

グラフ上の探索問題の合成について

兵庫県立大学経営学部 菊田 健作 (Kensaku KIKUTA)

School of Business Administration, University of Hyogo

1. はじめに

複数の最適化問題の構造が同じでパラメータの一部が異なるのみであれば、それぞれの問題の意思決定者が集まって相談し総合的に意思決定することが考えられ、これらの問題を統合して1つの問題を考えることになる。こうすることによって費用の節約が生じるならばこれは意味のある考察であり、最適化問題を解くことに加えて統合による節約額の再分配を考えることになる。例えば、文献 [5, p.231-233] にそのような例がある。最近では例えば文献 [7] がある。また文献 [2] では種々の問題に対して上記のような考察がなされている。本稿では文献 [3,4] で扱われた次のような探索ゲームを対象として、総合的な意思決定モデルを考察する。hider と呼ばれる player が1個の静止目標物を有限グラフ上のノードのどれかに隠す。もう1人の探索者と呼ばれる player はグラフの辺上を移動しながらノードにある静止目標物を探す。探索者がノードを調べるときに調査費用が、また辺上を移動するときに移動費用が発生する。探索者は総費用が小さくなるようにノードを探索する順序を決めねばならない。文献 [3] では、ツリーグラフ上で探索者および hider の最適戦略を考察した。文献 [4] では、円グラフで調査費用がある条件を満たす場合の探索者と hider の最適戦略を検討した。文献 [1] と [6] は探索ゲームについて解説したテキストである。

2. グラフ上の探索ゲーム

本節では、移動費用と調査費用を考慮した有限グラフ上の探索ゲームについてさらに詳しく述べる。 $G = (N, E)$ を連結な無向有限グラフとする。ここに $N = \{0, 1, \dots, n\}, n \geq 2$, はノードの集合、 $E \subset N \times N$ は辺の集合である。2人の player、hider と探索者がおり、hider は N に含まれる 0 以外のノードのどれか1つを選びそこに静止目標物を隠す。探索者は hider が選んだノードを知らずにノード 0 から出発して、辺上を移動しながら各ノードを調べる。ノードを通過するのに要する時間は、そのノードを調べても調べなくても同じである。静止目標物が見つかった時点で探索は終了する。探索者が静止目標物が存在するノードを調べたとき静止目標物を見逃す確率はどのノードについても 0 である。したがって探索者が同一のノードを2度以上調べることはない。ノード $i \in N \setminus \{0\}$ を調べる費用は $c_i > 0$ である。 $(i, j) \in E$ のとき、ノード

i から j への移動費用は $d(i, j)$ である。 $(i, j) \notin E$ のときは、 i と j を結ぶ路に関する移動費用を考えその最小値を $d(i, j)$ とする。すべての $i, j \in N$ に対し $d(i, j) = d(j, i)$ である。hider の（純粋）戦略はノード $i \in N \setminus \{0\}$ を選ぶことである。探索者の（純粋）戦略は、探索を開始する前に、探索者が探索するノードの順序を決定することである。探索者の戦略を $\sigma \equiv [\sigma(1) \cdots \sigma(n)]$ と表す。 σ は N 上の置換である。hider、探索者がそれぞれ i, σ を選んだとき、探索者が静止目標物を見つけた時点で探索は終了する。このときの探索費用を $f(i, \sigma)$ と表す。つまり

$$f(i, \sigma) = \sum_{x=0}^{\sigma^{-1}(i)-1} [d(\sigma(x+1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x+1)}].$$

双方が混合戦略をとったとき、目標物を発見するまでの期待探索費用が計算される。これを hider の利得と考え、探索者はこれをできるだけ小さく、一方 hider はできるだけ大きくしたい、として 2 人有限ゼロ和ゲームモデル $\Gamma = (G, c, d)$ を得る。

