

空間離散化による逆散乱問題の散乱データの導出と非厳密解型初期条件下での解

キヤノン 藤嶋浩史, 宇都宮大・工 矢嶋徹

Hironobu Fujishima, CANON INC.,

Tetsu Yajima, Graduate School of Engineering, Utsunomiya University

1 はじめに

非線形シュレディンガー (NLS) 方程式

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.1)$$

は、ソリトン方程式の1つであり、プラズマや光信号などの現実的な系で起きる実際の現象に密接に関連している。また NLS 方程式は、Bose-Einstein 凝縮体に付随する巨視的波動関数の時間発展を記述する方程式としても知られ、巨視的波動関数の絶対値2乗は凝縮原子密度としてリアルタイムで観測される。非線形系において、多様な初期条件に応じた興味深いダイナミクスを理解するため、これら一般的な初期波形からの時間発展を解析することは重要な課題である。ソリトン方程式に対して初期値問題の解を逆散乱法によって構成できることはよく知られているが、それは原理的なものである。現実的には、与えられた任意の初期条件に対して波束の振る舞いを数値積分によらずに予測することは困難であり、たとえ近似的にであっても十分広いクラスの初期波形に対して、その挙動に関する情報を一定の精度で引き出せる手法を確立することが望ましい。

ここでは、空間離散化の手法と区間分割によるグリーン関数の表現を利用して任意の急減衰初期波形から、漸近的に現れるソリトン解のパラメーターを計算する手法について報告する。また、実際の数値解析と比較し、提案された手法の妥当性を定性的に検討したい。

2 非線形シュレディンガー方程式の初期値問題の現況

一般にソリトン方程式の初期値問題は、逆散乱法によって解かれる。本稿で取り上げる NLS 方程式は Zakharov と Shabat によって定式化がなされたが [1], ここではまずその要点を挙げる。NLS 方程式の Lax 対は、ベクトル形式で書くと

$$\begin{aligned} \Psi_x &= S\Psi, \quad \Psi_t = T\Psi \\ S &= \begin{pmatrix} -i\xi & i\psi^* \\ i\psi & i\xi \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2i\xi^2 - i|\psi|^2 & \psi_x^* - 2i\xi\psi^* \\ -\psi_x - 2i\xi\psi & -2i\xi^2 Ii|\psi|^2\xi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

となる。式(2.1)の第1式は ψ をポテンシャルとする散乱問題と考えることができ、その解である Jost 関数を、漸近形

$$\begin{aligned}\phi(x; \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{\phi}(x; \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi x} \end{pmatrix} & (x \rightarrow -\infty) \\ \chi(x; \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi x} \end{pmatrix}, & \bar{\chi}(x; \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix} & (x \rightarrow \infty)\end{aligned}\quad (2.2)$$

を持つ解とする。関数の組 $\{\phi, \bar{\phi}\}, \{\chi, \bar{\chi}\}$ はそれぞれが基本解であり、互いに

$$\phi = a(\xi)\bar{\chi} + b(\xi)\chi, \quad \bar{\phi} = \bar{b}(\xi)\bar{\chi} + \bar{a}(\xi)\chi \quad (2.3)$$

のように変換可能である。係数 $a(\xi), b(\xi)$ を、以下散乱係数と呼ぶ。これらはポテンシャル ψ による散乱振幅を与える量である。また、方程式 $\Psi_x = S\Psi$ を、以下 Zakharov-Shabat (以下 ZS) 方程式と呼ぶことにする。Jost 関数の1つ $\phi(x; \xi)$ は

$$\phi(x; \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi x} \\ b(\xi)e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (2.4)$$

の漸近形を持つことに注意しておく。

ここで、係数 $a(\xi)$ が、複素パラメーター ξ の上半平面で M 個の零点 $\xi = \{\xi_l\}_{l=1, \dots, M}$ を持つとする。これは、ZS 散乱問題における固有値となる。逆散乱法の議論により、関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{i(\xi x - 4\xi^2 t)} d\xi - \sum_{l=1}^M \frac{b(\xi_l)}{a'(\xi_l)} e^{i(\xi_l x - 4\xi_l^2 t)} \quad (2.5)$$

と定義すると、Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM) 方程式

$$\begin{aligned}K_1^*(x, y) - F(x+y) - \int_x^\infty K_2(x, z)F(z+y) dz &= 0 \\ K_2^*(x, y) + \int_x^\infty K_1(x, z)F(z+y) dz &= 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

