

力学系と Structural Stability

東工大 理 西本敏孝

§ 1. 序

ある領域で定義された vector field また dynamical system のいわゆる大域的定性理論 ($\text{qualitative theory in the large}$) とは元の dynamical system によってつくられる積分曲線族の $\text{topological structure}$ の研究であって究極的には積分曲線族の間に適当な同値関係、例えば homeomorphism を入れてそれによって dynamical system の classification を行うことである。 qualitative というのは numerical または analytical theory に対応する言葉で或いは幾何学的理論ともいえる。この大域的定性理論は最近になって Markus, Peixoto, Smale, Thom, および Pugh らによっていちぢりしい発展をとげた。 M^n を n 次元の compact な可微分多様体としその上で定義された C^r -topology をもつ力学系全体の集合を $\mathcal{X}^{(n)}$ とかく。大域的定性理論の基本問題とは $\mathcal{X}^{(n)}$ の中に適当な open dense subset をとりだし、

それらに対応する積分曲線族の図形が何らかの單純な性質を有し classification が可能であるようにすることでありこれは次の2つの問題に分けられる:

- (1) density problem 又は approximation problem.
- (2) classification problem.

M^2 の場合にはこの基本問題は Peixoto によって本質的に解決された。即ち compact な M^2 の上の dynamical system 全体の集合 $\mathcal{X}$ に C^r topology ($r \geq 1$) を導入したとき structurally stable system の集合 S は $\mathcal{X}$ の中で open dense subset をなし S の積分曲線族は十分簡單な図形 (参照) をもつことが示された。かくして M^2 の場合には基本問題は解決されたのであるがしかし解析的な見方からすれば M^2 において或いは平面上においてさえも全てが終ったというわけではない。即ち我々には与えられた dynamical system が structurally stable system であるかどうかを判定できるような方法はもっていない。従つて解析的に与えられた dynamical system の集合についての解曲線の topological structure の研究は実際には不可能である。

さて $n \geq 3$ の場合には色々と困難があり問題は解決されていない。現在のところ次の §2 でのべるような概念や $\mathcal{X}$ の部分空間が定義されそれらの性質、相互関係等、基本問題と関連して活発に研究されている。

§2. 定義および結果

$M^{(n)}$ を n 次元 compact 可微分多様体で Riemann metric をもつものとする. $M^{(n)}$ 上で定義された C^n -級力学系 X は local coordinate を用いて

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

とかける. X_i は各変数につき r 回連続的に微分可能. $M^{(n)}$ 上の C^n ($n \geq 1$) 級力学系の全体を $\mathcal{X}^{(n)}$ とかき次のような metric を入れる. M^n 上の有限開被覆 $M_1, \dots, M_m$ を 1 つとり固定する. ここで $\bar{M}_j$ は coordinate neighborhood と置かれるようにしておく. $X, Y \in \mathcal{X}^{(n)}$ のとき

$$\rho(X, Y) = \max_{1 \leq j \leq m} \rho_j(X, Y)$$

$$\rho_j(X, Y) = \max_{\substack{M_j \\ i, k, l, s, t}} \left| \frac{\partial^{s+t} X_i}{\partial x_k^s \partial x_l^t} - \frac{\partial^{s+t} Y_i}{\partial x_k^s \partial x_l^t} \right| \quad \left(\begin{array}{l} i, k, l = 1, \dots, n \\ 0 \leq s+t \leq r \end{array} \right)$$

1. S-system $\equiv$ Structurally stable system

$X \in S$ とは $\forall \varepsilon > 0$ に対し X の近傍 Δ があって $Y \in \Delta$ ならば X と Y は ε -equivalent である. ここで ε -equivalent とは M から M の上への homeomorphism があってそれは X の解曲線と Y の解曲線へ方向を添って写像しかつ対応する実は距離が ε 以内にあるときをいう.

2. P-system $\equiv$ Poincaré system.

P_1 X は有限個の特異点をもちそれらは全て generic.

P_2 X は有限個の周期解をもちそれらは全て simple.

P_3 全ての解曲線の α , ω -limit は特異点か周期解

P_4 saddle point を経る解曲線はない.

3. G-system

G_1 X は有限個の特異点をもちそれらは全て generic

G_2 全ての周期解は generic

G_3 全ての解曲線の α , ω -limit は全ての周期解と特異点の集合の closure に含まれる.

G_4 周期解と特異点の stable, unstable manifolds は normal intersection property をもつ.

4. M-system $\equiv$ Morse-Smale system

M_1 X は有限個の特異点をもちそれらは全て generic.

M_2 X は有限個の周期解をもちそれらは全て simple.

M_3 全ての limit set は特異点か周期解

M_4 周期解と特異点の stable, unstable manifolds は normal intersection property をもつ.

M_5 β_i を周期解とすると $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_t(\gamma) = \beta_i$ となる点 γ は

存在しない. $\gamma = \gamma^*$ は γ を通る解曲線.

定理 1 $n=2, r \geq 1$ ならば $S \cong P$ かつ $\bar{S} = X^{(2)}$

Peixoto, M.M. Topology 2 (1962) 101~121.

定理 2 $n \geq 2, r=1$ ならば G は X の中で dense.

