

Decay of Solutions of the Wave Equation with a Local Degenerate Dissipation

九大数理学 中尾慎宏 (Mitsuhiro Nakao)

§1. 問題の説明.

Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界領域として, 次のような dissipation を持つ波動方程式の初期-境界値問題を考える.

$$ii) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + p(x, u_t) = 0 & \text{in } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ and } u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

ここで $p(x, u_t)$ は $a(x)|u_t|^\gamma u_t$, $\gamma > -1$, のようなものと仮定しておく. ただし, 本講演では主として線形の場合 ($\gamma=0$) について述べることにする. $t \rightarrow \infty$ のときの解の減衰度を調べるのが目的である. 以下, $p(x, u_t) = a(x)u_t$ とする.

[(A) $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ in Ω] のときは, 通常のエネルギー法により

$$(2) \quad E(t) \equiv \frac{1}{2} \{ \|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \} \leq (E(0)) e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0.$$

が容易に得られる. (くわしい結果, 又は一般化については [13], [6] 参照) 著者忘れたが $a(x)$ は連続としてある.

[(B) $a(x_0) > 0$ for some $x_0 \in \bar{\Omega}$] のときは, 最も dissipation 効果の弱い場合であるが,

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

が知られている. (N. Iwasaki [3], C. Datermos [2]) (3) の証明には, 力学系の理論的な考察と概周期解の性質にもとづく「エネルギー定理」が用いられる.

(A) と (B) の中間的な場合として [8] では次のような状況が考察された.

$$[(C) \quad a(x) > 0 \text{ a.e. } x \in \bar{\Omega} \text{ で } \int_{\bar{\Omega}} \frac{1}{a(x)^p} dx < \infty, \quad 0 < p < 1.]$$

このとき,

$$(4) \quad E(t) \leq C (\|u_0\|_{H_{m+1}}, \|u_1\|_{H_m}) (1+t)^{-2p m/N}$$

が示されている. ただし, $m > N/2$ とし, $(u_0, u_1) \in H_{m+1} \times H_m$ は m 次の両立条件を満たすとする. この評価は, (C) のような状況では, 解の減衰度は $a(x)$ の退化度 ($=1/p$) と解の正則度 ($=m$) に依存することを示している. (4) は quasilinear 方程式の大域解の存在と decay を示す際にも用いられる. ([11])

最近, Bardos, Lebeau & Rauch [1] は指数的減衰 (2) が成立するための $a(x)$ に対する必要十分条件を与えた. それは, 「 $\partial\Omega$ の任意の点から出る幾何光線が, ある一定の時間 T 内に必ず $\text{supp } a(x) \equiv \{x \in \bar{\Omega} \mid a(x) > 0\}$ と交わる」というものである.

たとえば, $\partial\Omega$ の近傍で $a(x) > 0$ ならこ

の条件はみたされる。しかし、証明には $a(x)$, $\partial\Omega$ が C^∞ 級と仮定され、いわゆる超局所解析の方法が用いられているので半線型方程式に適用するには無理があるように思われる。

一方、E. Zuazua [15] は、J.L. Lions の Control Theory [8] に登場する次の条件を採用して (2) を証明した。

[(D) $P(x_0) = \{x \in \partial\Omega \mid (x-x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$ (ν は単位外法線ベクトル) とおくと、ある $x_0 \in \mathbb{R}^N$ と $P(x_0)$ のある近傍 (π の) ω が存在して

$$a(x) \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \text{in } \omega$$

となる。] (図参照)

証明法はエネルギー法

(multiplier method) と一意連続性

を組み合わせたもので、これはある種の半線型方程式にも適用できる。本講演の主な目的は、筆者の条件 (C) と (D) の共通部分をとったもの(?)