が得られる。GLM 方程式の解 K を用いると、

$$\psi(x, t) = -2iK_1(x, x) \quad (2.7)$$

となる。ソリトン解は、 $a(\xi)$ の零点によって決まる個々のパルス波形を有する。

さて、NLS 方程式の解は、ZS 方程式の解を求め、散乱振幅を決めることによって求められるが、特にソリトン解の個数やパルスの特性を決めるには、離散固有値を求めなければならない。一般に方程式(2.1)の $\Psi_x = S\Psi$ は、変数係数の2階線形微分方程式に帰着

し、固有値や固有関数を決めることは難しい。初期条件として厳密に解が求められる例は少ない。その1つには、ソリトン解型の初期波形である

$$\psi(x, 0) = A \operatorname{sech} x \quad (2.8)$$

がある [2]。この場合、振幅 A によって決まる個数の固有値が存在し、固有値分布も完全に求めることができる。この初期条件下では、すべての固有値の実部が一致し、複数の固有値が存在する条件に対してはソリトンの束縛状態を生じる。ソリトン解型でない例としては、これを変形した

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \frac{2A\phi^{1/2}(1-\phi)^{1/2}e^{i\theta}}{\alpha + \beta\phi} \\ e^{2x} &= \phi^{-\alpha}(1-\phi)^{\alpha+\beta}, \quad e^{\theta} = (1-\phi)^{\lambda-\mu}\phi^{-\lambda} \end{aligned} \quad (2.9)$$

がある [3]。この初期波形は、座標のスケールを位置座標に応じて変化させ、ソリトン解を空間的に圧縮・伸長したものである。この初期条件では相互に運動するソリトンを生じるが、無反射条件 $b(\xi) = 0$ は満たされず、純ソリトン状態を生じない特徴がある。

以上のほか、純粋な N ソリトン解を与えても当然初期値問題は解決するであろうと予想できる。しかし、これらのいずれにせよ、現実に実験的に作るのが困難なパルスである。たとえば、実験的には Gauss 型波形を生じるとは比較的易しいが、sech 型の波形は作りにくい。ところが、Gauss 型初期条件では、ZS 固有値問題を厳密に解くことができず、散乱振幅や固有値を求められないという問題がある。よって、任意の初期波形の時間発展を、必要な精度で計算できる手法が必要なのである。

3 初期波形離散化と多重パルス初期値問題

ZS 固有値問題の近似解法としては、初期波形を区間分割し、離散的なサンプル点での値を代表値として選ぶ方法がある [4]。本節ではそのまとめと実際の応用について触れた。ZS 固有値方程式では、ポテンシャルが定数関数であれば容易に固有値と固有関数を求めることができる。いま、初期波形をカバーする幅 L の範囲

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad L \equiv \beta - \alpha \quad (3.1)$$

を取る。この範囲を N 個の区間に分割し、点 $x_1, \dots, x_{N+1}$ を

$$x_1 \equiv \alpha, \quad x_{N+1} \equiv \beta, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1} \quad (3.2)$$

と取って、各区間を

$$I_j: x_j \leq x < x_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.3)$$

としよう。各区間でのポテンシャルの値を近似的に表す関数

$$\psi_j(x) = \begin{cases} V_j & (x \in I_j) \\ 0 & (x \notin I_j) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.4)$$

を導入し、初期波形を

$$\psi(x, 0) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \quad (3.5)$$

と表現する。すなわち、 $\psi(x, 0)$ を、区間 $[\alpha, \beta]$ で階段状に表すことになる。各区間での ZS 方程式

$$\Psi_x = S_j \Psi, \quad S_j \equiv \begin{pmatrix} -i\xi & iV_j^* \\ iV_j & i\xi \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

は解くことができ、

$$\Psi = T_j(x - x_j)\Psi(x_j), \quad T_j(\lambda) = \exp(\lambda S_j) \quad (3.7)$$

となる。行列 $T(\lambda)$ の具体的表現は、容易に

$$T_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda K - \frac{i\xi}{K} \sin \lambda K & \frac{iV_j^*}{K} \sin \lambda K \\ \frac{iV_j}{K} \sin \lambda K & \cos \lambda K + \frac{i\xi}{K} \sin \lambda K \end{pmatrix}, \quad K \equiv \sqrt{\xi^2 + |V_j|^2} \quad (3.8)$$