3. m 個の探索ゲームの合成

m 人の探索者 $\bar{1}, \dots, \bar{m}$ がそれぞれ探索ゲーム $\Gamma^{\bar{1}}, \dots, \Gamma^{\bar{m}}$ に直面している。ここに、 $\Gamma^{\bar{i}} = (G, c^{\bar{i}}, d^{\bar{i}})$, $1 \leq i \leq m$ とする。また、 $M = \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ とおく。したがって m 個の探索ゲームは同じグラフ G 上で行われる。各探索者はノード 0 から出発する。調査費用や移動費用は同じとは限らない。したがって各探索者が直面する 2 人有限ゼロ和ゲームの値をそれぞれ $c(\bar{i})$, $1 \leq i \leq m$ とするとこれらはそれぞれ最適（混合）戦略の下での探索者 $\bar{i}$, $1 \leq i \leq m$ の期待探索費用であり等しいとは限らない。第 2 節で述べたゲームの最適戦略は一般に混合戦略であり、何回も同じような探索の状況に直面すると想定したときの対応を表しているとも考えることもできる。このことを踏まえて、例えば集合 $S \subseteq M$ に属する探索者が共同で代理人に探索を依頼すると考える。このとき集合 S を提携という。代理人は S に属する探索者の静止目標物の探索を行う。2 人以上の探索者の静止目標物が同時にグラフ上に存在することはないと仮定する。あるいは 1 回の探索では 1 個の静止目標物のみを考える。代理人が探索を行うときの移動費用を d^S およびノードの調査費用を c^S と表す。つまり、静止目標物が S に属するどの探索者のものであっても移動費用は $d^S(i, j)$, $\forall i \neq j$ であり調査費用は c_i^S , $\forall i \in N$ である。この 2 人有限ゼロ和ゲームを $\Gamma^S = (G, c^S, d^S)$ と表し探索ゲーム $\Gamma^{\bar{i}}$, $\bar{i} \in S$ の合成という。合成ゲームの値を $c(S)$ と表し $C(S) = |S|c(S)$ とおく。ここに、記号 $|S|$ は集合 S に属する成員の数を表す。値 $C(S)$ は提携 S の成員が協力して合成ゲームを $|S|$ 回行うときの期待費用である。 $C(\emptyset) = 0$ とする。このようにして探索者の集合 M の冪集合上で定義された実数値関数 C と探索者の集合 M の組 (M, C) を協力ゲームと考えることができる。このとき関数 C を協力ゲームの費用関数という。費用関

数 C が subadditive つまり条件

$$C(S) + C(T) \geq C(S \cup T), \forall S, T : S \cap T = \emptyset \quad (1)$$

を満たすとき式 (1) の不等号は協力した方が費用面で有利であることを意味している。実際、式 (1) の左辺は提携 S と T がそれぞれ探索ゲームを行うときの期待費用の和であり、右辺は提携 S と T が協力して探索ゲームを行うときの期待費用と考えることができる。

さて、協力ゲーム (M, C) の費用関数 C が subadditive であるならばすべての探索者は協力して代理人に費用 $C(M)$ を支払うであろう。このときそれぞれの探索者 $\bar{i} \in M$ の負担額を $x_i, \bar{i} \in M$ とすると

$$\sum_{\bar{i} \in M} x_i = C(M), \quad (2)$$

である。式 (2) を満たすような負担額ベクトルは無数にある。そこで、負担額ベクトル $\{x_i, \bar{i} \in M\}$ でさらに条件

$$\sum_{\bar{i} \in S} x_i \leq C(S), \quad \forall S \subseteq M, \quad (3)$$

を満たすようなものを検討したい。式 (3) の左辺はすべての探索者が協力して代理人に支払う費用 $C(M)$ を負担するとき提携 S の成員に割り当てられる負担額の合計である。一方、右辺は提携 S の成員のみで協力して合成ゲームを行うとき代理人に支払う費用である。式 (3) を満たすような負担額ベクトル $\{x_i, \bar{i} \in M\}$ が提案されたとするとすべての探索者は協力して代理人に $C(M)$ を支払うであろう。