Pugh, C.C. to appear.

定理 3 $n=2, r=1$ のとき $X \in G$ ならば $X \in P$.

Pugh, C.C. Diff. equations and Dyn. system (1967) 481~482.

定理 4 $X \in M$ ならば Morse inequality が成立.

Smale, S. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 43-49.

定理 5 $X \in S$ かつ有限個の周期解をもてば $X \in M$.

Smale, S. Bol. de la Soc. Mat. Mexicana. Ser II Vol 1~5 (1960)

195~198.

定理 6 $n \geq 4$ のとき S は X で dense でない.

Smale, S. Amer. J. Math. 86, 491-496 (1966).

以上の他に第一種分岐の存在や minimal set と Structurally stable system との関係, Hyperbolic structure をもつ dynamical system についての研究も行われている. つぎに $n=2$ の場合には Structurally stable system はその解曲線は $P_1 \sim P_4$ をみたす. これらのことを用いもう少しくわしく解曲線の様子をしらべる.

§3 $n=2$ の場合

Smale の定理を適用することにより M^2 上の S -system または P -system は次の Morse inequality をみたす:

$g = M^2$ の genus,

$N_0 = \text{source point の数}, N_1 = \text{saddle point の数},$

$N_2 = \text{sink point の数},$

$N_3 = \text{unstable limit circle の数}, N_4 = \text{stable limit circle の数}$

とするとき

$$1 \leq N_0 + N_3, \quad 1 \leq N_2 + N_4$$

$$2g-1 \leq N_1 + N_3 - N_2, \quad 2g-1 \leq N_1 + N_4 - N_0$$

$$2-2g = N_0 - N_1 + N_2$$

ゆえに S^2 (2次元球面) および T^2 (2次元トーラス) 上の最も簡単な例をあげると

S^2	T^2
N_0, N_1, N_2, N_3, N_4	N_0, N_1, N_2, N_3, N_4
1 0 1 0 0	0 1 1 1 0
2 0 0 0 1	1 2 1 0 0
0 0 2 1 0	1 1 0 0 1
	0 0 0 1 1

上記の Morse inequality を満たすように $N = (N_0, N_1, N_2, N_3, N_4)$ とおくと $\text{topologically distinct types}$ は有限個であることが知られている。故に M^2 上の S -system は可付番無限個の元から

成り立っていることが分る。topological type は separatrix
と canonical region によって決定されるというまい。そこで
 S -system $\equiv$ P -system の separatrix と canonical region の様子とし
るべしみよう。P-system の性質から次のことが分る：

任意の特異点又は周期解から出て再び同じ特異点 又は 周期
解に帰ることはできる。

S -system の separatrix は critical points, limit circles 及び
saddle point から出る又は入る解曲線である。separatrix の
全体を S とすると $M^2 - S$ の各 component は canonical region
という。Morse inequality から separatrix の集合 S は空でない。
 R は 1 つの canonical region とすると $\bar{R}$ は compact で connected
である。つまり canonical region R の typical な形をみてみると、
簡単のため S^2 及び T^2 の場合について図示する。いずれ
にしても与えられた M^2 に対しこのような canonical region の
typical な形は有限個であることは明らかである。

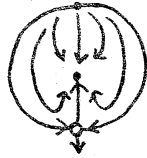
§4. Canonical region の形

homeomorphic な図形は同一視して簡単なものからかく。

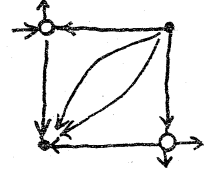
1. M^2 全体から sink point 又は source point と呼ぶもの
2. 同じ円環で囲まれた円環又は円の内部から 1 点: sink
又は source point と呼ぶもの。

3. 2つの円で境された円筒部分.

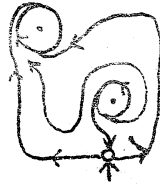
4. saddle point からなる separatrix と特異点で囲まれたもの



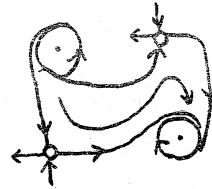
- 特異点で sink 又は source point
- saddle point



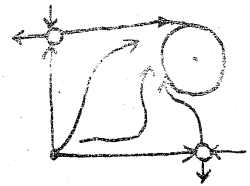
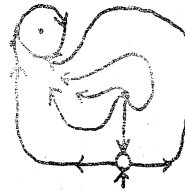
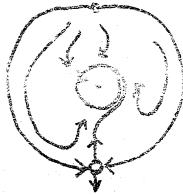
5. saddle point からなる separatrix と円で囲まれたもの



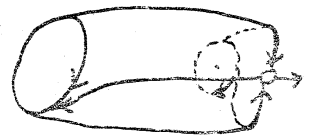
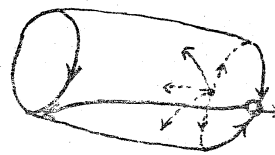
○ 極限円



6. saddle point からなる separatrix, 特異点 および円で囲まれるもの.



7. 円筒状のもの



上図で矢印は $t \rightarrow \infty$ に対応する曲線であるが矢印が逆であるような図形も Canonical region である.