と導かれる。よって、Jost 関数の近似表現

$$\Psi(x_{N+1}) = T\Psi(x_1), \quad T \equiv T_N(L_N)T_{N-1}(L_{N-1}) \cdots T_1(L_1) \quad (L_j \equiv x_{j+1} - x_j) \quad (3.9)$$

が得られる。初期パルスを十分カバーする L を選べば、 $\Psi(-\infty; \xi) = \Psi(x_1)$, $\Psi(\infty; \xi) = \Psi(x_{N+1})$ とみなせる。式 (2.4) により、適切な漸近形を持つ Jost 関数の成分によって散乱振幅が表現できるので、

$$\phi(x_{N+1}; \xi) = e^{-i\xi x_1} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi x_{N+1}} \\ b(\xi)e^{i\xi x_{N+1}} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

が成り立つ。したがって、散乱振幅は行列 T の成分を使って、

$$a(\xi) = e^{i\xi L} T_{11}, \quad b(\xi) = e^{-i(x_1 + x_{N+1})\xi} T_{21} \quad (3.11)$$

のように求めることができる。ソリトン解を特徴づける固有値は $a(\xi)$ の零点であるから、 T の (1, 1) 成分を解析することにより、漸近的なソリトンの振る舞いを求めることができる。

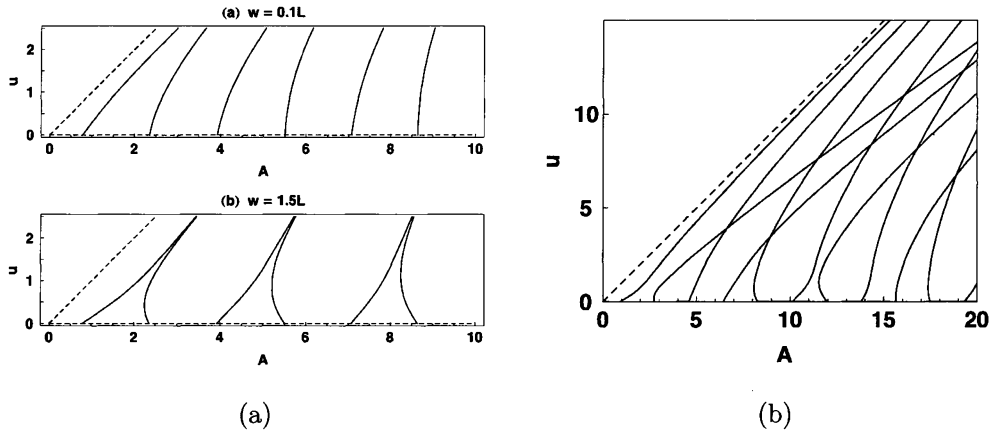


図 1: (a) 対称二重箱型ポテンシャルの下での散乱係数の零点分布。上側がパルス間隔 w がパルス幅 L の 0.1 倍, 下側が 1.5 倍の場合。(b) 非対称二重箱型ポテンシャルの下での散乱係数の零点分布

筆者らは, 上記の手法を利用して箱型ポテンシャルとその重ね合わせを初期条件と選び, 出現するソリトンの個数やその特性を調べた [5]。特徴的な結果を与える例としては, 箱型ポテンシャルを離して配置した条件

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) = \psi_{SB}(x), \quad \psi_{SB}(x) &= \begin{cases} V_0 & (0 \leq x \leq L, L+w \leq x \leq 2L+w) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \\ \psi(x, 0) = \psi_{AB}(x), \quad \psi_{AB}(x) &= \begin{cases} V_0 & (0 \leq x \leq L) \\ sV_0 & (L+w \leq x \leq 2L+w) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

がある。前者は同形のポテンシャルを二重化したものである。図 1(a) は, このポテンシャルの下での $a(\xi)$ の零点分布を ξ を純虚数 $i\eta$ として表したもので, 初期波形の振幅 V_0 を横軸, スペクトルパラメーター η を縦軸としている。ただし, $A = V_0 L$, $u = \eta L$ のように L でスケールしたものである。2つのグラフは, パルス間隔 w とパルス幅 L の関係を 2通りに取ったもので, 上側が $w = 0.1L$, 下側が $w = 1.5L$ の場合である。2重極となる固有値はこの図で接線が縦軸に平行となるパラメーターで起きる。ポテンシャル間隔が広くなると二重極解が出現する。式 (3.12) の後者は, 非対称な二重ポテンシャルである。零点分布は図 1(b) に示した。ここでは零点分布がより複雑な形をしており, 二重極零点が交差する部分にも現れており, より解の構造としては複雑化していることがわかる。

