum_{j=0}^M (-1)^j \binom{M}{j} f(x + (M-j)h) \quad M = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

高次の差分は直接的に

$$\Delta_h^M f(x) := \sum_{j=0}^M (-1)^j \binom{M}{j} f(x + (M-j)h)$$

と定義することができる. ここで $\binom{M}{j}$ は 2 項係数を表すものである.

$u \in (0, \infty)$, $t > 0$, $M \in \mathbb{N}$ とする. f の差分の球平均と呼ばれる量を

$$d_{t,u}^M f(x) = \left(t^{-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^M f(x)|^u \, dh \right)^{1/u} = \left(\int_B |\Delta_{th}^M f(x)|^u \, dh \right)^{1/u}$$

でもって定義する.

次に generalized Besov Morrey 空間のセミノルムに対応するセミノルムを次のように定義する; $f \in \mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ とするとき,

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s}^* \equiv \|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} + \left(\int_0^1 t^{-sr} \|d_{t,u}^M f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}$$

と

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^{s,*}}^{**} \equiv \|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} + \left\| \left\{ 2^{ks} d_{2^{-k},u}^M f \right\}_{k=1}^\infty \right\|_{\ell^r(\mathcal{M}_q^\varphi)}.$$

このとき, 常の Besov 空間における差分の球平均の特徴付け [3] と同様に次の定理が成り立つ.

定理 2.1 (主定理). $1 \leq u \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とし, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする. さらに $M \in \mathbb{N}$ は $M > s$ を満たすとする. もしも

$$s > \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{u} \right)_+,$$

であれば, $f \in \mathcal{N}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ必要十分条件は $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と $\|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}^* < \infty$ が成り立つことである. さらにこのとき $\|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}^* \sim \|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}$ が成り立つ.

上で述べたことは $\|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}^{**}$ に対しても成立する.

$\mathcal{N}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ は緩増加超関数の空間であるので, そもそも差分を考えることができるかどうか気になるが, s の条件

$$s > \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{u} \right)_+ \geq \left(\frac{n}{q} - n \right)_+ \equiv \sigma_q$$

から $f \in \mathcal{N}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ であるとき,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}$$

が成り立つ. このことは $s > \sigma_q$ より $s - \sigma_q > \epsilon$ を満たす $\epsilon > 0$ をとれば

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}^{\min(1,q)} &= \left\| \sum_{k=0}^\infty \theta_k(D) f \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}^{\min(1,q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \|\theta_k(D) f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}^{\min(1,q)} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{(\sigma_q - s + \epsilon) \min(1,q) k} \|f\|_{\mathcal{N}_{q,1}^{s - \sigma_q - \epsilon}}^{\min(1,q)} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}^{\min(1,q)} \end{aligned}$$

と計算することができることからわかる. よって $1 \leq q$ であれば $f \in \mathcal{N}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ であるとき $f \in \mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ であるので f は局所可積分関数と見なせる. 問題は $0 < q < 1$ のときであるが, このときは次の補題が成り立つ.

補題 2.2. $0 < q < 1$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $s > \left(\frac{n}{q} - n \right)_+$ とする. このとき

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1(B(y,1))} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{q,r}^s}$$

が成り立つ. つまり $0 < q < 1$ のときでも $\mathcal{N}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ の元は局所可積分関数と見なせる.

Proof. 通常の Besov 空間の場合と同様に, 任意の $0 < r \leq \infty$ に対して

$$\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, r}}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つので,

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1(B(y, 1))} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}$$

を示せば十分である. [2, Lemma 3.4] の証明内で

$$|\theta_j(D)f(x)| \lesssim \frac{2^{-js}}{\varphi(2^{-j})} \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}$$

が任意の $j \in \mathbb{N}_0$ に対して成り立つことが示されている. つまり

$$2^{js} \varphi(2^{-j}) \|\theta_j(D)f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}$$

が成り立つ. また $\|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}$ の定義から

$$2^{js} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}} \leq \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}.$$

が成り立つことがわかる. このことから

$$2^{js(1-q)} \varphi(2^{-j})^{1-q} \|\theta_j(D)f\|_{L^\infty}^{1-q} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}^{1-q}$$

と

$$2^{jsq} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}}^q \leq \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}^q$$

が成り立つので,

$$2^{js} \varphi(2^{-j})^{1-q} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}}^q \|\theta_j(D)f\|_{L^\infty}^{1-q} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}^q \quad (1)$$

を得る. 一方

$$\varphi(r)^q \int_{B(x, r)} |f(y)| \, dy \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-q} \left(\varphi(r)^q \int_{B(x, r)} |f(y)|^q \, dy \right)$$

であるので, $\varphi^q = \psi$ とおくと $\|f\|_{\mathcal{M}_1^\psi} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_q^\psi}^q \|f\|_{L^\infty}^{1-q}$ が成り立つことがわかる. よって, (1) と組み合わせることにより

$$2^{js} \varphi(2^{-j})^{1-q} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_1^\psi} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}$$

が成り立つ. $\varphi \in \mathcal{G}_q$ より $\varphi(2^{-j}) \gtrsim 2^{-jn/q} \varphi(1)$ であるので,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-js}}{\varphi(2^{-j})^{1-q}} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} 2^{jn(1-q)/q} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(s-n(\frac{1}{q}-1))} < \infty$$

を得る. よって,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_1^\psi} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}_1^\psi} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-js}}{\varphi(2^{-j})^{1-q}} \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^{\varphi, \infty}}^s}$$

が成り立つ.

□

定理 2.1 は $1 \leq u \leq \infty$ のときであるが, $0 < u < 1$ のときは次の定理が成り立つ.

定理 2.3. $0 < u < 1, 0 < q < \infty, 0 < r \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ とし, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ が成り立つとする. さらに $M \in \mathbb{N}$ は $M > s$ を満たし, s は

$$s > \left(\frac{n}{q} - n\right)_+$$

を満たすとする. このとき, $f \in \mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(\mathbb{R}^n)$, ならば $\|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s}^* \sim \|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s}$ が成り立つ.
上で述べたことは $\|f\|_{\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^{**s}}$ に対しても成立する.

参考文献

[1] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*. Math. Nachr. **166** (1994), 95–103.

[2] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, *Generalized Morrey spaces and trace operator*. Sci. China Math. **59** (2016), 281–336.

[3] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*. Birkhäuser, Basel, Boston, 1987.