

Bombieri-Davenport 定理の改良について^(*)

日本大学 本橋 洋一

本報告集にある私の論説 [M₄] において, Bombieri-Davenport 定理 [M₄, 定理3] を源とする篩法の発展が, 素数分布論において, 重要な手段を提供することを見つけたのであるが, ここでは, より一層深く B-D 定理の改良ということに話を限定することにしよう。

B-D 定理はよく知られているように, Brun-Titchmarsh (以下 B-T) 定理をその系としてきた。しかも, B-T 定理は [M₁] [M₂] [G] [W] によって, 最近, 興味ある改良を得てきた。そこで当然のことながら, これらの改良を特別の場合としてきたような, B-D 定理の改良ということが予想される。

我々は更に一歩すすめて, Selberg の large sieve 不等式

$$(1) \quad \sum_{\substack{qr \leq Q \\ (q,r)=1}} \frac{q}{\varphi(qr)} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \left| \sum_{\substack{m=1 \\ M}}^{M+N} a_m \chi(m) c_r(m) \right|^2 \leq (N+Q^2) \sum_{\substack{m=1 \\ M}}^{M+N} |a_m|^2$$

(*) 速報 [M₃] をくわしく解説したものである。

の (特別な場合の) 改良を示すことにする。我々の結果は、

定理 (Motohashi)

$c_r(m)$ は Ramamujan 和, a_m は任意の複素数とする。

このとき $(k, l) = 1$ に対して

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r) = (qr, k) = 1}} \frac{q}{\varphi(qr)} \sum_{\substack{\chi(\bmod q) \\ \chi(l \bmod k)}}^* \left| \sum_{\substack{m \leq N \\ m \equiv l \pmod{k}}} a_m \chi(m) c_r(m) \right|^2$$

$$\leq \Lambda \sum_{\substack{m \leq N \\ m \equiv l \pmod{k}}} |a_m|^2$$

$$\Lambda = \frac{N}{k} (1 + O((\log N)^{-1})) + O_\varepsilon \left(\frac{QR}{\sqrt{k}} (R + kQ^2) (QRkN)^\varepsilon \right)$$

とくに $k=1$ としてみると, これは (1) の (特別な場合の) 改良となり, ていえることがわかる。(勿論 $R \geq Q^2$ の条件下であるが, 節の結果としては, R が大きい場合が意味がある訳で, 我々の結果はその点で改良となり, ていえるのである。) linear sieve Λ の応用としては,

系

$N^{2/5} \geq kQ^2$ の場合

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k) = 1}} \sum_{\substack{\chi(\bmod q) \\ \chi(l \bmod k)}}^* \left| \sum_{\substack{p \equiv l \pmod{k} \\ p \leq N}} \chi(p) \right|^2 \leq (2+\varepsilon) \frac{N}{\varphi(k) \log(N/(kRQ))} \pi(N; k, l).$$

$Q=1$ とすれば 明らかに これは $[M_1]$ における B-T 定理の改良をあたえる。[G] に対入するものも容易に得らるが、結果が複雑になるので、ここでは割愛する。上記の結果の注目すべき点は、 $k=1$ のときにすら、すでに、B-D 定理の改良をあたえてくれることである。ちなみに、B-D 定理からは

$$\log(N/QR) \text{ の代りに } \log(N/Q^2k)$$

が得るのである。

以下、定理の証明に入る。

其後の形式を考へればよい。そこで次のように置く。

$$I(N) = \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv l \pmod{k}}} \left| \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q,r)=1 \\ (qr,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(qr)} \right)^{1/2} c_r(n) \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) b(r, \chi) \right|^2$$

ここに $b(r, \chi)$ は任意の複素数。しかし、計算をすすめるには、

$I(N)$ の Riesz 平均

$$I_1(N) = \int_1^N I(y) dy / y$$

を考察する方が楽である。それは $I_1(N)$ が次のような '解析的' な表現をもつからである。

$$I_1(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \sum_{n \equiv l \pmod{k}} \frac{1}{n^s} \left| \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q,r)=1 \\ (qr,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(qr)} \right)^{1/2} c_r(n) \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) b(r, \chi) \right|^2 \frac{N^s}{s^2} ds$$

$$= \varphi(k)^{-1} \sum_{\xi \pmod{k}} \frac{\bar{\xi}(l)}{2\pi i} \int_{(2)} F(s, \xi) \frac{N^s}{s^2} ds.$$

