
修士論文 (1982年度)

量子統計力学的レーザー基礎方程式の導出とその物理的考察

筑波大・物理学研究科 富 永 哲 雄

論文概要

非平衡統計力学において、平衡（又は、定常）状態から十分離れた場合も扱える方法論を確立するということは、非常に重要な問題となっている。減衰理論における、時間たたみ込み形式(TC)、時間非たたみ込み形式(TCL)の一般的な摂動展開公式、及び、不完全キュムラント、順序付キュムラントの系統的計算法としてのダイアグラム法は、この問題を解決する一つの有力な方法となっている。そこで、非線形非平衡系の本質的なものを含んだ最も簡単な系であるレーザー系を例にとってこの方法論について調べた。

まず、微視的ハミルトニアンから出発し、TC及びTCL形式の減衰理論を使ってレーザー系の基礎方程式を導出し、Riskenが現象論的に導出した基礎方程式と比較した。その結果、TCL形式の減衰理論で導いたTCL型の方程式は、Riskenの方程式を含む一般的なものであり、量子論的效果による結合定数のくり込みが陽に現われていることが分かった。また、TC型の方程式に対するHaakeの近似は誤りであり、Riskenの方程式とは直接関係付けられないことが分かった。以上のことから、基礎方程式の段階で系の性質を調べようとする場合、TCL型の方程式の方が有力であると言える。

次に、TCL型の基礎方程式を解いて光子数及び光子数のゆらぎの時間発展について調べた。その結果、現象論的な基礎方程式では記述できないような初期段階における特徴的な振舞も、微視的に導いた基礎方程式を使うと記述できることが分かり、微視的理論の重要性が再確認された。

レーザー系の例からこの方法論の有効性が確かめられたわけだが、今後他の問題にも応用して非線形非平衡系を扱う一般的な枠組として発展させる必要がある。

目 次

§ 1. 序論

- 1.1 非平衡統計力学における方法論
- 1.2 レーザー理論
- 1.3 論文の構成

§ 2. レーザー系の基礎方程式

- 2.1 レーザー系のモデルハミルトニアン
- 2.2 Risken の現象論
- 2.3 微視的理論

§ 3. モーメントの時間発展

- 3.1 数値計算のための定式化
- 3.2 計算結果

§ 4. 結び

補遺

- (I) 減衰理論
- (II) ダイアグラム法
- (III) ダイアグラム法による計算
- (IV) 展開係数 $c_n(t)$ に対する方程式

§ 1. 序論

この章では、この論文で扱うレーザー基礎方程式の問題が、非平衡統計力学の一般論を展開する上で重要な例題となっていることを示す。1.1 節では、非平衡統計力学の方法論について復習し、この論文で用いる減衰理論の、非平衡統計力学における役割について述べる。1.2 節では、非平衡統計力学の観点からレーザー基礎方程式の問題をとらえ、今まで成された Risken¹⁾, Haake²⁾ の仕事と、この論文の主な内容となる有光・富永の仕事³⁾ との関係について述べる。最後に、1.3 節で、この論文全体の構成について簡単に説明する。

1.1 非平衡統計力学における方法論

非平衡統計力学の方法論として確立しているのは、平衡（又は、定常）状態近傍の現象に限られている。平衡状態にある系に対し外力が加えられたときの、系の示す線形応答（たとえば、外力として磁場を加えたときの磁化、電場を加えたときの電流等）に関して、その線形応答関

数（前の例で言うと、帯磁率や電気伝導率のような実験と直ちに結びつく量）の一般的な表式を与える理論で、線形応答理論⁴⁾と呼ばれている。さらに、応答関数を計算するファイマンダイアグラム法による系統的方法が、温度グリーン関数⁵⁾の開発により確立され、平衡（又は、定常）状態近傍における非平衡統計力学の方法論の枠組は完成しているのである。ただし、熱浴の効果の入れ方に不完全な面があり、今後の問題となっている。

熱浴や、注目していない系の効果を取り入れる一つの方法として、確率過程論の応用がある。たとえば、或る物理現象に対し、物理的直感や或る理論の枠内（古典論、半古典論等）でその現象を記述する方程式を立て、そこで落としている効果、理論の枠内では説明できない効果を、揺動力として導入し、その確率過程として考える方法である。この場合、現象がどのような確率過程に従うかという問題が重要であるが、それは、物理的直感や数学的な扱い易さから決められる場合が多い。その意味で確率過程は現象理論であり、現象を十分に記述できない欠点がある。

平衡（又は、定常）状態から十分離れた場合の微視的理論の有力な方法論の一つに、減衰理論があげられる。微視的なハミルトニアンから出発し、射影演算子を導入してその中の必要な情報だけを引き出すという方法である。シュレディンガー描像による方法（中嶋—Zwanzigの方法^{6),7)}と、ハイゼンベルク描像による方法（森の方法⁸⁾）との2つに分類されるが、この論文では前者を用いる。

また、減衰理論では、時間たたみ込み形式（TC）と、時間非たたみ込み形式（TCL）が知られている。シュレディンガー描像による方法では、TC、TCLとも、一般的な摂動展開公式が、柴田・有光⁹⁾により与えられている。それによると、TCでの展開の各項は不完全キュムラントで書かれ、TCLでの展開の各項は順序付キュムラントで書かれる。また、不完全キュムラント、順序付キュムラントの系統的な計算法として、ダイアグラム法が有光¹⁰⁾により与えられている。

以上の方法論を発展させて、非線型非平衡系を扱う一般的な枠組を完成させたいのであるが、その指針を得るために最初に応用すべき例題として、レーザー系があげられる。レーザー系は、量子系であり、非平衡開放系であり、非線形性も備えており、非線形非平衡系の本質的なものを含んだ最も簡単な系である。従って、レーザー系の性質を調べることによって、我々の非線形非平衡に対する方法論について多くの知見が得られるものと期待される。

1.2 レーザー理論

レーザーの理論は、レート方程式による理論^{11),12),13)} 半古典的理論¹⁾ 量子統計力学的理論^{2),3)} の三種類に大別できる。現在まで多くの研究が成されてきたわけだが、これを、非平衡統計力

学の方法論の対象という観点で見直してみると、確率過程論としては、Riskén による半古典論¹⁾が、微視的理論としては、Haake の量子力学的理論²⁾があげられる。

Riskén は、半古典的理論の範囲で、古典的電場の複素振幅に対する方程式を導出し、半古典論では扱えない電磁場の量子ゆらぎの効果を、揺動力として加えて確率微分方程式の形にし、揺動力を白色ガウス過程と仮定して、電場に対する Fokker-Planck 方程式を得た¹⁾。

Haake は、熱浴も考慮した量子力学的ハミルトニアンから出発し、時間たたみ込み形式(TC)の減衰理論^{6),7)}を用いて、光子系の密度演算子に対する基礎方程式を導出した²⁾。Haake は、得られた TC 型の方程式に対し安易に長時間近似して、Riskén の Fokker-Planck 方程式の形を得た。

ところで、一般論によると、TC 形式の減衰理論における不完全キュムラントと、TCL 形式の減衰理論における順序付キュムラントは、摂動展開の 3 次以上で違いが現われる。従って摂動の 3 次以上を扱う場合には、安易に長時間近似するのは誤りである。

そこで、我々は、レーザー系に対して TCL 形式の減衰理論を使って計算し、TC 形式の減衰理論との違い及び Haake 流の近似の問題点に関して調べた。また、得られた TCL 型の基礎方程式を数値的に解いて光子数、光子数のゆらぎの時間発展について、種々の角度から調べた。

1.3 論文の構成

この論文では、2 章で、レーザー基礎方程式の導出法について議論する。2.1 節では、レーザー模型の説明と、対応するハミルトニアンを導出を行なう。2.2 節では、Riskén の現象論的導出法を紹介し、2.3 節で、TCL 形式の減衰理論による量子統計力学的レーザー基礎方程式の導出を行ない、さらに、Riskén や Haake の結果との比較検討を行なう。次に、3 章で、有光・富永による基礎方程式を数値的に解いた結果について述べる。3.1 節では数値計算のための定式化について説明し、3.2 節では、計算結果を示し、それを解析する。4 章はまとめに充てることにする。

§ 2. レーザー系の基礎方程式

この章では、2.1 節でレーザー模型の説明をし、モデルハミルトニアンを導出する。2.2 節では、半古典的理論として Riskén の理論¹⁾を説明する。2.3 節では、微視的理論として Haake による TC 形式の減衰理論による方法²⁾と、有光・富永による TCL 形式の減衰理論による方法³⁾を並行して説明し、その違いと問題点を議論する。

2.1 レーザー系のモデルハミルトニアン

レーザー模型として、互いに相互作用していない二準位原子 N 個の系が、光子系と電氣的双極子相互作用している系を考える。この系は、気体レーザー等で原子間相互作用が無視できる場合で、光と強く相互作用している二つの準位だけを考えていることに相当する。

非相対論近似での全ハミルトニアンは、

$$H = \sum_{\mu=1}^N \left\{ \frac{1}{2m} (\mathbf{P}_{\mu} + e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{x}_{\mu}) + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma}_{\mu} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \right\} + H_L \quad (2.1.1)$$

で与えられる。ただし、 m , $-e$, $\mathbf{P}_{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}$, $\mathbf{x}$ は、それぞれ、電子の質量、電荷、運動量、スピン角運動量、位置であり、 $V(\mathbf{x}_{\mu})$ は、 μ 番目の原子のポテンシャルである。 H_L は、自由な電磁場のハミルトニアンであり、ベクトルポテンシャル： $\mathbf{A}$ 、スカラーポテンシャル： A_0 のゲージはクーロンゲージとする。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad A_0 = 0 \quad (2.1.2)$$

また、簡単のため、電磁場と相互作用する電子は各原子について一個とした。単位系は、 $c = 1$, $\hbar = 1$ となる単位系を採用した。

後で便利のように、全ハミルトニアンを

$$H = H_0 + H_{AL} \quad (2.1.3a)$$

$$H_0 = \sum_{\mu=1}^N \left(\frac{\mathbf{P}_{\mu}^2}{2m} + V(\mathbf{x}_{\mu}) \right) + H_L = \sum_{\mu} H_{A\mu} + H_L = H_A + H_L \quad (2.1.3b)$$

$$H_{AL} = \sum_{\mu=1}^N \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\mu}) \cdot \mathbf{P}_{\mu} \quad (2.1.3c)$$

と書き直しておく。 $H_{A\mu}$ は、 μ 番目の自由な原子のハミルトニアンであり、 H_{AL} は、原子系と電磁場の相互作用ハミルトニアンである。ただし、 $\mathbf{A}^2$ の項は、光子一個の吸収、放出過程に寄与しないので省略し、スピンと電磁場の相互作用は、電氣的双極子相互作用に比べて小さいので省略した。

次に、ハミルトニアン (2.1.3) を第二量子化する。自由な電磁場のハミルトニアンは、正準形式で、

$$H_L = \frac{1}{8\pi} \int_V d\mathbf{x} \{ \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \} \quad (2.1.4)$$

と書ける。(クーロンゲージ)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega_{\lambda}V}} \sum_{\lambda} (b_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} e^{i\mathbf{k}_{\lambda} \cdot \mathbf{x}} + b_{\lambda}^{\dagger} \mathbf{e}_{\lambda} e^{-i\mathbf{k}_{\lambda} \cdot \mathbf{x}}) \quad (2.1.5)$$

富永哲雄

を代入して計算すると、零点エネルギー部分を除いて、

$$\mathcal{H}_L = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda} \quad (2.1.6)$$

となる。 $b_{\lambda}^{\dagger}$, b_{λ} は、モード λ の光子の生成、消滅演算子で、交換関係

$$[b_{\lambda}, b_{\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [b_{\lambda}, b_{\lambda'}] = 0, \quad [b_{\lambda}^{\dagger}, b_{\lambda'}^{\dagger}] = 0 \quad (2.1.7)$$

を満たすものとする。また、 $\mathbf{e}_{\lambda}$ は、モード λ の偏極ベクトルである。

原子系については、第二量子化されたハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}_A = \int d\mathbf{x} \phi^{\dagger}(\mathbf{x}) H_A \phi(\mathbf{x}) \quad (2.1.8)$$

で与えられる。ここで、場の演算子 $\phi(\mathbf{x})$ を、

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mu, j} a_{\mu j} \varphi_{\mu j}(\mathbf{x}) \quad (2.1.9)$$

と展開する。ただし、 $\varphi_{\mu j}(\mathbf{x})$ は、 H_A の固有値 $\varepsilon_{\mu j}$ に対する固有関数であり：

$$H_A \varphi_{\mu j}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\mu j} \varphi_{\mu j}(\mathbf{x}) \quad (2.1.10a)$$

直交条件、及び、完全性条件

$$\int d\mathbf{x} \varphi_{\mu j}(\mathbf{x}) \varphi_{\mu' j'}^*(\mathbf{x}) = \delta_{\mu \mu'} \delta_{j j'} \quad (2.1.10b)$$

$$\sum_{\mu, j} \varphi_{\mu j}^*(\mathbf{x}) \varphi_{\mu j}(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.1.10c)$$

を満たす。また、 $a_{\mu j}^{\dagger}$, $a_{\mu j}$ は、 μ 番目の原子の電子状態 j ($j = 1, 2$) の生成、消滅演算子であり、反交換関係、

$$\{a_{\mu j}, a_{\mu' j'}^{\dagger}\} = \delta_{\mu \mu'} \delta_{j j'}, \quad \{a_{\mu j}, a_{\mu' j'}\} = 0, \quad \{a_{\mu j}^{\dagger}, a_{\mu' j'}^{\dagger}\} = 0 \quad (2.1.11)$$

を満たすものとする。(2.1.9) を (2.1.8) に代入し、(2.1.10) を考慮すると、

$$\mathcal{H}_A = \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu} a_{\mu 2}^{\dagger} a_{\mu 2}, \quad \varepsilon_{\mu} = \varepsilon_{\mu 2} - \varepsilon_{\mu 1} \quad (2.1.12)$$

となる。ただし、下の電子状態 ($j = 1$) をエネルギーの原点に選んだ。

相互作用ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}_{AL} = \int d\mathbf{x} \phi^{\dagger}(\mathbf{x}) \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} \phi(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}
 & \simeq \sum_{\mu, \mu'} \sum_{j, j'} \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{X}_\mu) \cdot \mathbf{a}_{\mu j}^+ \mathbf{a}_{\mu' j'} \int d\mathbf{x} \varphi_{\mu j}^*(\mathbf{x}) \mathbf{P} \varphi_{\mu' j'}(\mathbf{x}) \\
 & \simeq \sum_{\mu=1}^N \sum_{\lambda} \frac{e}{m} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega_\lambda V}} (b_\lambda e^{i\mathbf{k}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\mu} + \text{c.c.}) (a_{\mu 1}^+ a_{\mu 2} \int d\mathbf{x} \varphi_{\mu 1}^*(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{P} \varphi_{\mu 2}(\mathbf{x}) + \text{c.c.}) \\
 & \simeq \sum_{\mu=1}^N \sum_{\lambda} (a_{\mu 2}^+ a_{\mu 1} b_\lambda g_{\mu \lambda}^* + a_{\mu 1}^+ a_{\mu 2} b_\lambda^+ g_{\mu \lambda}) \quad (2.1.13)
 \end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{X}_\mu$ は、 μ 番目の原子の位置を表わし、最初の近似等号は、電気的雙極子近似に相当する。次の近似等号は、他の原子との間の遷移は、原子内でのレベル間の遷移に比べて小さいので省略したことを表わしている。最後の近似等号は、回転波近似に相当する。このとき、結合定数は、

$$g_{\mu \lambda} = \frac{e}{m} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega_\lambda V}} e^{i\mathbf{k}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\mu} \int d\mathbf{x} \varphi_{\mu 1}^*(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{P} \varphi_{\mu 2}(\mathbf{x}) \quad (2.1.14)$$