4 Neumann 級数による初期値問題の解析

さて、前節では Boffetta と Osborne による区間分割法と、それを用いた二重パルス初期条件からの固有値を調べた。この方法では分割幅を十分小さくすると原理的には必要な精度で固有値を近似的に求めることはできる。しかし、最適な分割幅の選択方法は自明ではないし、当然分割幅を小さくすると計算時間が増大してしまうなど、実用的でない側面もある。よってここでは、よりコンパクトに散乱振幅や固有値を計算する方法を考えよう。

まず、ZS 固有値問題の解 $\psi(x; \xi)$ と、平面波ベクトル関数 $\psi_0(x; \xi)$ を

$$\psi(x; \xi) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_0(x; \xi) = \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

のように導入する。漸近的に $\psi \rightarrow \psi_0$ となるから、

$$\psi(x; \xi) = \psi_0(x; \xi) + \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x') U(x') \psi(x'; \xi) d\xi \quad (4.2)$$

となとしよう。ただし G , U はそれぞれ行列グリーン関数, U は散乱ポテンシャル行列で、

$$G(x - x') = \begin{pmatrix} e^{-i\xi(x-x')}\theta(x-x') & 0 \\ 0 & e^{-i\xi(x-x')}\theta(x-x') \end{pmatrix}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\psi^*(x, 0) \\ i\psi(x, 0) & 0 \end{pmatrix}$$

と定義される。式 (4.2) を ZS 方程式に逐次代入し、適切に境界条件を設定すると、近似解を求めることができる。散乱振幅 $a(\xi)$ の計算に必要な ψ_1 は

$$\psi_1 e^{i\xi x} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dx' dx'' \theta(x-x') e^{2i\xi x'} \cdot i\psi^*(x', 0) \cdot \theta(x'-x'') e^{-2i\xi x''} \cdot i\psi(x'', 0) \quad (4.4)$$

となり、Jost 関数 ϕ の成分 ϕ_1 はこの $\psi_1(x; \xi)$ に一致する。したがって、散乱係数 $a(\xi)$ は

$$a(\xi) e^{-i\xi x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1(x; \xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_1(x; \xi) \quad (4.5)$$

となる。ここで、 ψ_1 は多重積分からなる級数の形をしているが、散乱問題の形を考えると、 $a(\xi)$ に寄与するのは偶数次の項のみとなる。同様に、 $b(\xi)$ も級数表現できるが、こちらは反射係数を与えるので奇数次の項のみ拾えばよい。いま、

$$A(x; \xi) = \int_{\mathbf{R}} dx' \int_{\mathbf{R}} dx'' \theta(x-x') v(x') \theta(x'-x'') v^*(x'') + (\text{even})$$

$$v(x) = i e^{2i\xi x} \psi^*(x, 0)$$

$$v^*(x) = i e^{-2i\xi x} \psi(x, 0) \quad (4.6)$$

と定義すれば,

$$a(\xi) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} A(x; \xi) \quad (4.7)$$

となって係数 a の積分表示が求められる。しかし、このようにしても実際に与えられた初期条件下で解析的に積分を計算できるか否かは初期条件の形に依存することは変わらない。

そこで、初期波形の区間分割手法にヒントを得て、関数 $A(x; \xi)$ を変形してみよう。すなわち、 A は初期波形 $\psi(x, 0)$ を含むので、初期ポテンシャル ψ を適当な範囲で考え、 N 区間に分割する。このとき、

$$A(x_j; \xi) = \sum_{k,l=1}^N \theta(x_j - x_k) v(x_k) \theta(x_k - x_l) v^*(x_l) (\Delta x)^2 \cdots \quad (4.8)$$

となる。ただし、

$$\Delta x = \frac{L}{N}, \quad v(x_n) = ie^{2i\xi x_n} V_n^*, \quad v^*(x_n) = ie^{-2i\xi x_n} V_n^* \quad (4.9)$$

と定義する。ここで、行列ポテンシャル

$$\begin{aligned} V &= \text{diag}(ie^{2i\xi x_1} V_1^*, \dots, ie^{2i\xi x_N} V_N^*) \\ V^* &= \text{diag}(ie^{-2i\xi x_1} V_1, \dots, ie^{-2i\xi x_N} V_N) \end{aligned} \quad (4.10a)$$