但し ξ は $\text{mod } k$ の Dirichlet 指標 である。

$$F(s, \xi) = \sum \frac{\xi(m)}{m^s} \left| \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R}} \left(\frac{q}{\varphi(qr)} \right)^{1/2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) C_r(n) b(r, \chi) \right|^2.$$

$F(s, \xi)$ を計算する前に 次のことを注意しよう。Ramanujan 数 $C_r(n)$

は、よく知られたように、

$$C_r(n) = \sum_{\substack{d|r \\ d|m}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d$$

を用いる。すると

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R}} \left(\frac{q}{\varphi(qr)} \right)^{1/2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) C_r(n) b(r, \chi)$$

$$\begin{matrix} (q, r) = 1 \\ (qr, k) = 1 \end{matrix}$$

$$= \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k) = 1}} \left(\frac{q}{\varphi(q)} \right)^{1/2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) \sum_{\substack{r \leq R \\ (qr, k) = 1}} \frac{b(r, \chi)}{\sqrt{\varphi(r)}} \sum_{\substack{d|r \\ d|m}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d$$

$$= \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k) = 1}} \left(\frac{q}{\varphi(q)} \right)^{1/2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) \sum_{\substack{d|m \\ d \leq R \\ (d, qk) = 1}} d \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk) = 1}} \mu(u) \frac{b(du, \chi)}{\sqrt{\varphi(du)}}$$

$$= \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k) = 1}} \left(\frac{q}{\varphi(q)} \right)^{1/2} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) \sum_{\substack{d|m \\ d \leq R \\ (d, qk) = 1}} \lambda(d, \chi)$$

とある。

$$\lambda(d; \chi) = d \sum_{\substack{u \in R/d \\ (u, qk)=1}} \mu(u) b(du, \chi) \varphi(du)^{-1/2}$$

である。従って、 $F(s, \xi)$ の右辺を展開すると、

$$F(s, \xi) = \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ (q_1, q_2, k)=1}} \left(\frac{q_1 q_2}{\varphi(q_1) \varphi(q_2)} \right)^{1/2} \sum_{\substack{\chi_1 \pmod{q_1} \\ \chi_2 \pmod{q_2}}}^* \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq R \\ (d_1, d_2, k)=1 \\ (d_j, q_j)=1 \\ (j=1, 2)}} \lambda(d_1, \chi_1) \overline{\lambda(d_2, \chi_2)} \times \\ \times \sum_{[d_1, d_2] | n} \frac{\xi \chi_1 \bar{\chi}_2(n)}{m^s}$$

そこで、当然、条件 $(d_1, d_2, k)=1$, $(d_j, q_j)=1$ ($j=1, 2$) はおとれておまわり。よって

$$F(s, \xi) = \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ (q_1, q_2, k)=1}} \left(\frac{q_1 q_2}{\varphi(q_1) \varphi(q_2)} \right)^{1/2} \sum_{\substack{\chi_1 \pmod{q_1} \\ \chi_2 \pmod{q_2}}}^* L(s, \xi \chi_1 \bar{\chi}_2) H(s; \chi_1, \chi_2, \xi)$$

但し

$$H(s; \chi_1, \chi_2, \xi) = \sum_{d_1, d_2 \leq R} \frac{\xi \chi_1 \bar{\chi}_2([d_1, d_2])}{[d_1, d_2]^s} \lambda(d_1, \chi_1) \overline{\lambda(d_2, \chi_2)}$$