で与えられる。

簡単のため、光子系は1モード ($\omega_L = \omega_\lambda$) とし、原子系は、一様に広がった原子 ($\omega_A = \varepsilon_\mu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$) とすると、結合定数は、

$$g_\mu = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_\mu} g \quad (2.1.15)$$

$$g = \frac{e}{m} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega_L V}} \int d\mathbf{x} \varphi_1^*(\mathbf{x}) \mathbf{e} \cdot \mathbf{P} \varphi_2(\mathbf{x}) \quad (2.1.16)$$

となる。一般性を失なうことなく、 g は実数であると仮定できる。

次の様なスピン演算子を導入すると、以下の議論に便利である¹⁴⁾

$$S_\mu^+ = a_{\mu 2}^+ a_{\mu 1} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_\mu}, \quad S_\mu^- = a_{\mu 1}^+ a_{\mu 2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_\mu} \quad (2.1.17)$$

$$S_\mu^z = \frac{1}{2} (a_{\mu 2}^+ a_{\mu 2} - a_{\mu 1}^+ a_{\mu 1}) \quad (2.1.18)$$

これらが、交換関係

$$[S_\mu^z, S_\mu^\pm] = \pm S_\mu^\pm, \quad [S_\mu^+, S_\mu^-] = 2S_\mu^z \quad (2.1.19)$$

を満たすことは、(2.1.11) と、恒等式

$$a_{\mu 2}^+ a_{\mu 2} + a_{\mu 1}^+ a_{\mu 1} = 1 \quad (2.1.20)$$

を用いると確かめられる。このスピン演算子を用いると、第二量子化されたハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AL} \quad (2.1.21 a)$$

$$\mathcal{H}_L = \omega_L b^+ b \quad (2.1.21b)$$

$$\mathcal{H}_A = \omega_A \sum_{\mu=1}^N S_{\mu}^z + \frac{1}{2} \omega_A N \quad (2.1.21c)$$

$$\mathcal{H}_{AL} = g \sum_{\mu=1}^N (S_{\mu}^+ b + S_{\mu}^- b^+) \quad (2.1.21d)$$

となる。

2.2 Risken の現象論¹⁾

Risken は、前節のレーザー模型に対し、原子系は量子論的に扱い、熱浴の効果、励起の効果、電磁場の量子論的ゆらぎの効果を経験論的に扱い、レーザー系の基礎方程式を導出した¹⁾。

(半古典論) この節では、この Risken の理論を簡単に紹介する。

μ 番目の原子の密度演算子 $\rho^{(\mu)}(t)$ の満たす運動方程式は、

$$\dot{\rho}^{(\mu)} = -i [H, \rho^{(\mu)}] \quad (2.2.1)$$

で与えられる。ハミルトニアン H は、自由な部分 H_0 と、相互作用の部分 $-exE$ (電気的雙極子相互作用) に分けられる。ただし、電場 E は、レーザーの軸方向 (z 方向) に対し、垂直に偏極しているものとした。

$$H = H_0 - exE \quad (2.2.2)$$

密度演算子を、 H_0 の固有状態 $|1\rangle$, $|2\rangle$ (二準位原子) :

$$H_0 |1\rangle = \epsilon_1 |1\rangle, \quad H_0 |2\rangle = \epsilon_2 |2\rangle \quad (2.2.3a)$$

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}, \quad \omega_0 = \epsilon_2 - \epsilon_1 \quad (2.2.3b)$$

を基底とする表示で表わすことにする。各成分

$$\rho_{ij}^{(\mu)} = (\rho_{ji}^{(\mu)})^* = \langle i | \rho^{(\mu)} | j \rangle \quad (2.2.4)$$

に対する運動方程式は、

$$\dot{\rho}_{12}^{(\mu)} = i\omega_0 \rho_{12}^{(\mu)} + iex_{12}E(\rho_{22}^{(\mu)} - \rho_{11}^{(\mu)}) - \underline{\gamma_{\perp} \rho_{12}^{(\mu)}} \quad (2.2.5)$$

$$\dot{\rho}_{22}^{(\mu)} - \dot{\rho}_{11}^{(\mu)} = 2iex_{12}E(\rho_{12}^{(\mu)} - \rho_{21}^{(\mu)}) + \underline{\gamma_{\parallel} [\sigma_0/N - (\rho_{22}^{(\mu)} - \rho_{11}^{(\mu)})]} \quad (2.2.6)$$

となる。式 (2.2.5), (2.2.6) の中で下線を引いた項は、密度演算子の非対角成分の熱浴によ

る減衰 ($-r_{\perp} \rho_{12}^{(u)}$, 横緩和), 対角成分の熱浴による減衰 ($-r_{\parallel} (\rho_{22}^{(u)} - \rho_{11}^{(u)})$, 縦緩和), 励起 ($r_{\parallel} \sigma_0/N$) の効果を, 現象論的に付け加えた項である。また, 永久双極子は存在しないものとし ($\langle 1|x|1 \rangle = 0$, $\langle 2|x|2 \rangle = 0$), $x_{12} = \langle 1|x|2 \rangle$ が実数になるように固有関数の位相を定めた。式 (2.2.5), (2.2.6) により, 電場 E の影響下での密度演算子の各要素の振舞が決定される。

一方, 電場 E は, マックスウェル方程式

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P}{\partial t^2} \quad (2.2.7)$$

に従うわけだが, 分極

$$P(z, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{(\epsilon_{\mu}-z)\epsilon\Delta} e x_{12} (\rho_{12}^{(u)} + \rho_{21}^{(u)}) \quad (2.2.8)$$

を通して, 原子系の影響を受けている。ただし, 和は, z のまわりの体積 Δ 中のすべての活性化された原子についてとるものとする。

ここで, 一方向だけに伝播するリングレーザーを考えると, 電場は, 進行波

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\epsilon_0 V}} [b(t) e^{-i(\omega_0 t - kz)} + \text{c.c.}] \quad (2.2.9)$$

の形に書ける。複素振幅 $b(t)$ は, 原子と電磁場の相互作用が弱いので, 周期 $2\pi/\omega_A$ の間はほとんど変化しない ($|\dot{b}| \ll \omega_A |b|$) と仮定する。

今, 双極子モーメント及び分布差:

$$S(t) = \sum_{\mu} \rho_{21}^{(u)} e^{i(\omega_A t - kz)} \quad (2.2.10)$$

$$\sigma(t) = \sum_{\mu} (\rho_{22}^{(u)} - \rho_{11}^{(u)}) \quad (2.2.11)$$

を用いて式 (2.2.5)–(2.2.7) を書き換えると,

$$\dot{b} + \kappa b = i g S \quad (2.2.12a)$$

$$\dot{S} + r_{\perp} S = -i g b \sigma \quad (2.2.12b)$$

$$\dot{\sigma} + r_{\parallel} (\sigma - \sigma_0) = 2i g (S^* b - S b^*) \quad (2.2.12c)$$

となる。ただし, 回転波近似を用い, さらに, $b(t)$ の時間変化が $1/\omega_0$ に比べて小さいことを用いた。結合定数 g は,

$$g = \omega_0 \sqrt{\alpha_S \lambda (x_{12})^2 / V} \quad (2.2.13)$$

富永哲雄

で与えられる。ただし,

$$\alpha_S = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad \lambda = 2\pi c/\omega_0 \quad (2.2.14)$$

とおいた。

定常状態のとき, 方程式 (2.2.12) は,

$$b^*b \left[b^*b - \frac{r_{\parallel}}{4\kappa} \left(\sigma_0 - \frac{\kappa r_{\perp}}{g^2} \right) \right] = 0 \quad (2.2.15)$$

と変形できる。従って, 電場の強さ b^*b は, ポンプパラメタ σ_0 があるしきい値 σ_{th} 以上のときだけ零でない解を持つ:

$$b^*b = \frac{r_{\parallel}}{4\kappa} \left(\sigma_0 - \frac{\kappa r_{\perp}}{g^2} \right) \quad (\sigma_0 > \sigma_{th}) \quad (2.2.16)$$

$$= 0 \quad (\sigma_0 < \sigma_{th})$$

$$\sigma_{th} = \kappa r_{\perp} / g^2 \quad (2.2.17)$$

発振点近傍における方程式を求める。 σ , S の時間変化が, $1/r_{\parallel}$, $1/r_{\perp}$ よりゆっくりだとすると, 式 (2.2.12b), (2.2.12c) より,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 / \left[1 + \frac{4g^2}{r_{\parallel} r_{\perp}} b^*b \right] \\ &\simeq \sigma_0 \left(1 - \frac{4g^2}{r_{\parallel} r_{\perp}} b^*b \right) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

となる。これを (2.2.12a) に代入して (断熱的消去),

$$\dot{b} - (r - \beta b^*b) b = \dot{b} - \beta (d - b^*b) b = 0 \quad (2.2.19)$$

を得る。ただし,

$$r = \frac{g^2}{r_{\perp}} (\sigma_0 - \sigma_{thr}), \quad \beta = 4g^2\kappa/r_{\parallel}r_{\perp}, \quad d = r/\beta \quad (2.2.20)$$

とおいた。

今までは電磁場は古典的に扱ってきたが, 発振点近傍では, 電磁場の量子論的ゆらぎの効果 (自然放出) が重要になる。そこで, その効果を揺動力として付け加えて,

$$\dot{b} - (r - \beta b^*b) b = \dot{b} - \beta (d - b^*b) b = \Gamma(t) \quad (2.2.21)$$

という確率微分方程式を扱うことを考える。ただし、揺動力 $\Gamma(t)$ は、

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad (2.2.22)$$

$$\langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \frac{1}{2} Q \delta_{ij} \delta(t-t') \quad (2.2.23)$$

で与えられると仮定する。この式で、 Γ_1 は、 Γ の実数部分を表わし、 Γ_2 は、虚数部分を表わす。また、 $\langle \dots \rangle$ は、ランダム平均を表わす。このとき、自然放出の過程は、電場 $b(t)$ の変化より速いので、 $\Gamma(t)$ を白色ガウス過程と考えてよいこと、さらに、自然放出は、電磁場の位相を変えないことを用いた。揺動力の強さ Q は自然放出の割合を表わすが、Einstein の輻射の理論を用いると

$$Q = \frac{2g^2}{r_\perp} N_2 \quad (2.2.24)$$

で与えられる。ただし、 N_2 は上の準位にある原子の数である。

確率微分方程式 (2.2.21) と、揺動力の性質 (2.2.22), (2.2.23) を用いると、それらと同等の Fokker-Planck 方程式¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial t} W(b^*, b; t) + \beta \left(\frac{\partial}{\partial b^*} b^* + \frac{\partial}{\partial b} b \right) (d - |b|^2) W(b^*, b; t) = q \frac{\partial^2}{\partial b^* \partial b} W(b^*, b; t) \quad (2.2.25)$$

が得られる。ただし、 $W(b^*, b; t)$ は、電場の分布関数を表わし、

$$q = Q/4 = g^2 N_2 / 2 r_\perp \quad (2.2.26)$$

とおいた。

2.3 微視的理論^{2),3)}

Risken が現象論的に導いた基礎方程式¹⁾ を、微視的なハミルトニアンから、量子論的にはじめて導出したのは Haake である²⁾。彼は、それぞれ熱浴の付いた 1 モード光子系と、 N 個の独立な二準位原子系が、電気的雙極子相互作用しているレーザー模型から出発し、TC 形式の減衰理論を用いて、光子系と原子系の結合定数に関して 4 次までの摂動展開を行なった。得られた TC 型の方程式に対し、安易に長時間近似し、さらに、後で説明する漸近評価をすることにより、Risken の基礎方程式の形を得た²⁾。しかし、柴田、有光⁹⁾ の指摘するように、3 次以上の TC 形式の摂動展開では安易に長時間近似をするのは誤りであり、事実、Haake が漸近評価で落とした項の中には、落とす理由のない項が含まれている。一方、基礎方程式を導くという問題に関して、TCL 形式の摂動展開では、上のような問題は現われない³⁾。得られた TCL 型

富永哲雄

の方程式³⁾は、Riskin の方程式もある極限で含む一般化された形をしており、他の方法では得ることのできない結合定数のくりこみの効果も方程式の中に現われている。

この節では、TC 形式と TCL 形式の摂動展開を並行して行ない、Haake の近似の問題点を指摘し、TCL 形式の減衰理論で得られた方程式の「動的演算子」に関して、量子論的效果及び系の大きさ（原子数； N ）に対する依存性について調べる。

ハミルトニアンは、2.1 節のハミルトニアンに熱浴のハミルトニアンと、原子系、光子系と、熱浴との相互作用ハミルトニアンを加えた、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AL} + \mathcal{H}_R^{(L)} + \mathcal{H}_R^{(A)} + \mathcal{H}_{LR} + \mathcal{H}_{LA} \quad (2.3.1)$$

で与えられる。^{15),16),17)}ただし、 $\mathcal{H}_L$ 、 $\mathcal{H}_A$ 、 $\mathcal{H}_{AL}$ は、それぞれ、光子系、二準位原子系、光子系と原子系の相互作用ハミルトニアンであり、 $\mathcal{H}_{LR}$ 、 $\mathcal{H}_{AR}$ は、それぞれ、光子系、原子系と、熱浴との相互作用ハミルトニアンである。書き下すと、

$$\mathcal{H}_L = \omega_L b^\dagger b \quad (2.3.2a)$$

$$\mathcal{H}_A = \omega_A \sum_{\mu=1}^N S_\mu^z \quad (2.3.2b)$$

$$\mathcal{H}_{AL} = g \sum_{\mu=1}^N (S_\mu^+ b + S_\mu^- b^\dagger) \quad (2.3.2c)$$

$$\mathcal{H}_{LR} = g_L (b R_L^+ + b^\dagger R_L^-) \quad (2.3.2d)$$

$$\mathcal{H}_{AR} = g_A \sum_{\mu=1}^N (S_\mu^- R_A^+ + S_\mu^+ R_A^- + S_\mu^z R_\mu^z) \quad (2.3.2e)$$

となる。 R_L^+ 、 R_A^+ 等は、それぞれ、光子系、原子系に対する熱浴の演算子である。また、熱浴のハミルトニアン $\mathcal{H}_R^{(L)}$ 、 $\mathcal{H}_R^{(A)}$ は、以下の議論では特定する必要がない。