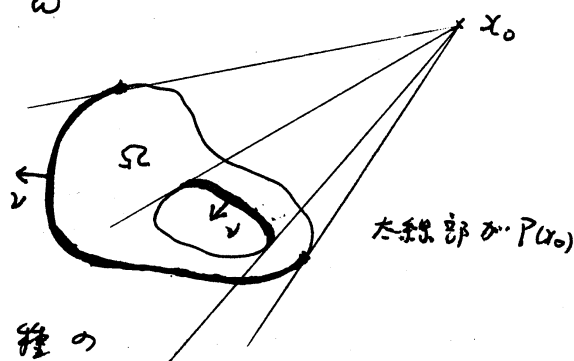
[(C) (D) における ω に対して、 $a(x) > 0$ a.e. $x \in \omega$

$$\text{かつ } \int_{\omega} \frac{1}{a(x)^p} dx < \infty, \quad 0 < p < 1.]$$

という条件下で評価 (4) が成立する二を示すことである。

得られた結果は半線形波動方程式

$$(5) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{and } u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$



のためには大域解の存在問題について注意しておく。

次に非線形 dissipative 項の場合に触れておこう。典型例として $f(x, u_t) = |u_t|^r u_t$ の場合には、次のようになっている： $[5, 9, 10, 12]$

$$(6) \quad E(t) \leq \begin{cases} C_0 (1+t)^{-2/r} & \text{if } 0 < r \leq 4/(N-2)^+ \\ C_1 (1+t)^{-2/r} & \text{if } 4/(N-2)^+ < r \leq 8/(N-4)^+ \\ C_1 (1+t)^{-2} & \text{if } -1 < r < 0 \end{cases}$$

ただし、 $r \equiv \min \left(\frac{r+1}{-r}, \frac{2}{-r(N-2)^+} \right)$, $C_0 = C(\|u_0\|_{H^2}, \|u_1\|_{H^1})$ である。

我々の方法と Zuazua の方法を組み合わせることにより、 $f = a(x)|u_t|^r u_t$ で $a(x)$ が Lions の条件 (D) をみたすとき $E(t)$ の減衰評価が導かれる。非線形項の場合は結果が述べられている。（Theorem 2）

§2. 補題とエネルギー等式

結果の証明には次の三つの補題を本質的に用いる。

Lemma 1 (Gagliardo-Nirenberg) $1 \leq r < p \leq \infty$, $1 \leq q < p$

かつ $m \geq 0$ (整数) とする。このとき

$$(7) \quad \|u\|_{W^{k,p}} \leq C \|u\|_{W^{m,q}}^\theta \|u\|_r^{1-\theta}$$

が成立する。ただし

$$\theta = \left(\frac{k}{N} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{m}{N} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)^{-1}$$

で, $0 < \theta \leq 1$ を満たされるものとする. ($p = \infty$, $m = \text{integer}$ のときは $0 < \theta < 1$.)

Lemma 2. $\phi(x)$ は $[0, \infty)$ 上の非負実関数で, 差分方程式

$$\sup_{t \leq x \leq t+T} \phi(x)^{1+\gamma} \leq g(x) (\phi(x) - \phi(x+T))$$

を満たすとする. したがって, $T > 0$, $\gamma > 0$ で $g(x)$ は連続な非減少関数. このとき,

$$(8) \quad \phi(x) \leq \left\{ \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \phi(s) \right)^{-\gamma} + \int_T^x g(s)^{\gamma} ds \right\}^{-1/\gamma}, \quad x \geq T,$$

が成立する. ([5, 7] 参照)

Lemma 3. (一意連続性) $u \in C([0, T]; H_1) \cap C^1([0, T]; L^2)$

は波動方程式 $u_{tt} - \Delta u = 0$ on $\Omega \times [0, T]$ の解で, Ω に

ふくまれているある開集合上で $u_t(x, t) = 0$, $0 \leq x \leq T$, とする. すると

とて, もし $T > \text{diam}(\Omega)$ ならば, $u(x, t) \equiv 0$ on $\Omega \times [0, T]$

である. (より一般的结果として Ruiz [14] 参照)

u を適宜に延べたものを (1) の解とすると, multiplier method により次の等式が成立する.