更に $H(s; \chi_1, \chi_2, \xi)$ を '2乗和' の形に変形するのであるが、これには、

$$H(s; \chi_1, \chi_2, \xi) = \sum_{d_1, d_2 \leq R} \frac{\xi \chi_1 \bar{\chi}_2(d_1) \xi \chi_1 \bar{\chi}_2(d_2)}{(d_1 d_2)^s} \lambda(d_1, \chi_1) \overline{\lambda(d_2, \chi_2)} \times \\ \times (d_1, d_2)^s \xi \bar{\chi}_1 \chi_2((d_1, d_2))$$

に注意して,

$$\sum_{\substack{d|d_1 \\ d|d_2}} \overline{\xi} \chi_1 \chi_2(d) d^s \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\overline{\xi} \chi_1 \overline{\chi}_2(p)}{p^s}\right) = (d_1, d_2)^s \overline{\xi} \chi_1 \chi_2((d_1, d_2))$$

であるから,

$$H(s; \chi_1, \chi_2, \overline{\xi})$$

$$= \sum_{d \leq R} \frac{\overline{\xi} \chi_1 \overline{\chi}_2(d)}{d^s} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\overline{\xi} \chi_1 \overline{\chi}_2(p)}{p^s}\right) \times \\ \times \left(\sum_{u \leq R/d} u^{-s} \lambda(du, \chi_1) \chi_1 \overline{\chi}_2 \overline{\xi}(u) \right) \left(\sum_{v \leq R/d} v^{-s} \overline{\lambda}(dv, \chi_2) \chi_1 \overline{\chi}_2 \overline{\xi}(v) \right)$$

を得る。以上から

$$I_1(N) = \varphi(k)^{-1} \sum_{\substack{\overline{\xi} \pmod{k} \\ (\overline{\xi}, k) = 1}} \overline{\xi}(1) \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ (q_1, q_2, k) = 1}} \left(\frac{q_1 q_2}{\varphi(q_1) \varphi(q_2)} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{\substack{\chi_1 \pmod{q_1} \\ \chi_2 \pmod{q_2}}}^* \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} L(s, \chi_1 \overline{\chi}_2 \overline{\xi}) H(s; \chi_1, \chi_2, \overline{\xi}) \frac{N^s}{s^2} ds$$

積分路を $\operatorname{Re}(s) = (\log N)^{-1}$ (N : 充分大) に移動するのである

が、この際に $L(s, \chi_1 \overline{\chi}_2 \overline{\xi})$ が $s=1$ で極を持つのは、

$\chi_1 = \chi_2$, $\overline{\xi}$: 単指標 の場合にあてはまる

ことに注意する。これは χ_1, χ_2 が原始指標で、しかもその法が k と互に素であるから言えるのである。こうして、上記の場合、

$$\operatorname{Res}_{s=1} L(s, \chi_1 \overline{\chi}_2 \overline{\xi}) = \varphi(qk)/qk \quad (q = q_1 = q_2) \quad \text{であるから}$$

$$I_1(N) = \frac{N}{k} \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k)=1}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* H(1; \chi, \chi, \xi_0) \quad (\xi_0: \text{単位指標})$$

$$+ O\left(\frac{(kQ)^\varepsilon}{k} P(\log N)^2\right)$$

$$\text{但し } P = \sum_{\xi \pmod{k}} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ (q_1, q_2, k)=1}} \sum_{\substack{\chi_1 \pmod{q_1} \\ \chi_2 \pmod{q_2}}}^* \int_{-\infty}^{+\infty} |L(\sigma_0 + it, \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi)| |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \frac{dt}{|t|^2 + 1}$$

$$(\sigma_0 = (\log N)^{-1})$$

$$\pm \tau, \quad \chi \pmod{q} \text{ と } 1 \pmod{q},$$

$$H(1; \chi, \chi, \xi_0)$$

$$= \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, qk)=1}} \frac{1}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left\{ \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} \frac{\lambda(du, \chi)}{u} \right\} \left\{ \sum_{\substack{v \leq R/d \\ (v, qk)=1}} \frac{\overline{\lambda(dv, \chi)}}{v} \right\}$$