と、下三角行列

$$P = \frac{L}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10b)$$

を導入すれば、式 (4.8) の関数として Neumann 型級数の表現

$$A(x_j; \xi) = \sum_{i=1}^N (PVPV^*)_{j,i} + \cdots \quad (4.11)$$

が得られる。右辺の級数部分は容易に足し上げることができ、 $1/(1 - PVPV^*)$ となる。すなわち、

$$A(x_j; \xi) = \sum_{l=1}^N \frac{1}{1 - PVPV^*} \Big|_{j,l} \quad (4.12)$$

となることがわかる。係数 $a(\xi)$ は A の $x \rightarrow \infty$ における極限であるから、 $A(x_N; \xi)$ によって表されるため、 $1 + A(x; \xi)$ の最下行の総和で求めることができる。ベクトル表現すれば、

$$a(\xi) = 1 + A(x_N; \xi) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{1 - PVPV^*} \right)_{N,k} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_k \quad (4.13)$$

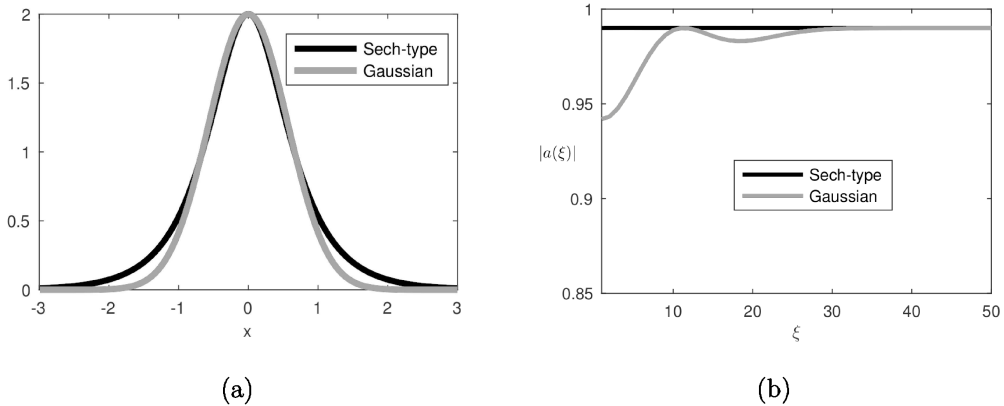


図 2: (a) Gauss 型初期波形と sech 型初期波形の概形, (b) Gauss 型初期波形と sech 型初期波形の下での散乱係数 $|a(\xi)|$

となることがわかる。

以上のように, 行列型グリーン関数をもって散乱問題を考え, さらに初期ポテンシャルを区間分割して, 散乱係数の表現を得ることができた。以上の手法によって, b も同様の表現で表すことができる。

5 応用と数値計算

さて, ここで前節までで導入した手法を NLS 方程式の初期値問題に適用して固有値を実際に計算するとともに, 初期値問題を実際に数値解析して結果の妥当性を検証してみたい [6]。

まず, 単一の初期パルスがどのようなスペクトルパラメーター依存性を示すかを明らかにするため, Gauss 型初期波形と sech 型初期波形の比較をしてみよう。初期条件として,

$$\begin{aligned}\psi_S(x) &= 2 \operatorname{sech} x \\ \psi_G(x) &= 2e^{-\pi x^2/2}\end{aligned}\tag{5.1}$$

の 2 つを考える。これらの波形は図 2(a) に示す通りで, ψ_G が全面積が小さくなっている。 $\psi(x, 0) = \psi_S(x)$ の場合は [2] で解析されている条件 (2.8) で $A = 2$ としたものである。式 (2.8) の下で現れる固有値の個数は既に知られているように $[A + 1/2]$ であり, 式 (5.1) では固有値は 2 つである。また, A が自然数の場合は初期波形は無反射条件をみたしている。第 4 節の手法により, スペクトルパラメーターそれぞれの初期波形に対して ξ が実数の場合に散乱振幅 $a(\xi)$ を図示したグラフが図 2(b) である。 $\psi(x, 0) = \psi_S$ の場合は無反射ポテンシャルであり, $|a(\xi)| = 1$ が成り立つことがグラフでは反映されている。ここで, $|a(\xi)|$