全系の密度演算子 $W(t)$ は、Liouville 方程式、

$$\dot{W}(t) = -i \mathcal{H}^\times W(t) \quad (2.3.3)$$

に従って時間発展する。ただし、 $\mathcal{H}^\times$ は、久保の記号で、

$$\mathcal{H}^\times W \equiv [\mathcal{H}, W] \quad (2.3.4)$$

で定義される。

この Liouville 方程式に対し、減衰理論⁹⁾を応用して、熱浴の情報を消去すると、

$$\dot{W}_S(t) = -i(\mathcal{H}_L^\times + \mathcal{H}_A^\times + \mathcal{H}_{AL}^\times)W_S(t) + (\Pi_L + \Pi_A)W_S(t) \quad (2.3.5)$$

となる。ただし、 $W_S(t)$ は、光子系と原子系の結合系の密度演算子であり、

$$W_S(t) = \text{tr}_R W(t) \quad (2.3.6)$$

で定義される。 $\text{tr}_R \cdots$ は、熱浴の演算子に関して跡をとることを意味する。また、演算子 Π_L , Π_A は、

$$\Pi_L = -i A_L b^+ b^\times + A_L \quad (2.3.7)$$

$$\Pi_A = -i A_A \sum_{\mu=1}^N S_\mu^{z^\times} + A_A \quad (2.3.8)$$

で与えられる。演算子 A_L , A_A は、

$$A_L X = \kappa \{ [b, X b^+] + [b X, b^+] \} + 2\kappa \bar{n} [b, [X, b^+]] \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} A_A X = & \sum_{\mu=1}^N \left\{ \frac{r_{10}}{2} ([S_\mu^-, X S_\mu^+] + [S_\mu^- X, S_\mu^+]) + \frac{r_{01}}{2} ([S_\mu^+, X S_\mu^-] + [S_\mu^+ X, S_\mu^-]) \right. \\ & \left. + \frac{\delta_a}{2} ([S_\mu^z, X S_\mu^z] + [S_\mu^z X, S_\mu^z]) \right\} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

で定義した。式(2.3.5)を導く際に、光子系の熱浴と原子系の熱浴とを別々に消去するわけだが、このとき、光子系と原子系の相互作用は無視し、それぞれ結合定数 g_L , g_A の2次までの範囲で求めた^{18),19),20)} また、熱浴の緩和時間は、問題にしている時間に比べて、短いと考えられるので、演算子 Π_L , Π_A の時間依存性は無視した(長時間極限)。演算子 Π_L , Π_A の表式(2.3.7), (2.3.8)において、第一項は、熱浴による振動数のシフトを表わしており、第二項は、熱浴による減衰の効果を表わしている。式(2.3.7) - (2.3.10)の各係数は、 $\langle \cdots \rangle_R$ を熱浴の演算子に関する平均とすると、そのフーリエ・ラプラス変換：

$$\kappa + i A_L \equiv g_L^2 \int_0^\infty dt e^{i\omega_L t} \langle [R_L(t), R_L^+] \rangle_R \quad (2.3.11a)$$

$$\kappa \bar{n} \equiv g_L^2 \text{Re} \int_0^\infty dt e^{i\omega_L t} \langle R_L^+ R_L(t) \rangle_R \quad (2.3.11b)$$

$$A_A \equiv g_A^2 \text{Im} \left[\int_0^\infty dt e^{i\omega_A t} \langle R_A^-(t) R_A^+ \rangle_R - \int_0^\infty dt e^{-i\omega_A t} \langle R_A^+(t) R_A^- \rangle_R \right] \quad (2.3.11c)$$

$$\frac{r_{10}}{2} \equiv g_A^2 \text{Re} \int_0^\infty dt e^{i\omega_A t} \langle R_A^-(t) R_A^+ \rangle_R \quad (2.3.11d)$$

$$\frac{r_{01}}{2} \equiv g_A^2 \text{Re} \int_0^\infty dt e^{-i\omega_A t} \langle R_A^+(t) R_A^- \rangle_R \quad (2.3.11e)$$

$$\frac{\delta_A}{2} \equiv g_A^2 \text{Re} \int_0^\infty dt \langle R_A^z R_A^z(t) \rangle_R \quad (2.3.11f)$$

で与えられる。それぞれの物理的意味は、 Δ_L 、 Δ_A が熱浴による光子系、原子系の振動数のシフトであり、 κ が光子系の減衰定数、 $r_{\parallel} \equiv r_{10} + r_{01}$ 、 $r_{\perp} \equiv \frac{1}{2}(r_{10} + r_{01} + \delta_A)$ が原子系の縦の減衰定数、横の減衰定数である。 $\bar{n}$ は、揺動散逸定理により、

$$\bar{n} = [e^{\beta\omega_L} - 1]^{-1} \quad (2.3.12)$$

で与えられ、原子系と相互作用していない場合の定常状態での光子数を表わす。原子系の反転分布係数

$$\sigma_0 = 2 \langle S_\mu^z \rangle_{t \rightarrow \infty} = \frac{r_{01} - r_{10}}{r_{10} + r_{01}} \quad (2.3.13a)$$

も同様に、

$$\sigma_0 = \frac{r_{01} - r_{10}}{r_{10} + r_{01}} = -\text{th} \frac{\beta\omega_A}{2} \quad (2.3.13b)$$

で与えられる。

熱浴による振動数のシフトを、光子系、原子系の自由なハミルトニアンにくり込むと、

$$\dot{W}_S(t) = -i(\mathcal{M}_L^\times + \mathcal{M}_A^\times + \mathcal{M}_{AL}^\times)W_S(t) + (\Delta_L + \Delta_A)W_S(t) \quad (2.3.14)$$

となる。ただし、ハミルトニアン $\mathcal{M}_L$ 、 $\mathcal{M}_A$ は、

$$\mathcal{M}_L = \tilde{\omega}_L b^\dagger b, \quad \tilde{\omega}_L = \omega_L + \Delta_L \quad (2.3.15)$$

$$\mathcal{M}_A = \tilde{\omega}_A \sum_{\mu=1}^N S_\mu^z, \quad \tilde{\omega}_A = \omega_A + \Delta_A \quad (2.3.16)$$

と再定義した。

次に、原子系の情報を減衰理論を用いて消去する⁹⁾。減衰理論の摂動展開公式を使うために、相互作用表示に移ると、

$$\dot{\bar{W}}_S(t) = [-i\bar{\mathcal{M}}_{AL}^\times(t) + \bar{\Delta}_L(t) + \bar{\Delta}_A(t)]\bar{W}_S(t) \quad (2.3.17)$$

となる。ただし、

$$\bar{W}_S(t) = e^{i(\mathcal{M}_L^\times + \mathcal{M}_A^\times)t} W_S(t) \quad (2.3.18a)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_{\text{AL}}(t) = e^{i(\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times} + \mathcal{M}_{\text{A}}^{\times})t} \mathcal{M}_{\text{AL}} e^{-i(\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times} + \mathcal{M}_{\text{A}}^{\times})t} \quad (2.3.18b)$$

$$\bar{A}_{\text{L}}(t) = e^{i(\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times} + \mathcal{M}_{\text{A}}^{\times})t} A_{\text{L}} e^{-i(\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times} + \mathcal{M}_{\text{A}}^{\times})t} \quad (2.3.18c)$$

$$\bar{A}_{\text{A}}(t) = e^{i(\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times} + \mathcal{M}_{\text{A}}^{\times})t} A_{\text{A}} e^{-i(\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times} + \mathcal{M}_{\text{A}}^{\times})t} \quad (2.3.18d)$$

と定義した。

ここで、光子系と原子系が共鳴 ($\tilde{\omega}_{\text{L}} = \tilde{\omega}_{\text{A}} \equiv \omega$) している場合を考えると、 $\bar{\mathcal{M}}_{\text{AL}}(t)$, $\bar{A}_{\text{L}}(t)$, $\bar{A}_{\text{A}}(t)$ は、時間に依らなくなる。ただし、

$$e^{i\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times}t} b e^{-i\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times}t} = e^{-i\omega_{\text{L}}t} b, \quad e^{i\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times}t} b^{\dagger} e^{-i\mathcal{M}_{\text{L}}^{\times}t} = e^{i\omega_{\text{L}}t} b^{\dagger} \quad (2.3.19)$$

$$e^{i\mathcal{M}_{\text{A}}^{\times}t} S_{\mu}^{\pm} e^{-i\mathcal{M}_{\text{A}}^{\times}t} = e^{\pm i\omega_{\text{A}}t} S_{\mu}^{\pm} \quad (2.3.20)$$

を用いた。このとき、式 (2.3.17) は、

$$\dot{\bar{W}}_{\text{S}}(t) = [-i\mathcal{M}_{\text{AL}}^{\times} + A_{\text{L}} + A_{\text{A}}] \bar{W}_{\text{S}}(t) \quad (2.3.21)$$

となる。

さらに、(2.3.21) を、

$$\dot{\hat{W}}_{\text{S}}(t) = -i\hat{\mathcal{M}}_{\text{AL}}^{\times}(t)\hat{W}_{\text{S}}(t) \quad (2.3.22)$$

と書き換える。ただし、

$$\hat{W}_{\text{S}}(t) = e^{-(A_{\text{L}} + A_{\text{A}})t} \bar{W}_{\text{S}}(t) \quad (2.3.23a)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{\text{AL}}^{\times}(t) = e^{-(A_{\text{L}} + A_{\text{A}})t} \mathcal{M}_{\text{AL}}^{\times} e^{(A_{\text{L}} + A_{\text{A}})t} \quad (2.3.23b)$$

と定義した。

式 (2.3.22) に対して、減衰理論の摂動展開公式を適用する⁹⁾。レーザーでは、光子系の減衰時間 $1/\kappa$ は、原子系の減衰時間 $1/r_{\parallel}$, $1/r_{\perp}$ に比べて非常に長いので、

$$O(A_{\text{L}}) \ll O(A_{\text{A}}), \quad O(\mathcal{M}_{\text{AL}}^{\times}) \quad (2.3.24)$$

が成立することを計算の途中で考慮する。

TCL形式の減衰理論を (2.3.22) に用いると、光子系の密度演算子 $\bar{\rho}(t)$ に対する方程式は、

$$\dot{\bar{\rho}}(t) = [A_{\text{L}} + \bar{K}(t)] \bar{\rho}(t) \quad (2.3.25)$$

富永哲雄

で与えられる。ただし、 $\bar{\rho}(t)$ は、

$$\bar{\rho}(t) = \text{tr}_A \bar{W}_S(t) \quad (2.3.26)$$

で定義される。 $\text{tr}_A \dots$ は、原子系の演算子に関して跡をとることを意味する。また、初期条件として、 $t = t_0$ で、結合系の密度演算子は、光子系と原子系の密度演算子の積の形

$$W_S(t_0) = \rho(t_0) \rho_A(t_0) \quad (2.3.27)$$

に分離できると仮定したので、(2.3.25) に非斉次項は現われない。「動的演算子」 $\bar{K}(t)$ ³⁾ は、結合定数での展開として、

$$\bar{K}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n(t) \quad (2.3.28)$$

$$\bar{K}_n(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \bar{k}_n(t, t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (2.3.29)$$

という形に書ける。射映演算子として、

$$P = \rho_A(t_0) \text{tr}_A \quad (2.3.30)$$

とすると、 $\bar{k}_n$ は、順序付キュムラント⁹⁾で書ける。ただし、このときの平均は、

$$\langle \dots \rangle = \text{tr}_A \cdots \rho_A(t_0) \quad (2.3.31)$$

である。

今、初期状態における原子系の密度演算子 $\rho_A(t_0)$ が、

$$\rho_A(t_0) = \prod_{\mu=1}^N \rho_{A\mu}, \quad \rho_{A\mu} = \frac{1}{2} + \sigma S_{\mu}^z \quad (2.3.32)$$

という形であると仮定する。このとき、原子系の演算子 $S_{\mu}^{\pm}$ の奇数個の積の平均はすべて零になるので、偶数次の $\bar{k}_n$ だけを計算すればよい。2次、4次のキュムラント $\bar{k}_2(t, t_1) \bar{\rho}(t)$, $\bar{k}_4(t, t_1, t_2, t_3) \bar{\rho}(t)$ をダイアグラム法¹⁰⁾を使って計算すると、原子系の演算子の平均は、すべて、

$$\begin{aligned} f^{+-}(i, j; \sigma) \delta_{\mu\nu} &= e^{-i\tilde{\omega}(t_i - t_j)} \text{tr}_A (e^{-A_{\Lambda} t_i} S_{\mu}^{+} e^{A_{\Lambda} t_i}) (e^{-A_{\Lambda} t_j} S_{\nu}^{-} e^{A_{\Lambda} t_j}) \rho_A(t_0) \\ &= e_{ij\perp} \frac{1}{2} [1 + \sigma_0 + e_{j\parallel}(\sigma - \sigma_0)] \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.3.33a)$$

$$f^{-+}(i, j; \sigma) \delta_{\mu\nu} = e^{i\tilde{\omega}(t_i - t_j)} \text{tr}_A (e^{-A_{\Lambda} t_i} S_{\mu}^{-} e^{A_{\Lambda} t_i}) (e^{-A_{\Lambda} t_j} S_{\nu}^{+} e^{A_{\Lambda} t_j}) \rho_A(t_0)$$

$$= e_{ij\perp}^* \frac{1}{2} [1 - \sigma_0 - e_{j\parallel}(\sigma - \sigma_0)] \delta_{\mu\nu} \quad (2.3.33b)$$

で定義される 2 時間グリーン関数で書ける。ただし,

$$\Delta \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_L - \omega_A \quad (2.3.34)$$

$$e_{ij\perp} = \exp [-(r_{\perp} + i \Delta \tilde{\omega})(t_i - t_j)], \quad e_{j\parallel} = \exp [-r_{\parallel} t_j] \quad (2.3.35)$$

である。

一方, TC 形式の減衰理論を使い, 同様の計算を行なうと, 光子系の密度演算子に対する方程式は,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}}(t) = & A_L \bar{\rho}(t) + \int_{t_0}^t dt_1 \bar{k}_2^{\text{TC}}(t, t_1) \bar{\rho}(t_1) \\ & + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \bar{k}_4^{\text{TC}}(t, t_1, t_2, t_3) \bar{\rho}(t_3) \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

となる。この場合, $\bar{k}_2^{\text{TC}}(t, t_1) \bar{\rho}(t_1)$, $\bar{k}_4^{\text{TC}}(t, t_1, t_2, t_3) \bar{\rho}(t_3)$ は, 不完全キュムラント⁹⁾で書けるわけだが, ダイアグラム法¹⁰⁾を使って計算すると, やはり, 2 時間グリーン関数でまとめられることが分かる。

「動的演算子」の一般的な表式はかなり複雑になるので, $\sigma = \sigma_0$ の場合の表式で, TCL 及び TC 形式の減衰理論の違いを議論する。方程式 (2.3.25), (2.3.36) を, 反正規順序のボゾンコヒーレント表示^{21), 22), 23)}で表わすと, (2.3.25) は,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{f}}^{(A)}(t) = & [\kappa(\partial_* \beta^* + \partial \beta) + 2\kappa \bar{n} \partial_* \partial + \int_{t_0}^t dt_1 \bar{k}_2(t, t_1) \\ & + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \bar{k}_4(t, t_1, t_2, t_3)] \bar{f}^{(A)}(t) \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