一方 $\lambda(du, \chi)$ の定義から

$$\sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} \frac{\lambda(du, \chi)}{u} = d \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} \sum_{\substack{w \leq R/du \\ (w, qk)=1}} \mu(w) b(duw, \chi) \varphi(duw)^{-1/2}$$

$$= d \sum_{\substack{a \leq R/d \\ (a, qk)=1}} b(da, \chi) \varphi(da)^{-1/2} \sum_{w|a} \mu(w)$$

$$= d b(d, \chi) \varphi(d)^{-1/2}$$

$$\text{よって } H(1; \chi, \chi, \xi_0) = \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, qk)=1}} |b(d, \chi)|^2$$

方針は

$$I_1(N) = \frac{N}{k} \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q,r)=(q,k)=1}} \sum_{\chi(\bmod q)}^* |b(r, \chi)|^2 \\ + O\left(\frac{(kQ)^\varepsilon}{k} P(\log N)^\varepsilon\right).$$

次に P を評価しよう。

$$L(\sigma_0 + it, \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi) \ll ((|t|+1)q_1 q_2 k)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

でめざす

$$P \ll (Q^2 k)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sum_{\substack{\xi(\bmod k) \\ (q_1, q_2, k)=1}} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ \chi_1(\bmod q_1) \\ \chi_2(\bmod q_2)}}^* \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \frac{dt}{|t|^{\frac{5}{2}+1}}.$$

したがって

$$\sum_{\substack{\xi(\bmod k) \\ (q_1, q_2, k)=1}} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ \chi_1(\bmod q_1) \\ \chi_2(\bmod q_2)}}^* |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \\ \ll R^\varepsilon \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, k)=1}} \sum_{\xi} \sum_{q_1, q_2} \sum_{\chi_1, \chi_2}^* \left| \sum_{u \leq R/d} \frac{\lambda(du, \chi_1)}{u^s} \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi(u) \right| \left| \sum_{v \leq R/d} \frac{\overline{\lambda(dv, \chi_2)}}{v^s} \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi(v) \right| \\ (s = \sigma_0 + it)$$

$$\ll R^\varepsilon \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, k)=1}} \left\{ \sum_{\substack{q_1 \leq Q \\ (q_1, k)=1}} \sum_{\chi_1(\bmod q_1)}^* \sum_{\substack{\xi(\bmod k) \\ (q_2, k)=1}} \sum_{q_2 \leq Q} \sum_{\chi_2(\bmod q_2)}^* \left| \sum_{u \leq R/d} \frac{\lambda(du, \chi_1)}{u^s} \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi(u) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \sum_{\substack{q_2 \leq Q \\ (q_2, k)=1}} \sum_{\chi_2(\bmod q_2)}^* \sum_{\substack{\xi(\bmod k) \\ (q_1, k)=1}} \sum_{q_1 \leq Q} \sum_{\chi_1(\bmod q_1)}^* \left| \sum_{v \leq R/d} \frac{\overline{\lambda(dv, \chi_2)}}{v^s} \chi_2 \bar{\chi}_1 \xi(v) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

さて、乗法的 large sieve 不等式を少し改良して、一般に

$$\sum_{\xi \pmod{k}} \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,k)=1}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \left| \sum_M^{M+N} a_m \chi_{\xi}(m) \right|^2 \\ \leq (N + kQ^2) \sum_{\substack{M \\ (m,k)=1}}^{M+N} |a_m|^2$$

が言える。これは、 ξ を原始指標にあてかえて、Gauss 和により χ_{ξ} をあらわせば、通常の加法的 large sieve の形になり、その際にあらわれる Farey series に相当する $\frac{a}{qd}$ のが