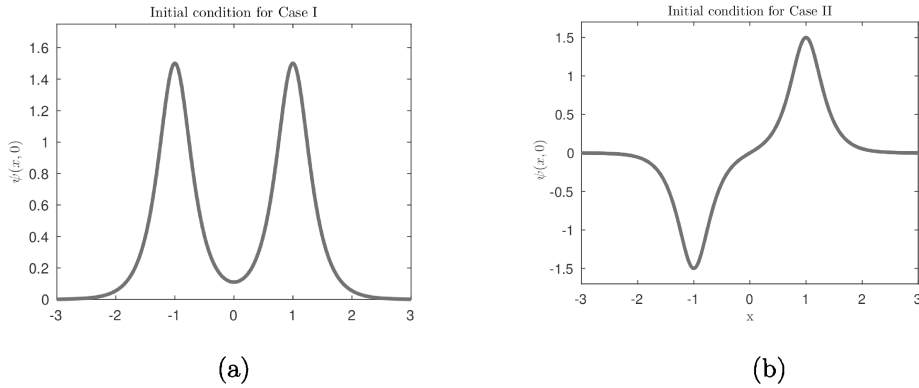


図 3: (a) 初期条件 (5.2a) の波形。 (b) 初期条件 (5.2b) の波形。

の定数部分の値は1よりも少し小さいが、これはサンプル間隔が疎であることとパルスの裾の部分がカットオフされていることによる。 $\psi(x, 0) = \psi_G(x)$ の場合も同様で、 $\xi = 0$ 付近では ξ に応じて変動するが、 $|\xi| \rightarrow \infty$ では $|a(\xi)|$ は1に近づいている。このように、提案された手法を用いて散乱振幅を計算すると、Lax 方程式の理論解析を反映した結果を再現している。初期波形を分割する区間の幅を十分細かくすれば、必要な精度で散乱振幅を求めることが期待できる。

次に、非厳密解型の初期条件として、単一ソリトン波形を単純に重ねあわせた波形を考えよう。3つの場合として、

$$\text{I. } \psi(x, 0) = 1.5\{\text{sech}[4(x-1)] + \text{sech}[4(x+1)]\} \quad (5.2a)$$

$$\text{II. } \psi(x, 0) = 1.5\{\text{sech}[4(x-1)] - \text{sech}[4(x+1)]\} \quad (5.2b)$$

$$\text{III. } \psi(x, 0) = 1.5\{\text{sech}[4(x-1)] + i \text{sech}[4(x+1)]\} \quad (5.2c)$$

を考える。これらの波形のうち、IとIIについては図3に概形を示した。まず、最初の条件 (5.2a) は、同じ波形をそのままずらして重ねあわせている。この条件下では、 $a(\xi)$ は虚軸上に単一の零点 $\xi = 0.31i$ を持ち、終状態ではソリトンが1つだけ現れる。この初期波形を実際に数値計算した結果の時間経過が図4(a)である。漸近的に1つのソリトンが現れており、さざ波がソリトンの両側に発射されていることがわかる。次の条件 (5.2b) は同じ波形を反転して重ねあわせた。係数 $a(\xi)$ は虚軸に関して対称な $\xi = \pm 0.62 + 0.17i$ に零点を持つ。固有値の実部はソリトンの速度を規定するので、反対方向に2つのソリトンが発射されることがわかる。また、固有値の分布状況から、虚部は共通であるので、発射されるソリトンの形状は同じである。実際のシミュレーションは図4(b)に示した。これは、 $a(\xi)$ の固有値の分布から予想される通りの結果となっている。最後の条件は複素数値の初期波形で、位相因子を持っている。この場合は $\xi = 0.33 + 0.27i$, $-0.93 + 0.01i$ の