4. 円グラフ上の合成ゲーム

本節では、ノード数が3である円グラフ上の協力ゲームを分析する。ノードの集合は $N = \{0, 1, 2\}$ であり、辺の集合は $E = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$ である。各費用について次の仮定をおく。

$$\begin{aligned} d^{\bar{i}}(j, k) &= 1, \forall \bar{i} \in M, \forall (j, k) \in E, \\ d^S(j, k) &= \frac{1}{|S|} \sum_{\bar{i} \in S} d^{\bar{i}}(j, k) = 1, \forall S \subseteq M, \forall (j, k) \in E, \\ c_j^S &= \frac{1}{|S|} \sum_{\bar{i} \in S} c_j^{\bar{i}}, \forall S \subseteq M, \forall j \in N. \end{aligned} \quad (4)$$

仮定 (4) の 2、3 番目の式は、個々の移動費用やノードの調査費用では節約がないことを述べている。hider の（純粋）戦略は 1, 2 の 2 個である。一方、探索者の（純粋）戦略は [12], [21] の

2個である。合成ゲーム Γ^S における hider の利得行列 A は

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} [12] \\ [21] \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 + c_1^S & 2 + c_1^S + c_2^S \\ 2 + c_1^S + c_2^S & 1 + c_2^S \end{pmatrix} \end{array} \quad (5)$$

となりゲームの値は

$$c(S) = 2 + c_1^S + c_2^S - \frac{(1 + c_1^S)(1 + c_2^S)}{2 + c_1^S + c_2^S} \quad (6)$$

となる。

命題 1. 費用関数が (6) を用いて与えられるならば subadditive である。

証明： 正数 x, y の調和平均を $H(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$ とする。正数 x, y, z, w に対し

$$H(x + y, z + w) \geq H(x, z) + H(y, w) \quad (7)$$

が成り立つ。これと式 (6) および仮定 (4) の 3 番目の式とから費用関数 C が subadditive であることがわかる。□

命題 2. 費用関数が (6) を用いて与えられるならば協力ゲーム (M, C) には式 (2) および (3) を満たす負担額ベクトル $\{x_i, \bar{i} \in M\}$ が存在する。

証明： M の空でない r 個の異なる部分集合 $S_1, \dots, S_r$ と正数 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ が次の条件を満たすとき、 $\{S_1, \dots, S_r\}$ を balanced set、 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を balancing coefficient という。

$$\sum_{j: \bar{i} \in S_j} \lambda_j = 1, \quad \forall \bar{i} \in M. \quad (8)$$

命題 2 を示すためには、すべての balanced set と balancing coefficient の組に対して特性関数が

$$C(M) \leq \sum_{j=1}^r \lambda_j C(S_j) \quad (9)$$

を満たすことを示せばよいことが知られている（文献 [5] の第 X 章）。式 (6) と仮定 (4) に注意すると

$$|M|H(1 + c_1^M, 1 + c_2^M) \geq \sum_{j=1}^r \lambda_j |S_j| H(1 + c_1^{S_j}, 1 + c_2^{S_j}) \quad (10)$$