$$(9) \quad \int_t^{t+T} \int_{\Omega} g(x, u_t) u_t dx d\Omega = E(t) - E(t+T) \quad (E_g \cdot x u_t)$$

$$(10) \quad \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_{\Omega} \nabla \cdot h (|u_t|^2 - |u_x|^2) dx d\Omega + \sum_{i,j} \int_t^{t+T} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_j} dx d\Omega \\ + \int_t^{t+T} \int_{\Omega} g(u, u_t) h \cdot \nabla u dx d\Omega = -(u_t u, h \cdot \nabla u) \Big|_t^{t+T} + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_{\partial \Omega} h \cdot \nu \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 dx d\Omega.$$

($E_g \cdot h \cdot \nabla u$). 二で h は vector fields.

$$(11) \int_t^{t+T} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx ds = - (u_t, u_t) \Big|_t^{t+T} - \int_t^{t+T} \int_{\Omega} \nabla \cdot u \nabla u dx ds \\ + \int_t^{t+T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx ds - \int_t^{t+T} \int_{\Omega} p(x, u_t) |u_t| dx ds$$

($\nabla \cdot u \times u$).

§3. $p(x, u_t) = a(x) u_t$ に対する結果と略記

§1. で $\nabla \cdot u$ に述べた通り, 次の成立する.

Theorem 1. $a \in C^m(\bar{\Omega})$, $m > N/2$ とし, 条件 (C $\cap$ D) が
 満たされていいるとする. $(u_0, u_1) \in H_{m+1} \times H_m$ は m 次の両立条件
 を満たすとする. すると (1) は

$$u \in \bigcap_{k=0}^m C^k([0, \infty); H_{m+1-k} \cap H_1^0) \cap C^{m+1}([0, \infty); L^2)$$

なる一意解を持ち, 評価 (4), より $\leq$ は次の成立する:

$$(4)' \quad E(t) \leq \left\{ E(0)^{-N/2mp} + C_m (t-T)^+ \right\}^{-2mp/N}, \quad t \geq 0.$$

注. 上の定理では $\sum_{i=0}^{m+1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t) \right\|_{H_{m+1-i}}^2 \leq C_m < \infty$ が成り立つ

ので, (4) より

$$(4)'' \quad \sum_{i=0}^{k+1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t) \right\|_{H_{k+1-i}}^2 \leq C_m (1+t)^{-2(m-k)P/N}$$

($1 \leq k \leq m$) が成立する ことに注意.

Theorem 1 の略証

存在定理はよく知られていいるので評価 (4)' を導くことにする.

まず (9) より

$$(9)' \quad \int_t^{t+T} \int_{\Omega} a(x) |u_t|^2 dx ds = E(t) - E(t+T) \equiv D(t)^2.$$

次に (10), (11) にあてて, 2 点 \$h(x) = x - x_0\$, \$\chi(x) \equiv 1\$ とし,
 1) , \$\chi\$ を用いてまとめると

$$(12) \quad \int_x^{x+T} E(\rho) d\rho \leq C \{ E(x+T) + E(x) \} + C \int_x^{x+T} \int_{P(x_0)} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 dx d\rho$$

を得る.

続いて, \$P(x_0) \subset \hat{\omega} \subset \omega\$ なる開集合 \$\hat{\omega}\$ (\$\subset \omega\$) をとり,
 \$\chi\$ を \$0 \leq \chi < 1\$, \$\chi = 1\$ on \$\hat{\omega}\$, \$\chi = 0\$ on \$\Omega/\omega\$ かつ \$|\nabla \chi|^2/\chi \in L^\infty\$
 なるものをとると, (11) より

$$(13) \quad \int_x^{x+T} \int_{\Omega} \chi |\nabla u|^2 dx d\rho \leq C (E(x) + E(x+T)) + C \int_x^{x+T} \int_{\omega} (|u_t|^2 + |u|^2) dx d\rho$$

を得る.