となり, (2.3.36) は,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{f}}^{(A)}(t) = & [\kappa(\partial_* \beta^* + \partial \beta) + 2\kappa \bar{n} \partial_* \partial] \bar{f}(t) + \int_{t_0}^t dt_1 \bar{k}_2^{\text{TC}}(t, t_1) \bar{f}^{(A)}(t_1) \\ & + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \bar{k}_4(t, t_1, t_2, t_3) \bar{f}^{(A)}(t) \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

となる。ただし, $\bar{f}^{(A)}(\beta^*, \beta; t)$ は,

$$\bar{\rho}(t) = \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \bar{f}^{(A)}(\beta^*, \beta; t) |\beta\rangle \langle \beta|, \quad b |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle \quad (2.3.39)$$

で定義されるボゾンコヒーレント表示での密度演算子である。また, $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial \beta}$, $\partial_* \equiv \frac{\partial}{\partial \beta^*}$ と

富永哲雄

した。「動的演算子」の部分は,

$$\begin{aligned}\bar{k}_2(t, t_1) &= \bar{k}_2^{\text{TC}}(t, t_1) \\ &= \frac{Ng^2}{r_\perp} \varphi^{(2)}(t, t_1) [-\sigma_0(\partial_* \beta^* + \partial \beta) + (1 + \sigma_0) \partial_* \partial] \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_4(t, t_1, t_2, t_3) &= -\frac{N^2 g^4}{r_\perp^3} \varphi_2^{(4)}(t, t_1, t_2, t_3) \sigma_0 [-\sigma_0(\partial_* \beta^* + \partial \beta) + (1 + \sigma_0) \partial_* \partial] \\ &+ \frac{4Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \varphi_1^{(4)}(t, t_1, t_2, t_3) \sigma_0 [(\partial_* \beta^* + \partial \beta) - \partial_* \partial] \beta^* \beta \\ &+ \frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} [\varphi_1^{(4)}(1 + \sigma_0)(3 + \sigma_0)(\partial_* \beta^* + \partial \beta) - \{2\varphi_1^{(4)}(2 + \sigma_0) + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \varphi_2^{(4)} \sigma_0\} (1 + \sigma_0) \partial_* \partial \\ &\quad - \{ \varphi_1^{(4)}(1 + \sigma_0)^2 + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \varphi_2^{(4)} \sigma_0^2 \} (\partial_*^2 \beta^{*2} + 2\partial_* \partial \beta^* \beta + \partial^2 \beta^2) \\ &\quad + 2 \{ \varphi_1^{(4)}(1 + \sigma_0) + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \varphi_2^{(4)} \sigma_0 \} (1 + \sigma_0) \partial_* \partial (\partial_* \beta^* + \partial \beta) \\ &\quad - \{ \varphi_1^{(4)} + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \varphi_2^{(4)} \} (1 + \sigma_0)^2 \partial_*^2 \partial] \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_4^{\text{TC}}(t, t_1, t_2, t_3) &= \frac{4Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \varphi_1^{(4)} \sigma_0 [(\partial_* \beta^* + \partial \beta) - \partial_* \partial] \beta^* \beta \\ &+ \frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} [\varphi_1^{(4)}(1 + \sigma_0)(3 + \sigma_0)(\partial_* \beta^* + \partial \beta) - \{2\varphi_1^{(4)}(2 + \sigma_0) + \frac{r_\parallel}{r_\perp} (1 - N) \varphi_2^{(4)} \sigma_0\} (1 + \sigma_0) \partial_* \partial \\ &\quad - \{ \varphi_1^{(4)}(1 + \sigma_0)^2 + \frac{r_\parallel}{r_\perp} (1 - N) \varphi_2^{(4)} \sigma_0^2 \} (\partial_*^2 \beta^{*2} + 2\partial_* \partial \beta^* \beta + \partial^2 \beta^2) \\ &\quad + 2 \{ \varphi_1^{(4)}(1 + \sigma_0) + \frac{r_\parallel}{r_\perp} (1 - N) \varphi_2^{(4)} \sigma_0 \} (1 + \sigma_0) \partial_* \partial (\partial_* \beta^* + \partial \beta) \\ &\quad - \{ \varphi_1^{(4)} + \frac{r_\parallel}{r_\perp} (1 - N) \varphi_2^{(4)} \} (1 + \sigma_0)^2 \partial_*^2 \partial] \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

で与えられる。ただし,

$$\varphi^{(2)}(t, t_1) = r_\perp e^{-r_\perp(t-t_1)} \quad (2.3.43a)$$

$$\varphi_1^{(4)}(t, t_1, t_2, t_3) = r_\perp^2 r_\parallel e^{-r_\perp(t-t_1)-r_\parallel(t_1-t_2)-r_\perp(t_2-t_3)} \quad (2.3.43b)$$

$$\varphi_2^{(4)}(t, t_1, t_2, t_3) = 2r_\perp^3 e^{-r_\perp(t-t_1+t_2-t_3)} \quad (2.3.43c)$$

とおいた。これらの関数は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt_1 \varphi^{(2)}(t, t_1) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \varphi_i^{(4)}(t, t_1, t_2, t_3) = 1 \quad (2.3.44)$$

という関係を満たす。

TCL形式と、TC形式の「動的演算子」を比べると、2次の項では違いはみられないが、4次の項に違いがみられる。(2.3.41)では、第一項以外の項はすべてNに比例している。これは、TCL形式の減衰理論では、「動的演算子」が、順序付キュムラント⁹⁾で書けるためである。第一項の N^2 に比例する項は、光子系の演算子の交換関係に由来する項であり、2次の「動的演算子」にくり込まれる形をしている。(2.3.42)では、この項はなく、(2.3.41)に含まれている項以外に N^2 に比例する項が存在する。これは、TC形式の減衰理論では、「動的演算子」が不完全キュムラント⁹⁾で書けるためである。

発振点近傍での方程式の性質を調べるために、発振点における定常状態での光子数 $(Nr_\parallel/\kappa)^{1/2}$ で、 $\beta^* \beta$ をスケールする：

$$\tilde{\beta}^* = \beta^* / (Nr_\parallel / \kappa)^{1/4}, \quad \tilde{\beta} = \beta / (Nr_\parallel / \kappa)^{1/4} \quad (2.3.45)$$

このとき、(2.3.40)、(2.3.41)は、

$$\bar{k}_2(t, t_1) = \lambda \varphi^{(2)} r_\parallel [-\sigma_0 (\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + (\kappa / Nr_\parallel)^{1/2} (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \quad (2.3.46)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_4(t, t_1, t_2, t_3) = & -\lambda^2 \varphi_2^{(4)} \frac{r_\parallel^2}{r_\perp} \sigma_0 [-\sigma_0 (\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + (\kappa / Nr_\parallel)^{1/2} (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \\ & + 4 \lambda^2 \varphi_1^{(4)} (r_\parallel / N \kappa)^{1/2} r_\parallel \sigma_0 (\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) \tilde{\beta}^* \beta + O(1/N) \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

となる。ただし、 $\lambda = Ng^2 / r_\perp r_\parallel$ とおいた。 $O(1/N)$ の項を無視すると、基礎方程式は、

$$\dot{\bar{f}}^{(A)}(t) = [(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta})(\kappa - \tilde{\alpha}_l(t) + \tilde{\alpha}_{nl}(t) \tilde{\beta}^* \tilde{\beta}) + \tilde{q}(t) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \bar{f}^{(A)}(t) \quad (2.3.48)$$

という形に書ける。ただし、

$$\tilde{\alpha}_l(t) = \lambda r_\parallel \sigma_0 [\phi^{(2)}(t) - \lambda \phi_2^{(4)}(t) (r_\parallel / r_\perp) \sigma_0] \quad (2.3.49a)$$

$$\tilde{q}(t) = 2\kappa\bar{n} + \lambda r_{\parallel} (\kappa/Nr_{\parallel})^{1/2} (1 + \sigma_0) [\phi^{(2)}(t) - \lambda\phi_2^{(4)}(t)(r_{\parallel}/r_{\perp}\sigma_0)] \quad (2.3.49b)$$

$$\tilde{\alpha}_{nl}(t) = 4\lambda^2 r_{\parallel} \phi_1^{(4)}(t) (r_{\parallel}/N\kappa)^{1/2} \sigma_0 \quad (2.3.49c)$$

$$\phi^{(2)}(t) = \int_0^t dt_1 \phi^{(2)}(t, t_1) \quad (2.3.49d)$$

$$\phi_i^{(4)}(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \phi_i^{(4)}(t, t_1, t_2, t_3) \quad (2.3.49e)$$

とおいた。また、簡単のため、 $t_0 = 0$ とした。

さらに、(2.3.44) に注意して、方程式 (2.3.48) に対し、長時間極限をとると、

$$\dot{\tilde{f}}^{(A)}(t) = [(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta})(\kappa - \tilde{\alpha}_l + \tilde{\alpha}_{nl} \tilde{\beta}^* \tilde{\beta}) + \tilde{q} \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \tilde{f}^{(A)}(t) \quad (2.3.50)$$

となる。ただし、

$$\tilde{\alpha}_l = \tilde{\alpha}_l(t \rightarrow \infty) = \lambda_R r_{\parallel} \sigma_0 \quad (2.3.51a)$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(t \rightarrow \infty) = 2\kappa\bar{n} + \lambda_R r_{\parallel} (\kappa/Nr_{\parallel})^{1/2} (1 + \sigma_0) \quad (2.3.51b)$$

$$\tilde{\alpha}_{nl} = \tilde{\alpha}_{nl}(t \rightarrow \infty) = 4\lambda^2 r_{\parallel} (r_{\parallel}/N\kappa)^{1/2} \sigma_0 \quad (2.3.51c)$$

$$\lambda_R = \lambda [1 - \lambda r_{\parallel} \sigma_0 / r_{\perp}] \quad (2.3.51d)$$

とおいた。この方程式は、Risken が半古典論で導いた Fokker-Planck 方程式 (2.2.25) と一致する。また、量子論的効果による結合定数のくりこみも方程式の中に現われている。4 次までの展開では 2 次の項に対するくり込みしか現われていないが、高次の展開を行えば、4 次の項に対して同様のくり込みが行なわれていることが分かると期待される。

次に、TC 形式の方程式に対する Haake 流の近似について考える。彼は、(2.3.38) に対して長時間近似²⁾ すなわち、原子系の緩和時間が、光子系の緩和時間より短いことから、

$$\int_0^t dt_1 k(t_1) \tilde{f}^{(A)}(t-t_1) \rightarrow \int_0^\infty dt k(t_1) \tilde{f}^{(A)}(t) \quad (2.3.52)$$

と、TC 形式の方程式を TCL 形式の方程式に直す近似をし、前に述べた漸近評価を行なった。しかし、この近似だけでは、(2.3.42) の N^2 に比例する項の中に漸近評価では落とせない項が存在する。彼は、この項は物理的でないとして落としたが、それでは微視的な理論とはいえない。先にみたように、TCL 形式の方程式 (2.3.48) では、このような、人為的な操作は必要なかった。このことから、TC 形式の方程式に対して長時間近似するのは誤りであることが、

確かめられた。

もちろん、長時間近似をしなければ、TC形式の方程式(2.3.38)は、TCL形式の方程式(2.3.37)と全く等価である。(このことは、両方の方程式をラプラス変換で解いてみれば、4次までの近似で答えが一致することで、すぐに確かめられる。)しかし、基礎方程式の段階で系の性質を議論する場合、Riskenの現象論的基礎方程式を含み、量子論的くりこみの効果も方程式の中に陽に現われているTCL形式の方程式(2.3.37)の方が、TC形式の方程式(2.3.38)よりも扱いやすい。

このことは、TCL形式の方程式では、「動的演算子」が、順序付キュムラントで書けることに大きく依存しているので、レーザー基礎方程式の場合だけでなく、一般的に言えることである。

§ 3. モーメントの時間発展

この章では、前章で得られたレーザー系の基礎方程式(2.3.25)を数値的に解き、光子数及び光子数のゆらぎの時間発展を求める。まず、3.1節で、数値計算の方法について述べ、3.2節で、計算結果を示し、その解析を行なう。

3.1 数値計算のための定式化

前章では、基礎方程式(2.3.25)を、反正規順序のボゾンコヒーレント表示で表わしたが、計算機に掛けるためには、正規順序のボゾンコヒーレント表示で表わした方が都合がよい。以下の定式化で、反正規順序の基礎方程式を用いると、光子系の熱浴が絶対零度の場合($\bar{n}=0$)が扱えないからである。(詳しくは補遺を参照のこと) 次に、正規順序のC-数空間での「密度演算子」 $\bar{f}^{(N)}(\sqrt{\frac{2}{\bar{n}+1}} \text{Re} \beta, \sqrt{\frac{2}{\bar{n}+1}} \text{Im} \beta; t)$ を、ある完全直交関数系で展開し、展開係数の連立微分方程式に直し、収束性を確かめ、有限項の連立微分方程式として近似し、ルンゲ・クッタ法を使って計算する。

初期条件として、光子系が真空である場合だけを扱う。すると、原子系を消去する際、 $\langle S_{\mu}^{+} \rangle = \langle S_{\mu}^{-} \rangle = 0$ を仮定しているので、位相部分の積分を先に行なった「密度演算子」

$$\bar{f}^{(N)}(r^2/2; t) r dr = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \bar{f}^{(N)}(r \cos \theta, r \sin \theta; t) r dr \quad (3.1.1)$$

について考えればよいことになる。ただし、

$$\text{Re} \beta = \sqrt{\frac{\bar{n}+1}{2}} r \cos \theta, \quad \text{Im} \beta = \sqrt{\frac{\bar{n}+1}{2}} r \sin \theta \quad (3.1.2)$$

富永哲雄

とおいた。この「密度演算子」を展開する完全直交関数系として、ラゲールの多項式を選ぶ：

$$\bar{f}^{(N)}(X; t) dX = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n(t) e^{-X} L_n(X) dX \quad (3.1.3)$$

ただし、 $X = r^2/2$ とおいた。このとき規格化条件

$$\int_0^{\infty} dX \bar{f}^{(N)}(X; t) = 1 \quad (3.1.4)$$

より、

$$c_0(t) = 1 \quad (3.1.5)$$

となる。また、光子数、光子数のゆらぎは、それぞれ、

$$\langle b^+ b \rangle = \int_0^{\infty} dX (\beta^* \beta - 1) \bar{f}^{(N)}(X; t) = \bar{n} + (\bar{n} + 1) c_1(t) \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta b^+ b)^2 \rangle &= \langle (b^+ b)^2 \rangle - \langle b^+ b \rangle^2 \\ &= \int_0^{\infty} dX (\beta^* \beta^* \beta \beta - 3 \beta^* \beta + 1) \bar{f}^{(N)}(X; t) - \langle b^+ b \rangle^2 \\ &= \bar{n}(\bar{n} + 1) + 2(\bar{n} + 1)^2 c_2(t) + (2\bar{n} + 1)(\langle b^+ b \rangle - \bar{n}) - (\langle b^+ b \rangle - \bar{n})^2 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