を示せばよい。正数 x, y と実数 a に対して性質

$$aH(x, y) = H(ax, ay) \quad (11)$$

を注意しておく。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^r \lambda_j |S_j| H(1 + c_1^{S_j}, 1 + c_2^{S_j}) \\
 &= \sum_{j=1}^r H(\lambda_j |S_j| + \lambda_j |S_j| c_1^{S_j}, \lambda_j |S_j| + \lambda_j |S_j| c_2^{S_j}) \quad (\text{式 (11) より}) \\
 &\leq H\left(\sum_{j=1}^r (\lambda_j |S_j| + \lambda_j |S_j| c_1^{S_j}), \sum_{j=1}^r (\lambda_j |S_j| + \lambda_j |S_j| c_2^{S_j})\right) \quad (\text{式 (7) より}) \\
 &= H\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{\bar{i} \in S_j} 1 + \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{\bar{i} \in S_j} c_1^{\bar{i}}, \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{\bar{i} \in S_j} 1 + \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{\bar{i} \in S_j} c_2^{\bar{i}}\right) \quad (\text{仮定 (4) より}) \\
 &= H\left(\sum_{\bar{i} \in M} \sum_{j: \bar{i} \in S_j} \lambda_j + \sum_{\bar{i} \in M} c_1^{\bar{i}} \sum_{j: \bar{i} \in S_j} \lambda_j, \sum_{\bar{i} \in M} \sum_{j: \bar{i} \in S_j} \lambda_j + \sum_{\bar{i} \in M} c_2^{\bar{i}} \sum_{j: \bar{i} \in S_j} \lambda_j\right) \\
 &= H(|M| + |M|c_1^M, |M| + |M|c_2^M) \quad (\text{式 (8) と仮定 (4) より}) \\
 &= |M|H(1 + c_1^M, 1 + c_2^M). \quad (\text{式 (11) より})
 \end{aligned} \tag{12}$$

□

ノード数が3以上になるとゲームの値 $C(S)$ を与えるためにパラメータに条件を付けることが必要になる（詳細は [4] を参照）。条件 (2) および (3) を満たす負担額ベクトルのうちどれを選ぶかということは協力ゲームの解の選択の問題となる。ここではこの議論は割愛する（協力ゲームの解の例については [5] の第 XII, XIII 章を参照）。

例 1. $m = 2$ の場合

命題 1 により

$$C(\{\bar{1}\}) + C(\{\bar{2}\}) \geq C(\{\bar{1}, \bar{2}\}) \tag{13}$$

である。例えば、

$$x_1 = \frac{C(\{\bar{1}, \bar{2}\}) - C(\{\bar{2}\}) + C(\{\bar{1}\})}{2}, x_2 = \frac{C(\{\bar{1}, \bar{2}\}) - C(\{\bar{1}\}) + C(\{\bar{2}\})}{2} \tag{14}$$

は条件 (2) および (3) を満たしている。

5. おわりに

次のようなことが今後の検討課題である。

- (i) Linear graph $N = \{0, 1, 2, 3\}$, $E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ の場合に式 (1) や式 (9) が成り立つための条件を調べること。
- (ii) 応用上は仮定 (4) の 2、3 番目の等式を不等式にした場合の分析が望ましいかも知れない。つまり

$$\begin{aligned} d^S(j, k) &\leq \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} d^i(j, k) = 1, \forall S \subseteq M, \forall (j, k) \in E, \\ c_j^S &\leq \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} c_j^i, \forall S \subseteq M, \forall j \in N \end{aligned} \quad (15)$$

の場合。

- (iii) $m = 2$ のときは協力ゲームの種々の解が例 1 で与えた負担額ベクトルを与える。 $m \geq 3$ の場合の解の選択の検討。

謝辞

本研究に関して科学研究費補助金（基盤研究 (C)23510177）の助成を受けている。

参考文献

- [1] S. Alpern and S. Gal (2003), *The theory of search games and rendezvous*. Kluwer's INTERNATIONAL SERIES.
- [2] P. Borm, H. Hamers and R. Hendrickx (2001), Operations research games: a survey. *TOP*, pp.139-199.
- [3] K. Kikuta (1995), A search game with traveling cost on a tree. *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.38, pp.70-88.
- [4] K. Kikuta (2004), A search game on a cyclic graph. *Naval Research Logistics*, Vol.51, pp.977-993.
- [5] G. Owen (1975), *Game theory*, Third ed.
- [6] W. Ruckle (1983), *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston.
- [7] J. Zhang (2009), Cost allocation for joint replenishment models. *Operations Research*, Vol.57, pp.146-156.