$$\frac{a}{qd} \quad (d|k, (q,k)=1, q \leq Q, (a,qd)=1)$$

となる故、あらに証明できる。これを上記の二重和の評価に用いると、

$$\sum_{\xi \pmod{k}} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ (q_1, q_2, k)=1}} \sum_{\substack{\chi_1 \pmod{q_1} \\ \chi_2 \pmod{q_2}}}^* |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \\ \ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{d \leq R \\ (d,k)=1}} \left\{ \sum_{\substack{q_1 \leq Q \\ (q_1, k)=1}} \sum_{\chi_1 \pmod{q_1}}^* \left(\frac{R}{d} + kQ^2 \right) \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, q_1 k)=1}} |\lambda(du, \chi_1)|^2 \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ \sum_{\substack{q_2 \leq Q \\ (q_2, k)=1}} \sum_{\chi_2 \pmod{q_2}}^* \left(\frac{R}{d} + kQ^2 \right) \sum_{\substack{v \leq R/d \\ (v, q_2 k)=1}} |\lambda(dv, \chi_2)|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{d \leq R \\ (d,k)=1}} \left(\frac{R}{d} + kQ^2 \right) \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,k)=1}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} |\lambda(du, \chi)|^2$$

一方 $\lambda(du, \chi)$ の定義から、 $\chi \pmod{q}$ とし、

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} |\lambda(du, x)|^2 \\
& \leq \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} (du)^2 \sum_{\substack{w \leq R/du \\ (dw, qk)=1}} \frac{1}{\phi(dw)} \sum_{\substack{w \leq R/du \\ (dw, qk)=1}} |b(dw, x)|^2 \\
& \ll d R^\varepsilon \sum_{\substack{w \leq R/du \\ u \leq R/d \\ (duw, qk)=1}} |b(duw, x)|^2 u
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\xi \pmod{k} \\ (q, q_2, k)=1}} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leq Q \\ (q_1, q_2, k)=1}} \sum_{\substack{\chi_1 \pmod{q_1} \\ \chi_2 \pmod{q_2}}}^* |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \\
& \ll R^\varepsilon \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k)=1}} \sum_{\substack{\chi \pmod{q}}}^* \sum_{\substack{d \leq R \\ (d, qk)=1}} \sum_{\substack{u \leq R/d \\ (u, qk)=1}} \sum_{\substack{w \leq R/du \\ (w, qk)=1}} du \left(\frac{R}{d} + kQ^2 \right) |b(duw, x)|^2 \\
& \ll R^{1+\varepsilon} (R + kQ^2) \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q, k)=1}} \sum_{\substack{\chi \pmod{q}}}^* \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, qk)=1}} |b(r, x)|^2
\end{aligned}$$

すなわち

$$P \ll (Q^2 k)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} R^{1+\varepsilon} (R + kQ^2) \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r) = (qr, k) = 1}} \sum_{\substack{\chi \pmod{q}}}^* |b(r, x)|^2.$$

すなわち

$$I_1(N) = \left\{ \frac{N}{k} + O\left(\frac{QR}{\sqrt{k}} (R + kQ^2) (kQRN)^\varepsilon \right) \right\} \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r) = (qr, k) = 1}} \sum_{\substack{\chi \pmod{q}}}^* |b(r, x)|^2.$$

そして, 簡単な Tauber 型の議論により,

$$I(N) = \left\{ \frac{N}{k} (1 + O(\log N^{-1})) + O\left(\frac{QR}{\sqrt{k}} (R + kQ^2)(kQRN)^{\varepsilon}\right) \right\} \sum_{\substack{q \leq Q \\ R \leq R}} \sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ (q, R) = (qR, k) = 1}}^* |b(r, \chi)|^2.$$

を得る。これは定理と同等の結果である。

定理の系については, 簡単な証明であるので, 略す。

参考文献.

[G] M. Goldfeld, A further improvement of the Brun-Titchmarsh theorem.

J. London Math. Soc., 11, 434-444 (1975).

[M₁] Y. Motohashi, On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem.

J. Math. Soc. Japan, 26, 306-323 (1974).

[M₂] ———, ——— II. 数理研講究録 193, 97-109 (1973).

[M₃] ———, A note on the large sieve. Proc. Japan Acad.,

53, 17-19 (1977).

[M₄] ———, 最小素数定理について. 本報告集.

[W] D. Wolke, Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung des

Satzes von Brun-Titchmarsh. 手稿.

(1977年3月9日記)