で与えられる。また、 $b^+ b$ の n 次のキュムラント平均は、 n 以下の $c_n(t)$ で書けることが分かる。従って、「密度演算子」の展開 (3.1.3) は、光子数のキュムラントに関する展開といふことができる。

展開係数 $c_n(t)$ の満たす連立微分方程式は、(3.1.3) を正規順序のボゾンコヒーレント表示での基礎方程式に代入して求められる。一般的表式は多少複雑であるので補遺に与えることにする。各時刻における $c_1(t)$ 、 $c_2(t)$ を、(3.1.6)、(3.1.7) に代入すれば、光子数、光子数のゆらぎが得られる。なお、たとえば $\langle b^+ \rangle$ 、 $\langle b^+ b^+ \rangle$ 等の非対角成分に関しては、今考えている初期条件では、すべての時刻で零である。

3.2. 計算結果

まず始めに、入力するパラメータについて説明する。入力パラメータは、

κ : 光子系の減衰定数

$r_{\parallel}, r_{\perp}$: 原子系の縦及び横の減衰定数

N : 活性化された原子の個数

g : 光子系と原子系の結合定数

σ : $t = 0$ における反転分布係数

σ_0 : $t = \infty$ における反転分布係数

の7つである。これらは、全く任意に取れるわけではない。レーザーの条件として、

$$\kappa \ll r_{\perp}, r_{\parallel} \quad (3.2.1)$$

があり、 $\lambda = Ng^2/r_{\perp}r_{\parallel}$ は、2.3節の摂動展開のパラメータであるので、

$$\lambda = Ng^2/r_{\perp}r_{\parallel} \ll 1 \quad (3.2.2)$$

が満たされなければならない。また、(2.3.51d) より、

$$|\sigma_0| \ll \frac{r_{\perp}}{\lambda r_{\parallel}} \quad (3.2.3)$$

が必要である。もちろん、 $|\sigma| \leq 1$ 、 $|\sigma_0| \leq 1$ でなければならない。これらの条件を満たすようにパラメータの値を決めるのであるが、計算機の誤差が出ないように、すべての数値が1のオーダーになる尺度で考える。

まず、 κ 、 $r_{\parallel}$ 、 $r_{\perp}$ の値を、それぞれ、0.4、8.0、4.0に設定する。これは、実験装置及び原子の種類を決めたことに相当する。次に、

$$\bar{g}^2 \equiv Ng^2 \quad (3.2.4)$$

これは、漸近評価 ($N \rightarrow \infty$) のときの、光子系と原子系の有効結合定数に相当する。このとき、展開パラメータ λ は、

$$\lambda = \bar{g}^2/r_{\perp}r_{\parallel} \quad (3.2.5)$$

で与えられるので、(3.2.2)の条件を満たすように $\bar{g}^2$ を決め、与えられた λ に対して、活性化された原子数 N 、 $t = 0$ における反転分布係数 σ 、 $t = \infty$ における反転分布係数 σ_0 を(3.2.3)に注意して変化させ、その振舞を調べる。

ここでは特徴的な例として、光子系と原子系の結合が弱い場合 ($\lambda = 0.125$) と、強い場合 ($\lambda = 0.85$) の結果について解析する。

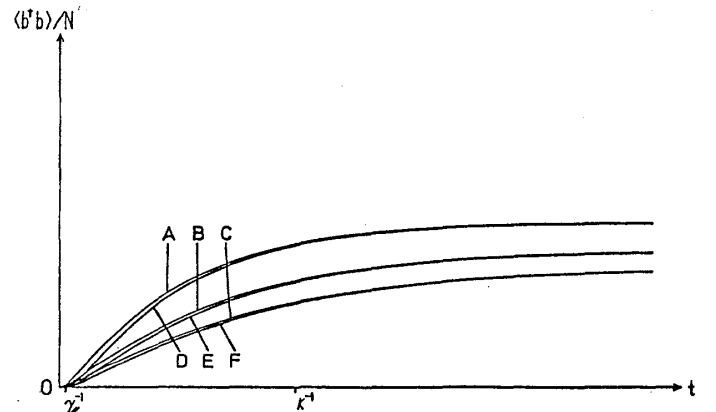


図 1

図1は、 $\lambda = 0.125$ の場合の光子数の時間発展で、ちょうど発振点 ($\sigma_0 = \sigma_{th} = 0.45$) のときの結果である。 N は、3, 5, 7と変化させ、各々の場合について、 σ を、 -1.0 , $+1.0$ と変えて調べた。図との対応は、

A : $N = 3$, $\sigma = +1.0$, D : $N = 3$, $\sigma = -1.0$

B : $N = 5$, $\sigma = +1.0$ E : $N = 5$, $\sigma = -1.0$

C : $N = 7$, $\sigma = +1.0$ F : $N = 7$, $\sigma = -1.0$

である。この場合、A-D, B-E, C-F のちがいは、短い時間領域にすこし現われるだけである。これは、光子系と原子系の結合が弱いために、 $t = 0$ での原子系の情報(σ)が、光子系に影響を与えるよりも速く原子系が最終状態(σ_0)になってしまうためと考えられる。

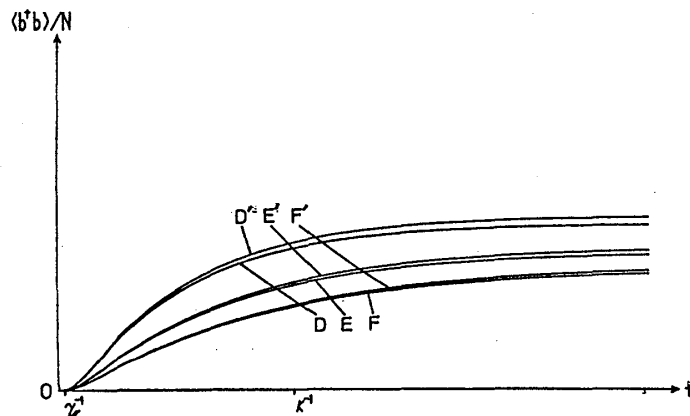


図 2(a)

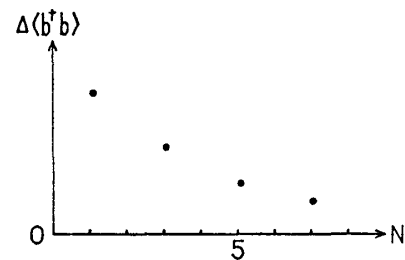


図 2(b)

図2(a)は、図1のD, E, Fの場合について、漸近評価を行なった方程式(2.3.48)での計算結果D', E', F'と比較したものである。図2(b)に示したように、定常状態での光子数が、 N が大きくなるほど漸近評価による光子数に近づいていることにより、2.3節の漸近評価の正当性が確かめられた。

図3, 図4は、 $\lambda = 0.85$ の場合で、発振点以上 ($\sigma_0 > \sigma_{th}$; $\sigma_0 = 0.2$, $\sigma_{th} = 0.06$) のときの光子数と光子数のゆらぎの時間発展である。 N は、2, 3, 4と変化させ、 σ は、 -1.0 , $+1.0$ と変化させて調べた。

図との対応は、

A : $N = 2$, $\sigma = -1.0$,

B : $N = 3$, $\sigma = -1.0$,

C : $N = 4$, $\sigma = -1.0$,

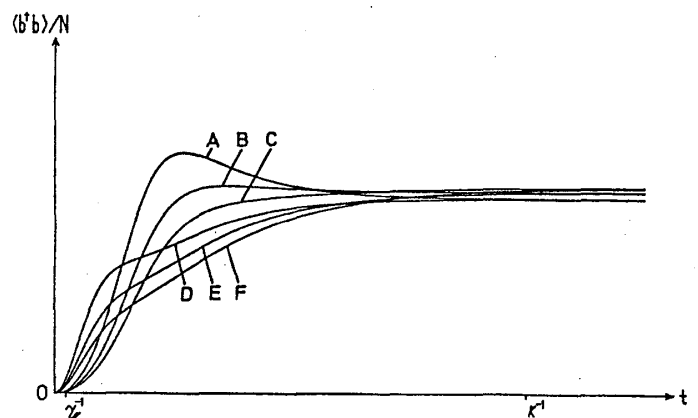


図 3

$$D : N = 2, \quad \sigma = +1.0$$

$$E : N = 3, \quad \sigma = +1.0$$

$$F : N = 4, \quad \sigma = +1.0$$

である。 $\lambda = 0.125$ の場合と異なり、 σ の変化が、途中の振舞に大きく影響を与えている。Aの振舞は、原子が初め基底状態にあり、分極が零であるので励起に時間が掛かり（たち上がりやがゆっくりであること。）、一時、上の準位にある

原子の数が最終値より多くなるが（ピーク）、その後、定常値へ緩和しているためであると考えられる。Dの振舞は、初めすべての原子が上の準位にあり（やはり分極が零である。）、自然放出が引金となって一気に光を放出するが、光子系との結合が強いので光を放出しすぎてしまい、逆に光子系からエネルギーを再吸収し、その後、定常値へ緩和していることの反映であると考えられる。 N をふやしていくと、それらの振舞は顕著でなくなるが、その傾向は、ずっと残ると思われる。

図5、図6は、図4、図5の $N = 2$ (A, D) の場合について、光子数と光子数のゆらぎの時間発展を、長時間極限をとった方程式(2.3.50)での結果Cと比較したものである。Bは、 σ がAとDの中間の値 $\sigma = 0.2$ の場合である。長時間極限をとった方程式では、最終的な定常値は、正しく求

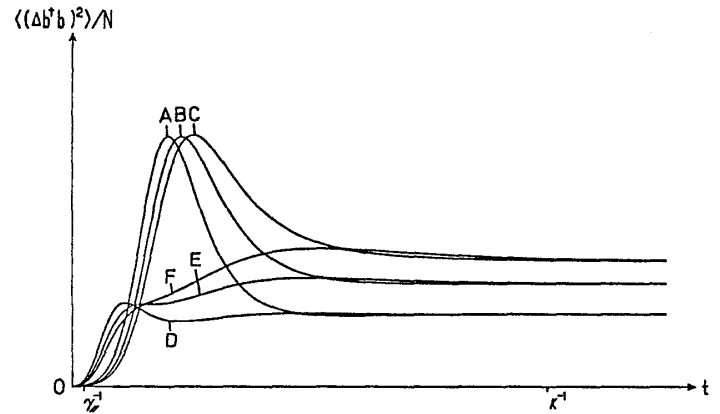


図 4

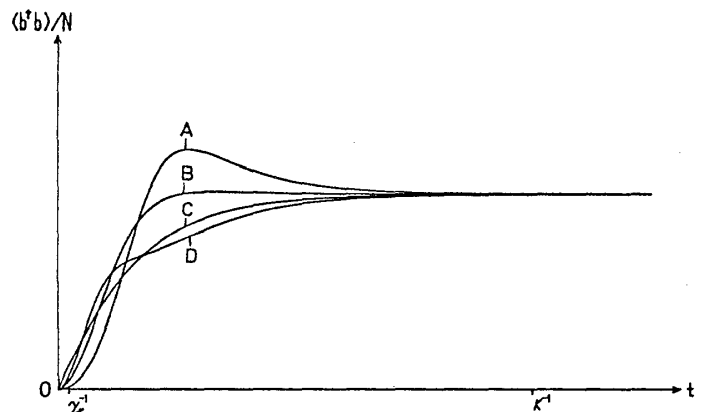


図 5

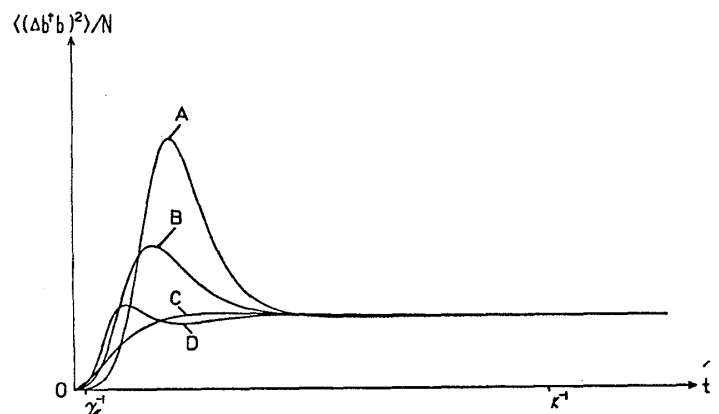


図 6

めることができるが、原子系の初期値に依存する途中の振舞が全く記述できないことがよく分かる。

図 7 は、 $\lambda = 0.85$ の場合について、発振点近傍の $\langle b^+ b \rangle_{t \rightarrow \infty} / N$ の値をプロットしたものである。各 σ_0 とも、4 点ずつあるが、上から $N = 2, 3, 4, 5$ の結果である。また、実線は、電磁場を古典的でしかも分子場的に扱ったときの結果(2.2.16)である。 N が大きくなるに従って分子場による結果に近づく傾向が見られる。また、 $\langle b^+ b \rangle_{t \rightarrow \infty} / N$ は、 $\sigma_0 \lesssim \sigma_{th}$ のときは、 N によって大きく変化するが、 $\sigma_0 > \sigma_{th}$ では、値自体が大きく、 N による変化はほとんどない。これは、 $\sigma_0 > \sigma_{th}$ では、定常状態における光子数が多くなり、古典的描像

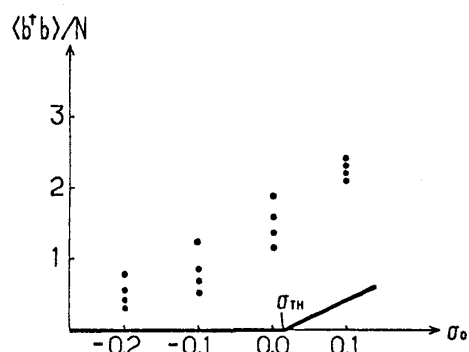


図 7

が成り立つためと考えられる。

$$\langle b^+ b \rangle_{t \rightarrow \infty} \propto N \quad (3.2.6)$$

が成り立つためと考えられる。

方程式の性質を調べるため、特徴的な場合だけを調べたわけだが、結果は以上見てきたように、物理的に理解できる。もちろん、この様な結果は、現象論からは得ることができず、微視的理論で初めて得られたものである。この意味で、微視的理論の重要性が再確認されたものと言える。

§ 4. 結び

非平衡統計力学において、平衡（又は、定常）状態から十分離れた場合も扱える方法論を確立するという問題は、非常に重要である。減衰理論における、TC、TCL形式の一般的な摂動展開公式⁹⁾及び、不完全キュムラント、順序付キュムラントの系統的計算法としてのダイアグラム法¹⁰⁾は、この問題に対する一つの有力な方法となっている。そこで、この方法論を発展させて、非線形非平衡系を扱う一般的な枠組を完成させる必要がある。そのためには、まず、この方法論の可能性や限界を、いろいろな角度から調べなければならないわけだが、レーザー系は、その点最も適した例題となっている。