さらに, \$\mathbb{R}^N\$ の開集合 \$\tilde{\omega}\$ を \$\tilde{\omega} \cap \Omega \subset \omega\$ とするようにと
 り, \$C^1\$ 級 vector field \$h(x)\$ を

\$h = \nu\$ on \$P(x_0)\$, \$h \cdot \nu \geq 0\$ on \$\partial \Omega\$ かつ \$h = 0\$ on \$\Omega/\tilde{\omega}\$
 とするものとすると, (10) より

$$(14) \quad \left(\int_x^{x+T} \int_{P(x_0)} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 dx d\rho \leq \int_x^{x+T} \int_{\partial \Omega} (h \cdot \nu) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 dx d\rho \right. \\ \left. \leq C \int_x^{x+T} \int_{\tilde{\omega}} (|u_t|^2 + |u|^2) dx d\rho + C (E(x) + E(x+T)) \right)$$

\$TE(x+T) \leq \int_x^{x+T} E(\rho) d\rho\$ に注意して, \$T\$ を十分大きくとると
 (9)', (12), (13), (14) より

$$(15) \quad E(x+T) \leq C \{ D(x)^2 + \int_x^{x+T} \int_{\omega} (|u_t|^2 + |u|^2) dx d\rho \}$$

を得る.

そこで, 次の命題が必要となる.

Proposition 1. $T > \text{diam}(\Omega)$ としおけば, ある定数 C に
 対して,

$$(16) \quad \int_x^{x+T} \|u(t)\|^2 dt \leq C \left\{ D(u)^2 + \int_x^{x+T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx ds \right\}.$$

この命題の証明は, 背理法を用いて Lemma 3 に帰着させ
 ることにしよう。実際, (16) が不成立とすれば,

$$\int_{x_n}^{x_n+T} \|u(t)\|^2 dt \geq n \left\{ \int_{x_n}^{x_n+T} \int_{\Omega} a(x) |u_t|^2 dx ds + \int_{x_n}^{x_n+T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx ds \right\}$$

とある数列 $\{x_n\}$ がとれる。 $n = 2^m$ $\lambda_n \equiv \int_{x_n}^{x_n+T} \|u(t)\|^2 dt$ とお
 き, $u_n(x) \equiv u(x+x_n)/\sqrt{\lambda_n}$, $0 \leq x \leq T$, とおくと $u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty}$
 $u_n(x)$ (in $L^2(\Omega \times [0, T])$) は次で与えられる。

$u \in C^1([0, T]; L^2) \cap C([0, T]; H_0^1)$ で $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $\Omega \times [0, T]$
 かつ $u(x) \equiv 0$ on $\Omega \times [0, T]$ かつ $\int_0^T \|u(x)\|^2 dx = 1$.

Lemma 3 より $u(x) \equiv 0$ on $\Omega \times [0, T]$ となるが, これは最後
 の条項に矛盾している。

さて, (15), (16) より

$$(17) \quad E(u) \leq C \left\{ D(u)^2 + \int_x^{x+T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx ds \right\}$$

を得る。そこでさらに,

$$\int_x^{x+T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx ds \leq \left(\int_x^{x+T} \int_{\Omega} a |u_t|^2 dx ds \right)^{p/(p+1)} \left(\int_x^{x+T} \int_{\Omega} a^{-p} dx ds \right)^{1/(p+1)}$$

$$\times \sup_{t \leq s \leq t+T} \|u_t\|_{\infty}^{2/(p+1)}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C D(t)^{2P/(P+1)} \sup_{t \leq s \leq t+T} \|u_t(\omega)\|^{2(1-N/2m)/(P+1)} \|u_t(\omega)\|_{H_m}^{N/m(P+1)} \\
 (18) \quad &\leq C_m D(t)^{2P/(P+1)} E(t)^{(2m-N)/2m(P+1)}
 \end{aligned}$$

(17), (18) より 差分不等式

$$(19) \quad E(t)^{1+N/2mp} \leq C_m^{N/mp} (E(t) - E(t+T))$$

を得る. ことに Lemma 2 を適用 (2.4)' を導く.

§4. 非線形型 dissipative 項の場合.

$\rho(x, u)$ について 2 次を仮定する.