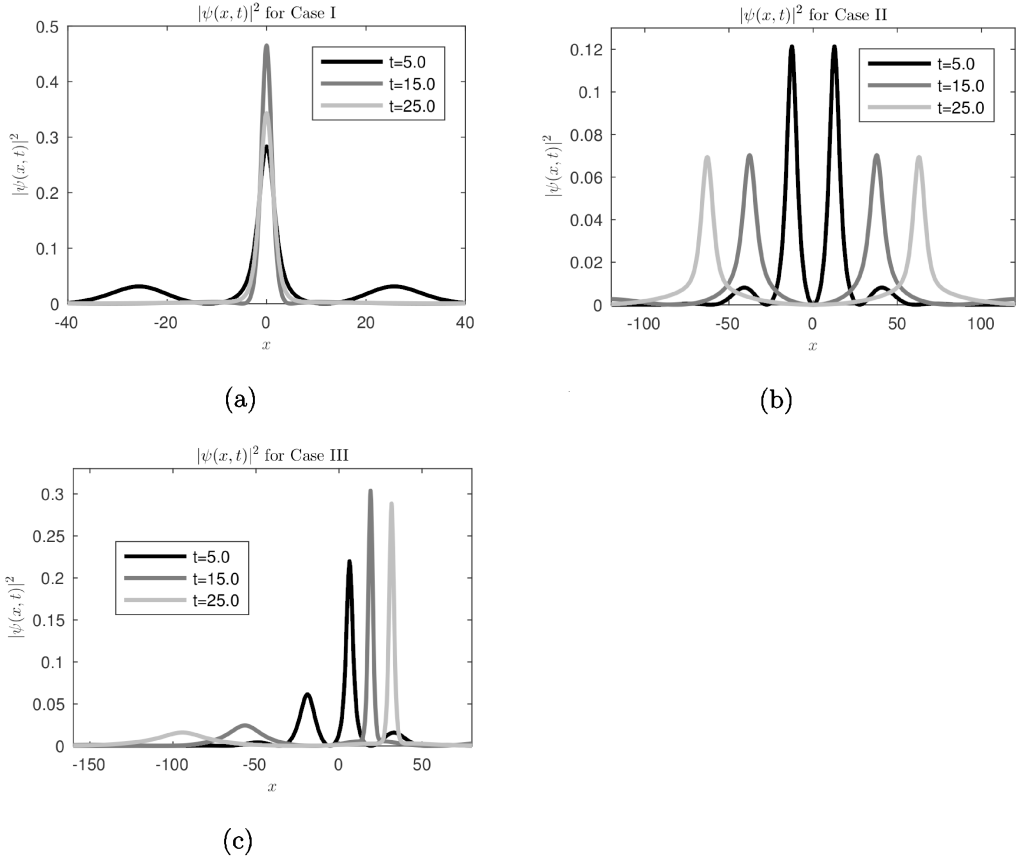


図 4: 初期条件 (5.2) の時間発展。いずれも $|\psi|^2$ を図示した。(a) 初期条件 (5.2a) の場合。(b) 初期条件 (5.2b) の場合。(c) 初期条件 (5.2c) の場合。

2つが固有値である。時間発展は数値的に図 4(c) の通りであり、異なるソリトンが2つ生じていることが確かめられる。

以上のように、限定的な結果であるが、厳密解型でない初期条件に対して ZS 固有値問題の固有値を解くことができた。また、求めた固有値から予想される通りの時間発展が数値的に確かめられた。

6 まとめ

本稿では、非線形シュレディンガー方程式に対して任意に与えられた急減衰初期波形のもとで、散乱振幅を数値的かつ系統的に求める方法を提案し、実際にいくつかの初期波形を与えて提案手法の妥当性を検証した。ここでの手法を使うことにより、従来では困難で

あった，ガウス型初期波形などの，一般的な波形のもとで，漸近的に現れるソリトンの個数やその大きさ・形を知ることができる。提案された手法は，Lax 対を持つ方程式一般に適用することができることは明らかである。よって，ソリトン方程式一般について，任意の初期条件の漸近的な状態を必要な精度で予測することが可能となった。

将来への展望であるが，まずは応用問題として，現実的な初期波形に対して網羅的に適用し，初期波形の時間発展を分類することが挙げられる。その際，精度を上げるために分割幅を小さくすると，行列 G のサイズが加速度的に大きくなり，計算時間が膨大となる問題があり得る。この点は適切な方法で計算時間を節約するなどの改善策が必要となるであろう。

参考文献

- [1] V. E. Zakharov, A. B. Shabat: Sov. Phys. JETP, **34** 62 (1972)
- [2] J. Satsuma, N. Yajima: Prog. Theor. Phys. Suppl., **55** 284 (1974)
- [3] T. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn., **69** 1033 (2000)
- [4] G. Boffetta, A. R. Osborne: J. Comp. Phys., **102** 252 (1992)
- [5] H. Fujishima, T. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn., **84** 064001 (2015)
- [6] H. Fujishima, T. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn., **86** 064003 (2017)