レーザー系に関しては、以前 Haake²⁾ が TC 形式の減衰理論^{6),7)} を使ってその基礎方程式を導出しているが、Risken の現象論¹⁾ を微視的に裏付ける、という点に重点が置かれていたので、非平衡統計力学の方法論という観点からこの問題を見直すことは意義深いことであった。

減衰理論で得られた方程式(2.3.25)、(2.3.36)に対し、2.3節で述べた漸近評価を行なう

と、それぞれ、反正規順序のボゾンコヒーレント表示で、

$$\dot{f}(t) = [\kappa(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + 2\kappa \bar{n} (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] f(t) + [K_2(t) + K_4(t)] f(t) \quad (4.1a)$$

$$K_2(t) = \lambda r_{\parallel} \phi^{(2)}(t) [-\sigma_0(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \quad (4.1b)$$

$$K_4(t) = -\lambda^2 \frac{r_{\parallel}^2}{r_{\perp}} \sigma_0 \phi_2^{(4)}(t) [-\sigma_0(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \\ + 4\lambda^2 \phi_1^{(4)}(t) (\frac{r_{\parallel}}{\kappa N})^{1/2} r_{\parallel} \sigma_0 (\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) \tilde{\beta}^* \tilde{\beta} + O(1/N) \quad (4.1c)$$

及び、

$$\dot{f}(t) = [\kappa(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + 2\kappa \bar{n} (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] f(t) + \int_0^t dt_1 (k_2(t_1) + k_4(t_1)) f(t-t_1) \quad (4.2a)$$

$$k_2(t) = \lambda r_{\parallel} \phi^{(2)}(t) [-\sigma_0(\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial}] \quad (4.2b)$$

$$k_4(t) = 4\lambda^2 \phi_1^{(4)}(t) (\frac{r_{\parallel}}{N \kappa})^{1/2} r_{\parallel} \sigma_0 (\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) \tilde{\beta}^* \tilde{\beta} \\ + \lambda^2 \phi_2^{(4)}(t) (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} \frac{r_{\parallel}^2}{r_{\perp}} \sigma_0 (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial} \\ + \lambda^2 \phi_2^{(4)}(t) \frac{r_{\parallel}^2}{r_{\perp}} \sigma_0^2 (\tilde{\partial}_*^2 \tilde{\beta}^{*2} + 2\tilde{\partial}_* \tilde{\partial} \tilde{\beta}^* \tilde{\beta} + \tilde{\partial}^2 \tilde{\beta}^2) \\ - 2\lambda^2 \phi_2^{(4)}(t) (\frac{\kappa}{N r_{\parallel}})^{1/2} \frac{r_{\parallel}^2}{r_{\perp}} \sigma_0 (1 + \sigma_0) \tilde{\partial}_* \tilde{\partial} (\tilde{\partial}_* \tilde{\beta}^* + \tilde{\partial} \tilde{\beta}) + O(1/N) \quad (4.2c)$$

で与えられる。ただし、

$$\phi^{(2)}(t) = r_{\perp} e^{-r_{\perp} t} \quad (4.3a)$$

$$\phi_1^{(4)}(t) = \frac{r_{\perp}^2 r_{\parallel}}{(r_{\perp} - r_{\parallel})^2} [e^{-r_{\parallel} t} - \{1 + (r_{\perp} - r_{\parallel}) t\} e^{-r_{\perp} t}] \quad (4.3b)$$

$$\phi_2^{(4)}(t) = 2r_{\perp} [e^{-2r_{\perp} t} - (1 - r_{\perp} t) e^{-r_{\perp} t}] \quad (4.3c)$$

$$\phi^{(2)}(t) = \int_0^t dt_1 \phi^{(2)}(t_1) \quad \text{etc.} \quad (4.3d)$$

とおいた。

(4.1a) に対し長時間極限をとると、Riskénの方程式と一致し、結合定数のくり込みの効果（(4.1c)の第一項）が見られることが分かった。つまり、TCL形式の方程式(2.3.25)は、Riskénの方程式も含んでいる。

一方、(4.2a) に対し長時間近似を行なったとしても、(4.2b) の第二項～第四項のために Risken の方程式には一致しない。Haake は、これらの項を物理的でないと落としたが、それでは微視的な理論とは言えなくなってしまう。このことから、TC 形式の方程式に対して長時間近似するのは誤りであることが確かめられた。また、(4.2) の表式には、(4.1) でみられた結合定数のくりこみの効果は陽に現われていない。

以上のことから、基礎方程式の段階で系の性質を調べようとする場合、TCL 形式の方程式の方が有力であると言える。

TCL 形式の方程式 (2.3.25) を数値的に解いて光子数及び光子数のゆらぎの時間発展を調べた結果、現象論的方程式では記述できないような初期段階での特徴的な振舞も、(2.3.25) で記述できることが分かった。つまり、微視的理論の重要性が再確認されたわけである。

今後の課題は、この方法論を他の非平衡系に応用することである。その例として、非平衡超伝導^{24)–28)}があげられる。実験では、強い光を当てたり、電流を流したりして準粒子が過剰な状態を作り、その性質について調べられているが、理論的には分かっていない問題が多い。この系は本質的に非平衡であるので、減衰理論は微視的理論としての威力をここでも発揮するものと期待される。

補遺 I. 減衰理論

非平衡統計力学の微視的な理論を展開する上で、一つの有力な方法論として、減衰理論^{6),7),9)}があげられる。減衰理論の一般的な摂動展開公式として、時間非たたみ込み形式⁹⁾(TCL) と、時間たたみ込み形式⁹⁾(TC) が知られている。ここでは、その2つの展開公式を紹介し、その違いを指摘する。

密度演算子 $W(t)$ が、Liouville 方程式、

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t) = L(t)W(t) \quad (I.1)$$

に従う系を考える。Liouville 演算子 $L(t)$ は、無摂動部分 L_0 と、摂動部分 $gL_1(t)$ に分離されることが多い。

$$L(t) = L_0 + gL_1(t) \quad (I.2)$$

g での展開が行ない易い様に、(I.1) を、

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{W}(t) = g \hat{L}_1(t) \hat{W}(t) \quad (I.3)$$

と変形する。ただし,

$$\hat{W}(t) = e^{-L_0 t} W(t), \quad \hat{L}_1(t) = e^{-L_0 t} L_1(t) e^{L_0 t} \quad (I.4)$$

とおいた。射影演算子 P , $Q = 1 - P$ を導入し, 密度演密子を, 必要な部分 $P\hat{W}(t)$ と, 不必要な部分 $Q\hat{W}(t)$ に分ける。(I.3) に P , Q を作用させて,

$$\frac{\partial}{\partial t} P\hat{W}(t) = g P\hat{L}_1(t) P\hat{W}(t) + g P\hat{L}_1(t) Q\hat{W}(t) \quad (I.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q\hat{W}(t) = g Q\hat{L}_1(t) P\hat{W}(t) + g Q\hat{L}_1(t) Q\hat{W}(t) \quad (I.6)$$

を得る。(I.6) を解くと,

$$Q\hat{W}(t) = G(t, t_0) Q\hat{W}(t_0) + \int_{t_0}^t dt G(t, \tau) g Q\hat{L}_1(t) P\hat{W}(\tau) \quad (I.7)$$

となる。これを (I.5) に代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} P\hat{W}(t) = g P\hat{L}_1(t) P\hat{W}(t) + \int_{t_0}^t d\tau \Phi(t, \tau) P\hat{W}(\tau) + I(t) \quad (I.8)$$

が得られる。^{6),7)} ただし,

$$G(t, \tau) = \exp_+ \left[g \int_{\tau}^t Q\hat{L}_1(s) ds \right] \quad (I.9)$$

$$\Phi(t, \tau) = g^2 P\hat{L}_1(t) G(t, \tau) Q\hat{L}_1(t) \quad (I.10)$$

$$I(t) = g P\hat{L}_1(t) G(t, t_0) Q\hat{W}(t_0) \quad (I.11)$$

である。(I.9) の $\exp_+ [\]$ は, 時間順序付指数関数と呼ばれ,

$$\begin{aligned} \exp_+ \left[g \int_{\tau}^t Q\hat{L}_1(s) ds \right] &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \int_{\tau}^t dt_1 \int_{\tau}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{\tau}^{t_{n-1}} dt_n Q\hat{L}_1(t_1) Q\hat{L}_1(t_2) \\ &\quad \cdots Q\hat{L}_1(t_n) \end{aligned} \quad (I.12)$$

で定義される。(I.8) の形の方程式は, 時間たたみ込み型の方程式と呼ばれ, たたみ込み積分の項は, 記憶効果を表わすと考えられている。

(I.8) の一般的な摂動展開式を得るために, $\Phi(t, \tau)$ を g について展開する。まず, $G(t, \tau)$ を g について展開すると,

$$G(\tau, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n G_n(t, \tau) \quad (I.13)$$

富永哲雄

となる。ただし,

$$G_n(t, \tau) = \int_{\tau}^t dt_1 \int_{\tau}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{\tau}^{t_{n-1}} dt_n Q \hat{L}_1(t_1) Q \hat{L}_1(t_2) \cdots Q \hat{L}_1(t_n) \quad (I.14)$$

である。従って,

$$\Phi(t, \tau) = \sum_{n=2}^{\infty} g^n \Phi_n(t, \tau) \quad (I.15)$$

という形に展開すると,

$$\Phi_n(t, \tau) = P \hat{L}_1(t) G_{n-2}(t, \tau) Q \hat{L}_1(t) \quad (I.16)$$

となる。そして, (I.8) の第二項は,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \Phi(t, \tau) P \hat{W}(\tau) &= \sum_{n=2}^{\infty} g^n \int_{t_0}^t d\tau \Phi_n(t, \tau) P \hat{W}(\tau) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} g^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} P \hat{L}_1(t) Q \hat{L}_1(t_1) \cdots Q \hat{L}_1(t_{n-1}) P \hat{W}(t_{n-1}) \end{aligned} \quad (I.17)$$

となる。ここで, 射影演算子として,

$$PX = \langle X \rangle \quad (I.18)$$

という平均演算を考えると, (I.17) は,

$$\begin{aligned} (I.17) &= \sum_{n=2}^{\infty} g^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \\ &\quad \cdots \hat{L}_1(t_{n-1}) \rangle_{P.C.} \langle \hat{W}(t_{n-1}) \rangle \end{aligned} \quad (I.19)$$

となる。 $\langle \cdots \rangle_{P.C.}$ は, 不完全キュムラントと呼ばれ, 一般形は

$$\langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \cdots \hat{L}_1(t_{n-1}) \rangle_{P.C.} = \sum (-1)^{q-1} \Pi \langle \hat{L}_1(t) \cdots \rangle \langle \hat{L}_1(t_i) \cdots \rangle \langle \hat{L}_1(t_j) \cdots \rangle \cdots \quad (I.20)$$

となる。和は, 時間の順序 $t > t_1 > \cdots > t_{n-1}$ の通りに演算子 $\hat{L}_1$ が並んでいるわけだが, その順序を変えないで平均を分割するときの可能なすべての分割についてとる。 q は, 各項における分割の数である。不完全キュムラントの最初の三つは,

$$\langle \hat{L}_1(t) \rangle_{\text{P.C.}} = \langle \hat{L}_1(t) \rangle \quad (\text{I. 21 a})$$

$$\langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \rangle_{\text{P.C.}} = \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \rangle - \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \rangle \quad (\text{I. 21 b})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_1(t_2) \rangle_{\text{P.C.}} &= \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_1(t_2) \rangle - \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \rangle \langle \hat{L}_1(t_2) \rangle \\ &\quad - \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_1(t_2) \rangle + \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \rangle \langle \hat{L}_1(t_2) \rangle \end{aligned} \quad (\text{I. 21 c})$$

で与えられる。この摂動展開公式は、(I. 8) が、時間たたみ込み形の方程式であるので、時間たたみ込み (TC) 形式の摂動展開公式と呼ばれる⁹⁾

$P\hat{W}(t)$ に対する方程式は、これだけでなく、時間非たたみ込み形の方程式も得ることができる。(I. 3) の解を、形式的に、

$$\hat{W}(\tau) = G(t, \tau) \hat{W}(t) \quad (t > \tau) \quad (\text{I. 22})$$

という形に求める。ただし、

$$G(t, \tau) = \exp_- \left[-g \int_{\tau}^t \hat{L}_1(s) ds \right] \quad (\text{I. 23})$$

で与えられる。 $\exp_- [\quad]$ は、時間逆順序付指数関数と呼ばれ、

$$\begin{aligned} \exp_- \left[-g \int_{\tau}^t \hat{L}_1(s) ds \right] \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-g)^n \int_{\tau}^t dt_1 \int_{\tau}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{\tau}^{t_{n-1}} dt_n \hat{L}_1(t_n) \cdots \hat{L}_1(t_2) \hat{L}_1(t_1) \end{aligned} \quad (\text{I. 24})$$

で定義される。(I. 23) を、(I. 7) に代入すると、

$$Q\hat{W}(t) = G(t, t_0) Q\hat{W}(t_0) + g \int_{t_0}^t G(t, \tau) Q\hat{L}(\tau) P G(t, \tau) d\tau (P+Q) \hat{W}(t) \quad (\text{I. 25})$$

となる。この式から $Q\hat{W}(t)$ を求めて、(I. 5) の右辺に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} P\hat{W}(t) = K(t) P\hat{W}(t) + I(t) \quad (\text{I. 26})$$

という、時間非たたみ込み型の方程式が得られる⁹⁾。ただし、

$$K(t) = g P \hat{L}_1(t) [1 - \Sigma(t)]^{-1} \quad (\text{I. 27})$$

$$I(t) = g P \hat{L}_1(t) [1 - \Sigma(t)]^{-1} G(t, t_0) Q\hat{W}(t_0) \quad (\text{I. 28})$$

$$\Sigma(t) = g \int_{t_0}^t G(t, \tau) Q \hat{L}_1(\tau) P G(t, \tau) \quad (I. 29)$$

である。前と同様に、一般的な摂動展開式を得るために、 $K(t)$ を、

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n K_n(t) \quad (I. 30)$$

の形に展開すると、

$$K_n(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} k_n(t, t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (I. 31)$$

となる。ただし、

$$k_n(t, t_1, \dots, t_{n-1}) = \sum (-1)^{q-1} \Pi P \hat{L}_1(t) \cdots \hat{L}_1(t_i) P \hat{L}_1(t_j) \cdots \hat{L}_1(t_l) P \hat{L}_1(t_m) \cdots \quad (I. 32)$$

である。和は、時間の順序 $t > \cdots > t_i, t_j > \cdots > t_l, t_m > \cdots$ を保ったすべての分割についてとる。 q は、各項における分割の数である。射影演算子 P が、(I. 18) の場合、

$$k_n(t, t_1, \dots, t_{n-1}) = \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \cdots \hat{L}_1(t_{n-1}) \rangle_{\text{o.c.}} \quad (I. 33)$$