仮定 $\rho(x, u) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $u \neq 0$ で微分可能で次をみたすとする.

$$(1) \quad a(x)|u|^{r+2} \leq \rho(x, u)u \leq b_0 a(x)(|u|^{r+2} + |u|^2) \quad \text{if } |u| \leq 1,$$

$$(2) \quad a(x)|u|^{p+2} \leq \rho(x, u)u \leq b_1 a(x)(|u|^{p+2} + |u|^2) \quad \text{if } |u| \geq 1,$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \rho(x, u) \geq 0 \quad (u \neq 0),$$

ただし, $-1 < r < \infty$, $-1 \leq p \leq 2/(N-2)^+$ ($-1 \leq p < \infty$ if $N=1, 2$)

とし, $a(x)$ は条件 (D) をみたすものとする.

Theorem 2. $(u_0, u_1) \in H_2 \cap H_1^0 \times H_1^0$ とする. このとき, 上の仮定の下で, (1) は

$$u \in W^{2,\infty}([0,\infty); L^2) \cap W^{1,\infty}([0,\infty); H_1^0) \cap L^\infty([0,\infty); H_2)$$

の一意的解をもち, u は次の評価をみたす.

$$(20) \quad E(t) \leq C_1 (1+t)^{-2\gamma}$$

そこで, η は次のように定める:

$$(i) \quad r \geq 0 \text{ かつ } 0 \leq p \leq 2/(N-2)^+ \quad \text{ならば} \quad \eta = \min \{ 1/r, 2(p+1)/p(N-2)^+ \}$$

$$(ii) \quad r \geq 0 \text{ かつ } -1 \leq p < 0 \quad \text{ならば} \quad \eta = \min \{ 1/r, -2/p(N-2)^+ \}$$

$$(iii) \quad -1 < r < 0 \text{ かつ } 0 \leq p \leq 2/(N-2)^+ \quad \text{ならば} \quad \eta = \min \{ -(1+r)/r, 2(p+1)/p(N-2)^+ \}$$

$$(iv) \quad -1 < r < 0 \text{ かつ } -1 \leq p < 0 \quad \text{ならば} \quad \eta = \min \{ -(1+r)/r, -2/p(N-2)^+ \}$$

(とくに, $p=r=0$ ならば通常のエネルギー有界解に対して指数的減衰が導かれる.)

Theorem 2 の証明の方針は基本的に Theorem 1 と同じであるが, 非線型項の処理に新しい工夫が必要である. とくに, 1) 3) 3) 各段階で Lemma 1 を駆使する = ことにする.

References

1. C.Bardos, G.Lebeau and J.Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, controle and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control and Optimiz., 30 (1992), 1024-1065.
2. C.Dafermos, *Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations*, M.G.Crandall Ed., Academic Press, New York, 1978, 103-123.
3. N.Iwasaki, *Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative and coercive boundary conditions in exterior domains*, Publ.R.I.M.S., Kyoto Univ., 5(1969), 193-218.
4. J.L.Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev., 30 (1988), 1-68.
5. M.Nakao, *Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term*, J. Math. Anal. Appl., 58 (1977), 336-343.

6. M.Nakao, *Decay of solutions of some nonlinear evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., 60(1977), 542-549.
7. M.Nakao, *A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations*, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 747-762.
8. M.Nakao, *Energy decay for the wave equation with a degenerate dissipative term*, Proc. Royal Soc. Edinburgh A 100(1985), 19-27.
9. M.Nakao, *On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions*, Math. Z., 193 (1986), 227-234.
10. M.Nakao, *On solutions of the wave equation with a sublinear dissipative term*, J. Diff. Eqns., 69 (1987), 204-215.
11. M.Nakao, *Existence of global smooth solutions to the initial-boundary value problem for the quasi-linear wave equation with a degenerate dissipative term*, J. Diff. Eqns., 98(1992), 299-327.
12. M.Nakao, *Energy decay for the wave equation with a nonlinear weak dissipation*, Diff. and Integ. Eqns. (1994), to appear.
13. J.Rauch and Taylor, *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain*, Indiana Univ. Math. J., 24(1974), 79-86.
14. A.Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential*, J. Math. Pures Appl., 71(1992), 455-467.
15. E.Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Comm. P.D.E., 15 (1990), 205-235.