と、順序付キュムラント⁹⁾で書ける。最初の三つは、

$$\langle \hat{L}_1(t) \rangle_{\text{o.c.}} = \langle \hat{L}_1(t) \rangle \quad (I. 34a)$$

$$\langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \rangle_{\text{o.c.}} = \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \rangle - \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \rangle \quad (I. 34b)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_1(t_2) \rangle_{\text{o.c.}} &= \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_1(t_2) \rangle - \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_1) \rangle \langle \hat{L}_1(t_2) \rangle \\ &\quad - \langle \hat{L}_1(t) \hat{L}_1(t_2) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \rangle - \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \hat{L}_1(t_2) \rangle \\ &\quad + \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \rangle \langle \hat{L}_1(t_2) \rangle + \langle \hat{L}_1(t) \rangle \langle \hat{L}_1(t_2) \rangle \langle \hat{L}_1(t_1) \rangle \end{aligned} \quad (I. 34c)$$

で与えられる。この摂動展開式は、(I. 26) が時間非たたみ込み型の方程式であるので、時間非たたみ込み (TCL) 形式の摂動展開式と呼ばれる⁹⁾。

TC, TCL という二つの展開式が得られたわけだが、異なる点は、TC で、不完全キュムラント演算子とのたたみ込み積分をする操作が、TCL では、順序付キュムラント演算子を掛ける操作に置き換わったことである。演算子が C-数の場合は、順序付キュムラントは、普通のキュムラントになるが、不完全キュムラントは、そうならない。

TCLにおいて記憶の効果は、(I.26)の $K(t)$ の中に入っている。このことは、記憶効果のくり込みと言われる。

補遺Ⅱ. ダイアグラム法¹⁰⁾

A系とB系が相互作用している問題に関して、減衰理論の摂動展開公式を使う場合、

$$\langle H_{AB}^{\times}(t) H_{AB}^{\times}(t_1) \cdots H_{AB}^{\times}(t_{n-1}) \rangle_B^{\bullet C} \rho_A \quad (\text{II.1})$$

という計算が必要になる。ただし、 H_{AB} は、相互作用ハミルトニアンであり、

$$\langle \cdots \rangle_B = \text{tr}_B \cdots \rho_B \quad (\text{II.2})$$

である。 $\bullet C$ は、順序づけられたキュムラント(O.C)又は、不完全キュムラント(P.C)のどちらかをとる。 $H_{AB}(t)$ は、時間発展演算子 $T(t)$ を使って、

$$H_{AB}(t) = T^{-1}(t) H_{AB} T(t) \quad (\text{II.3})$$

という形に書ける。 $T(t)$ の中には、B系の演算子も含まれているので、(II.1)の計算は、次数が上がるとともに非常に複雑になる。そこで、鏡映演算子¹⁰⁾を考え、それにダイアグラムを対応させる有光の方法を使うと、(II.1)の具体的な表式を、ダイアグラムで形式的に表わすことができるので、計算の見通しが非常に良くなる。この節では、その基本となる考え方を簡単に説明する。

(II.1)の計算をするときには、

$$\begin{aligned} H_{AB}^{\times}(t_k) X &= T^{-1}(t_k) H_{AB}^{\times} T(t_k) X \\ &= T^{-1}(t_k) \{ H_{AB}(T(t_k) X) \} - T^{-1}(t_k) \{ (T(t_k) X) H_{AB} \} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

の形の項が基本となる。ここで、 $T(t_k)$ は、自分の右側のものに演算しているのであるが、これと同じ寄与をし、自分の左側のものに演算する演算子(鏡映演算子) $\overleftarrow{T}(t_k)$,

$$T(t_k) X = X \overleftarrow{T}(t_k) \quad (\text{II.5})$$

を考えると、(II.4)は、

$$H_{AB}^{\times}(t_k) X = T^{-1}(t_k) H_{AB} T(t_k) X - X \overleftarrow{T}(t_k) H_{AB} \overleftarrow{T}^{-1}(t_k) \quad (\text{II.6})$$

富永哲雄

と書き換えられる。これを，ダイアグラムと対応させるのであるが，簡単のため，A系とB系の相互作用が，

$$H_{AB} = ab \quad (II.7)$$

の形に書けるものとする。ただし， a ， b は，それぞれ，A系，B系の演算子である。時間発展演算子は，A系の部分 T_A と，B系の部分 T_B に分けられる。

$$T(t_k) = T_A(t_k) T_B(t_k), \quad \overleftarrow{T}(t_k) = \overleftarrow{T}_A(t_k) \overleftarrow{T}_B(t_k) \quad (II.8)$$

今，

$$\Rightarrow_k \equiv T_A^{-1}(t_k) a T_A(t_k), \quad \Leftarrow_k \equiv -\overleftarrow{T}_A(t_k) a \overleftarrow{T}_B^{-1}(t_k) \quad (II.9a)$$

$$\rightarrow_k \equiv T_B^{-1}(t_k) b T_B(t_k), \quad \leftarrow_k \equiv \overleftarrow{T}_B(t_k) b \overleftarrow{T}_B^{-1}(t_k) \quad (II.9b)$$

$$\parallel \equiv X \quad (II.9c)$$

とおくと，(II.6)は，

$$H_{AB}^\times(t_k) X = \Rightarrow_k \parallel + \parallel \Leftarrow_k \quad (II.10)$$

と，ダイアグラムを使って書ける。さらに， $X = \rho_B \rho_A$ (ρ_A ， ρ_B は，それぞれA系，B系の密度演算子)のとき，

$$\parallel \equiv \rho_A, \quad | \equiv \rho_B \quad (II.9d)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \langle H_{AB}^\times(t_k) \rangle_B \rho_A &= \text{tr}_B H_{AB}^\times(t_k) \rho_B \rho_A \\ &= \langle \Rightarrow_k | \rangle_B [\Rightarrow_k, \parallel] \end{aligned} \quad (II.11)$$

と書ける。ただし，

$$[\Rightarrow_k, \parallel] \equiv \Rightarrow_k \parallel + \parallel \Leftarrow_k \quad (II.12)$$

であり，跡の性質，

$$\langle \Leftarrow_k \rangle_B = \langle \Rightarrow_k | \rangle_B \quad (II.13)$$

を使った。

高次の項は、(Ⅱ.11)の(|, ||)のところを、(→|, ⇨||), (|←, ||⇨)等で置き換えれば良いことが分かる。2次, 3次, 4次の項は、それぞれ,

$$\langle H_{AB}^\times(t) H_{AB}^\times(t_1) \rangle_B \rho_A = \langle \begin{smallmatrix} \rightarrow & | \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} ||] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & || \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] \quad (\text{Ⅱ.14})$$

$$\begin{aligned} \langle H_{AB}^\times(t) H_{AB}^\times(t_1) H_{AB}^\times(t_2) \rangle_B \rho_A \\ = \langle \begin{smallmatrix} \rightarrow & \rightarrow & | \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & \rightleftharpoons \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix} ||] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow & \rightarrow \\ 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix} \leftarrow] \\ + \langle \begin{smallmatrix} \leftarrow & \leftarrow & | \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || \\ 0 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow & \leftarrow \\ 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & || & \leftarrow \\ 0 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] \end{aligned} \quad (\text{Ⅱ.15})$$

$$\begin{aligned} \langle H_{AB}^\times(t) H_{AB}^\times(t_1) H_{AB}^\times(t_2) H_{AB}^\times(t_3) \rangle_B \rho_A \\ = \langle \begin{smallmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & \rightleftharpoons \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} ||] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \leftarrow] \\ + \langle \begin{smallmatrix} \leftarrow & \rightarrow & \rightarrow & | \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix} \leftarrow] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow & \leftarrow & \rightarrow \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || & \leftarrow \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix} \leftarrow] \\ + \langle \begin{smallmatrix} \leftarrow & \leftarrow & \rightarrow & | \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || & \leftarrow \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] \\ + \langle \begin{smallmatrix} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & | \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & \rightleftharpoons & || & \leftarrow \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] + \langle \begin{smallmatrix} | & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \rangle_B [\begin{smallmatrix} \rightleftharpoons & || & \leftarrow & \leftarrow \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \leftarrow] \end{aligned} \quad (\text{Ⅱ.16})$$

で与えられる。

補遺Ⅲ. ダイアグラム法による計算

2.3節の計算では、 $\langle S_\mu^+ \rangle = 0$, $\langle S_\mu^- \rangle = 0$ と仮定したので、4次の不完全キュムラント及び順序付キュムラントは、それぞれ,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_2) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_3) \rangle_{P,C} \bar{\rho}(t_3) \\ = \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_2) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_3) \rangle \bar{\rho}(t_3) \\ - \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_2) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_3) \rangle \bar{\rho}(t_3) \end{aligned} \quad (\text{Ⅲ.1})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_2) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_3) \rangle_{O,C} \bar{\rho}(t) \\ = \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_2) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_3) \rangle \bar{\rho}(t) \\ - \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_2) \hat{\mathcal{H}}_{AL}^\times(t_3) \rangle \bar{\rho}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_2) \rangle &= \langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_1) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_3) \rangle \bar{\rho}(t) \\
 -\langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_3) \rangle &= \langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_1) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_2) \rangle \bar{\rho}(t)
 \end{aligned} \quad (\text{III. 2})$$

で与えられる。ただし、平均の定義は (2.3.31) である。また、2次の不完全キュムラント、順序付キュムラントは一致し、

$$\langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_1) \rangle_{\text{P.C}} \bar{\rho}(t_1) = \langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_1) \rangle \bar{\rho}(t_1) \quad (\text{III. 3})$$

$$\langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_1) \rangle_{\text{O.C}} \bar{\rho}(t) = \langle \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t) \hat{\mathcal{A}}_{\text{AL}}^\times(t_1) \rangle \bar{\rho}(t) \quad (\text{III. 4})$$

で与えられる。従って、TCL 形式の2次、4次の「動的演算子」は、光子系の演算子の交換に注意すると、それぞれ、次の様に、ダイアグラムを使って表わせる。

$$\bar{k}_2(t, t_1) \bar{\rho}(t) = \sum_{\mu, \nu} (\langle \overset{*}{\rightarrow}_0 \overset{*}{\rightarrow}_1 | \rangle_{\text{O.C}} [\overset{*}{\rightarrow}_0, \overset{*}{\rightarrow}_1 |] + \langle \overset{*}{\rightarrow}_0 \overset{*}{\rightarrow}_1 | \rangle_{\text{O.C}} [\overset{*}{\rightarrow}_0, \overset{*}{\rightarrow}_1 |] + \text{h.c}) \quad (\text{III. 5})$$

$$\bar{k}_4(t, t_1, t_2, t_3) \bar{\rho}(t) = \sum_{x=a}^f \bar{k}_4^{(x)}(t, t_1, t_2, t_3) \bar{\rho}(t) \quad (\text{III. 6})$$

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_4^{(x)}(t, t_1, t_2, t_3) \bar{\rho}(t) = & \sum_{\mu, \nu, \alpha, \tau} \{ \langle \rightarrow_0 \rightarrow_1 \rightarrow_2 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, \rightarrow_1 \rightarrow_2 \rightarrow_3 |] \\
 & + \langle \leftarrow_3 \rightarrow_0 \rightarrow_1 \rightarrow_2 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, \rightarrow_1 \rightarrow_2 \leftarrow_3 |] + \langle \leftarrow_2 \rightarrow_0 \rightarrow_1 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, \rightarrow_1 \rightarrow_2 \leftarrow_3 |] \\
 & + \langle \leftarrow_1 \leftarrow_0 \rightarrow_2 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, \rightarrow_2 \rightarrow_3 \leftarrow_1 |] \\
 & + \langle \rightarrow_0 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} \langle \rightarrow_1 \rightarrow_2 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, (\rightarrow_1 \rightarrow_2 \rightarrow_3 - \rightarrow_3 \rightarrow_1 \rightarrow_2) |] \\
 & + \langle \rightarrow_0 \rightarrow_2 | \rangle_{\text{O.C}} \langle \rightarrow_1 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, (\rightarrow_1 \rightarrow_2 \rightarrow_3 - \rightarrow_2 \rightarrow_1 \rightarrow_3) |] \\
 & + \langle \rightarrow_0 \rightarrow_2 | \rangle_{\text{O.C}} \langle \leftarrow_3 \leftarrow_1 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, (\rightarrow_1 \rightarrow_2 - \rightarrow_2 \rightarrow_1) \leftarrow_3 |] \\
 & + \langle \rightarrow_0 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} \langle \leftarrow_2 \leftarrow_1 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, (\rightarrow_1 \rightarrow_3 - \rightarrow_3 \rightarrow_1) \leftarrow_2 |] \\
 & + \langle \rightarrow_0 \rightarrow_3 | \rangle_{\text{O.C}} \langle \rightarrow_1 \rightarrow_2 | \rangle_{\text{O.C}} [\rightarrow_0, (\rightarrow_2 \rightarrow_3 - \rightarrow_3 \rightarrow_2) \leftarrow_1 |] + \text{h.c} \} \quad (\text{III. 7})
 \end{aligned}$$

$$| = \rho_A, \quad || = \bar{\rho}(t) \quad (\text{III. 8a})$$

$$\overset{*}{\rightarrow}_k = e^{-A_{\text{L}}^{t_k}} b e^{A_{\text{L}}^{t_k}}, \quad \leftarrow_k = -e^{\overleftarrow{A}_{\text{L}}^{t_k}} b e^{-\overleftarrow{A}_{\text{L}}^{t_k}} \quad (\text{III. 8b})$$

$$\overset{*}{\leftarrow}_k = e^{-A_{\text{L}}^{t_k}} b^+ e^{A_{\text{L}}^{t_k}}, \quad \overset{*}{\rightarrow}_k = -e^{\overleftarrow{A}_{\text{L}}^{t_k}} b e^{-\overleftarrow{A}_{\text{L}}^{t_k}} \quad (\text{III. 8c})$$

$$\overrightarrow{k} = e^{-A_{A^k} S_{\mu}^{-}} e^{A_{A^k}}, \quad \overleftarrow{k} = e^{\overleftarrow{A}_{A^k} S_{\mu}^{-}} e^{-\overleftarrow{A}_{A^k}} \quad (\text{III. 8d})$$

$$\overrightarrow{k}^* = e^{-A_{A^k} S_{\mu}^{+}} e^{A_{A^k}}, \quad \overleftarrow{k}^* = e^{\overleftarrow{A}_{A^k} S_{\mu}^{+}} e^{-\overleftarrow{A}_{A^k}} \quad (\text{III. 8e})$$

ただし, (III. 5), (III. 7) の和はスピンの足についてとり, (III. 6) の和は,

$$\left. \begin{aligned} a : & \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3} \right), \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}^*, \overrightarrow{3}^* \right) \\ b : & \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}^*, \overrightarrow{3}^* \right), \left(\overrightarrow{0}^*, \overrightarrow{1}^*, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3} \right) \\ c : & \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}^*, \overrightarrow{3} \right), \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}^*, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3}^* \right) \\ d : & \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}^*, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3}^* \right), \left(\overrightarrow{0}^*, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}^*, \overrightarrow{3} \right) \\ e : & \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}^*, \overrightarrow{2}^*, \overrightarrow{3} \right), \left(\overrightarrow{0}^*, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3}^* \right) \\ f : & \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3}^* \right), \left(\overrightarrow{0}^*, \overrightarrow{1}^*, \overrightarrow{2}, \overrightarrow{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 9})$$

についてとる。また, TC 形式の 4 次の「動的演算子」は,

$$\overline{k}_4^{\text{TC}}(t, t_1, t_2, t_3) = \sum_{x \in a}^f \overline{k}_4^{\text{TC}(x)}(t, t_1, t_2, t_3) \overline{\rho}(t_3) \quad (\text{III. 10})$$

$$\begin{aligned} \overline{k}_4^{\text{TC}(x)} \overline{\rho}(t_3) = & \sum_{\mu, \nu, \alpha, \gamma} \{ \langle \overrightarrow{0} \overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overrightarrow{3} | \rangle_{\text{P.C}} [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{2} \overrightarrow{3} \overrightarrow{4} \parallel] \\ & + \langle \overrightarrow{3} \overrightarrow{0} \overrightarrow{1} \overrightarrow{2} | \rangle_{\text{P.C}} [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overrightarrow{3} \parallel \overrightarrow{4}] + \langle \overrightarrow{2} \overrightarrow{0} \overrightarrow{1} \overrightarrow{3} | \rangle_{\text{P.C}} [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1} \overrightarrow{3} \overrightarrow{2} \parallel \overrightarrow{4}] \\ & + \langle \overrightarrow{1} \overrightarrow{0} \overrightarrow{2} \overrightarrow{3} | \rangle_{\text{P.C}} [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{2} \overrightarrow{3} \overrightarrow{1} \parallel \overrightarrow{4}] + \text{h.c} \} \end{aligned} \quad (\text{III. 11})$$

で与えられる。

(III. 5), (III. 7), (III. 11) に表われるスピン演算子の平均は, 2 時間グリーン関数 (2. 3. 33) を使って,

$$\sum_{\mu\nu} \langle \overrightarrow{i} \overrightarrow{j} | \rangle_{\text{O.C}} = \sum_{\mu\nu} \langle \overrightarrow{i} \overrightarrow{j} | \rangle_{\text{P.C}} = N f^{+-}(i, j; \sigma) \quad (\text{III. 12a})$$

$$\sum_{\mu\nu} \langle \overrightarrow{i} \overrightarrow{j}^* | \rangle_{\text{O.C}} = \sum_{\mu\nu} \langle \overrightarrow{i} \overrightarrow{j}^* | \rangle_{\text{P.C}} = N f^{-+}(i, j; \sigma) \quad (\text{III. 12b})$$

$$\sum_{\mu\nu\alpha\gamma} \langle \overrightarrow{0} \overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overrightarrow{3} | \rangle_{\text{C}} = N(e_{12//\perp} + \eta - 1) f^{+-}(0, 3; \sigma) f^{-+}(1, 2; \sigma) \quad (\text{III. 13a})$$

$$\sum_{\mu\nu\alpha\gamma} \langle \overrightarrow{3} \overrightarrow{0} \overrightarrow{1} \overrightarrow{2} | \rangle_{\text{C}} = N(e_{12//\perp} + \eta - 1) f^{-+*}(0, 3; \sigma) f^{-+}(1, 2; \sigma) \quad (\text{III. 13b})$$

$$\sum_{\mu\nu\alpha\gamma} \langle \leftarrow \begin{smallmatrix} * & * \\ 2 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} * \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} * \\ 3 \end{smallmatrix} \rangle_{\bullet\mathbf{C}} = N(-e_{12//\perp} + \eta - 1) f^{+-}(0, 3; \sigma) f^{+*}(1, 2; \sigma) \quad (\text{III. 13c})$$

$$\sum_{\mu\nu\alpha\gamma} \langle \leftarrow \begin{smallmatrix} * & * \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} * \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} * \\ 3 \end{smallmatrix} \rangle_{\bullet\mathbf{C}} = N(-e_{12//\perp} + \eta - 1) f^{+-}(0, 3; \sigma) f^{-+}(1, 2; \sigma) \quad (\text{III. 13d})$$

のように表わせる。ただし、 η は、 $\bullet$ が P (不完全キュムラント) のとき N をとり、O (順序付キュムラント) のとき 0 をとる。また、

$$e_{ij//\perp} = \exp [-(r_{//} - 2r_{\perp})(t_i - t_j)] \quad (\text{III. 14})$$

と定義した。(III. 12), (III. 13) を求める際、公式

$$\text{tr}_A e^{A_A t} X = \text{tr}_A X \quad (\text{III. 15a})$$

$$\text{tr}_A S_{\mu}^{\pm} e^{A_A t} X = e^{-r_{\perp} t} \text{tr}_A S_{\mu}^{\pm} X \quad (\text{III. 15b})$$

$$\text{tr}_A S_{\mu}^z e^{A_A t} X = e^{-r_{//} t} \text{tr}_A S_{\mu}^z X + (1 - e^{-r_{//} t}) \frac{1}{2} \sigma_0 N \text{tr}_A X \quad (\text{III. 15c})$$

を用いた。

補遺Ⅳ. 展開係数 $c_n(t)$ に対する方程式

正規順序のボゾンコヒーレント表示で表わした「密度演算子」に対する展開 (3.1.3) の展開係数 $c_n(t)$ に対する連立微分方程式の最も一般的な形は、

$$\begin{aligned} \dot{c}_n(t) = & -2(\bar{n}+1) \widetilde{\alpha}_{n\ell}(t) \cdot n(n+1) c_{n+1}(t) \\ & - \{2(\kappa - \widetilde{\alpha}_{\ell}(t)) + 2(\bar{n}+1) \widetilde{\alpha}_{n\ell}(t) \cdot (3n+1)\} \cdot n c_n(t) \\ & + \{-2(\kappa - \widetilde{\alpha}_{\ell}(t)) - 2(\bar{n}+1) \widetilde{\alpha}_{n\ell}(t) \cdot (3n-1) + \frac{\widetilde{q}(t)}{\bar{n}+1}\} \cdot n c_{n-1}(t) \\ & - 2(\bar{n}+1) \widetilde{\alpha}_{n\ell}(t) \cdot n(n-1) c_{n-2}(t) \\ & + 2 \{2\phi_1(t) \cdot n + \phi_2(t) + \phi_3(t) \cdot (2n-1)\} \cdot n c_n(t) \\ & + 2 \{2 \cdot \phi_1(t) \cdot (2n-1) + \phi_2(t) + \phi_3(t) \cdot (4n-3) + \frac{\phi_4(t)}{\bar{n}+1} \\ & \quad + 2 \cdot \frac{\phi_5(t)}{\bar{n}+1} (n-1)\} n c_{n-1}(t) \\ & + 4 \{\phi_1(t) + \phi_3(t) + \frac{\phi_5(t)}{\bar{n}+1} + \frac{\phi_6(t)}{(\bar{n}+1)^2}\} \cdot n(n-1) c_{n-2}(t) \end{aligned} \quad (\text{IV. 1})$$

で与えられる。ただし,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_l(t) \equiv & \frac{Ng^2}{r_\perp} \left[\frac{1+\sigma_0}{2} \phi^{(2)+-}(t) - \frac{1-\sigma_0}{2} \phi^{(2)-+}(t) - \frac{Ng^2}{r_\perp^2} \left\{ \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)---+}(t) \right. \right. \\ & + \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)---+}(t) - \frac{1+\sigma_0}{2} \frac{1-\sigma_0}{2} \phi_2^{(4)---+}(t) \\ & \left. \left. - \frac{1-\sigma_0}{2} \frac{1+\sigma_0}{2} \phi_2^{(4)---+}(t) \right\} \right] \quad (\text{IV. 2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}(t) \equiv & 2\kappa(\bar{n}+1) + \frac{Ng^2}{r_\perp} \left[(1-\sigma_0) \phi^{(2)+-}(t) - \frac{2Ng^2}{r_\perp^2} \left\{ \frac{1-\sigma_0}{2} \frac{1+\sigma_0}{2} \phi_2^{(4)---+}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)---+}(t) \right\} \right] \quad (\text{IV. 3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{nl}(t) \equiv & \frac{4Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \left[\left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)---+}(t) - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)---+}(t) \right. \\ & \left. - \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) + \frac{1-\sigma_0}{2} \frac{1+\sigma_0}{2} \phi_1^{(4)---+}(t) \right] \quad (\text{IV. 4})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(t) \equiv & \frac{Ng^4}{2r_\perp r_\parallel} \left[2 \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)---+}(t) - 2 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)---+}(t) \right. \\ & \left. - 3 \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) + 3 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) \right] \quad (\text{IV. 5})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(t) \equiv & -\frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \left[8 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)---+}(t) + 6 \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) \right] \quad (\text{IV. 6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3(t) \equiv & -\frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \left[2 \left\{ 2 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)---+}(t) + \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)---+}(t) \right\} \right. \\ & + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \left\{ \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)---+}(t) + \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)---+}(t) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_2^{(4)---+}(t) - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_2^{(4)---+}(t) \right\} \right] \quad (\text{IV. 7})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4(t) \equiv & \frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \left[3 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)-++}(t) + \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)+--}(t) \right. \\ & \left. + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \left\{ \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)-++}(t) - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_2^{(4)+--}(t) \right\} \right] \quad (\text{IV. 8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_5(t) \equiv & \frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \left[4 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)-++}(t) + \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)+--}(t) \right. \\ & - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_1^{(4)-++}(t) \\ & + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \left\{ 2 \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_2^{(4)-++}(t) - \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \phi_2^{(4)+--}(t) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right) \left(\frac{1+\sigma_0}{2} \right) \phi_2^{(4)+--}(t) \right\} \right] \quad (\text{IV. 9}) \end{aligned}$$

$$\phi_6(t) \equiv -\frac{Ng^4}{r_\perp^2 r_\parallel} \left[\left(\frac{1-\sigma_0}{2} \right)^2 \phi_1^{(4)-++}(t) + \frac{r_\parallel}{r_\perp} \phi_2^{(4)-++}(t) \right] \quad (\text{IV. 10})$$

と定義した。また,

$$\phi^{(2)+-}(t) \equiv \int_0^t dt_1 f^{+-}(0, 1; \sigma), \quad \text{etc.} \quad (\text{IV. 11})$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{(4)+--}(t) & \equiv \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 e_{12\parallel\perp} f^{+-}(0, 2; \sigma) f^{+-}(1, 3; \sigma) \\ & = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 e_{12\parallel\perp} f^{+-}(0, 3; \sigma) f^{+-}(1, 2; \sigma), \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{IV. 12})$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(4)+--}(t) & \equiv \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 f^{+-}(0, 2; \sigma) f^{+-}(1, 3; \sigma) \\ & = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 f^{+-}(0, 3; \sigma) f^{+-}(1, 2; \sigma), \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{IV. 13})$$

とおいた。 f^{+-} , f^{-+} の定義は, (2.3.33) であり, $e_{12\parallel\perp}$ の定義は, (III, 14) である。

$c_n(t)$ に対する方程式 (IV. 1) を導出する際, ラゲール多項式の漸化式及び直交関係:

$$X L_n(X) = -(n+1) L_{n+1}(X) + (2n+1) L_n(X) - n L_{n-1}(X) \quad (\text{IV. 14a})$$

$$\frac{d}{dX} (L_{n+1}(X) - L_n(X)) = -L_n(X) \quad (\text{IV. 14b})$$

$$\int_0^\infty dX e^{-X} L_n(X) L_m(X) = \delta_{nm} \quad (\text{IV. 14c})$$

を用いた。

なお、「密度演算子」を反正規順序のボゾンコヒーレント表示^{21),22),23)}で表わすと、1つの変化として、(Ⅳ.1)に対応する方程式において、 $(\bar{n}+1)$ が $\bar{n}$ に置き換わる。この場合、 $\bar{n}$ で割った項が存在するので、光子系の熱浴が絶対零度のとき($\bar{n}=0$)が扱えなくなる。

謝 辞

この論文にまとめられた研究は、有光講師の御指導の下に成されたものである。無力な著者を励まし、適切な助言をして下さった有光講師に、心から感謝の意を表したいと思う。また、適切な批判、助言を与えて下さった理論物理研究室のスタッフの方々、計算機の面で援助して下さい下さった大学院の先輩方に感謝の意を表する。

出版論文目録

- 1) “Microscopic Theory of Laser Master Equation up to the Forth Order. I”, T. Arimitsu and T. Tominaga; J. Phys. Soc. Jpn. に出版。
- 2) “Microscopic Theory of Laser Master Equation up to the Forth Order. II”, T. Tominaga and T. Arimitsu ; 出版予定。

文 献

- 1) H. Risken; *Progress in Optics*. ed. E. Wolf (North Holland, Amsterdam, 1979) Vol. VIII p. 239–294
- 2) F. Haake; *Z. Physik.* **227** (1969) 179
- 3) T. Arimitsu and T. Tominaga; *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982) 3102
- 4) R. Kubo; *J. Phys. Soc. Jpn.* **12** (1957) 570
- 5) T. Matsubara; *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351
- 6) S. Nakajima; *Prog. Theor. Phys.* **20** (1958) 948
- 7) R. Zwanzig; *J. Chem. Phys.* **33** (1960) 1338
- 8) H. Mori; *Prog. Theor. Phys.* **33** (1965) 423
- 9) F. Shibata and T. Arimitsu; *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 891
- 10) T. Arimitsu; *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982) 1720
- 11) H. Statz and G. de Mars; in *Quantum Electrodynamics*. ed. C. D. Wett et al. (Gordon Breach, New York 1960) p. 530
- 12) W. E. Lamb, Jr.; *Phys. Rev.* **134** (1964) A1429

- 13) M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr.; Phys. Rev. **159** (1967) 208
- 14) R. Bonifacio, P. Schwendimann and F. Haake; Phys. Rev. **A4** (1971) 302
- 15) W. Weidlich and F. Haake; Z. Physik. **185** (1965) 30
- 16) W. Weidlich and F. Haake; Z. Physik. **186** (1965) 203
- 17) H. Haken, H. Risken and W. Weidlich; Z. Physik. **206** (1967) 355
- 18) T. Arimitsu, Y. Takahashi and F. Shibata; Physica **100A** (1980) 507
- 19) T. Arimitsu; Physica **104A** (1980) 126
- 20) T. Arimitsu; J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 379
- 21) G. S. Agarwal and E. Wolf; Phys. Rev. **D2** (1970) 2161
- 22) G. S. Agarwal and E. Wolf; Phys. Rev. **D2** (1970) 2187
- 23) G. S. Agarwal and E. Wolf; Phys. Rev. **D2** (1970) 2206
- 24) L. R. Testardi; Phys. Rev. **B4** (1971) 2189
- 25) C. S. Owen and D. J. Scalapino; Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 1559
- 26) W. H. Parker; Phys. Rev. **B12** (1975) 3667
- 27) G. M. Eliashberg; Soviet Phys. JETP. **34** (1972) 668
- 28) V. F. Elesin; Soviet Phys. JETP. **39** (1975) 862