

$\boxtimes$ の HASSELBERG ζ

黒川信重
(東京工大・理・数学)

$\mathcal{C}$ を零対象 0 を持つ圏とする。

[1] $\mathcal{C}$ の "Hasse ζ " を次のように定義する:

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Hasse}}(s) = \prod_{P \in P_0(\mathcal{C})} (1 - N(P)^{-s})^{-1}.$$

ここで, $\mathcal{C}$ の対象 X のノルムを $N(X) = \# \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ と定め

$P_0(\mathcal{C}) = \{ X \text{ は } \mathcal{C} \text{ の単純対象} \mid N(X) < \infty \} / (\mathcal{C} \text{ の同値})$
と置く。

例 1 $\mathbf{Z}$ 上有限生成の可換環 R と自然数 n

に対して $M_n(R)$ を R 上の n 次行列環とし,

左 $M_n(R)$ -加群の圏を $\mathcal{C} = \text{Mod}(M_n(R))$ とすると

$\zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Hasse}}(s)$ は可換環 R の通常の Hasse ζ と

一致する:

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Hasse}}(s) = \prod_{\substack{m \subset R \\ \text{極大イデアル}}} (1 - (\#(R/m))^{-s})^{-1}.$$

($R = \mathbf{Z}$ のときはリーマン・ゼータである。圏論的構成なので n によらない。通常の多元環の ζ とは異なる。)

[2] $\tilde{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ の道 (path) の圏

($\tilde{\mathcal{C}}$ の対象は $\mathcal{C}$ の射の列 $\mathbf{f}: \dots \rightarrow X_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots$)

とすると, $\tilde{\mathcal{C}}$ は $\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dots$ を 零対象

とする圏となる。 $\tilde{\mathcal{C}}$ の対象 $\mathbf{f}$ のルムを

$$N(\mathbf{f}) = \# \text{End}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathbf{f}) \text{ と定める}$$

$$P_1(\mathcal{C}) = \{ \mathbf{f} \text{ は } \tilde{\mathcal{C}} \text{ の単純対象} \mid N(\mathbf{f}) < \infty \} / (\tilde{\mathcal{C}} \text{ の同値} \\ \text{+ 同値})$$

と置く。 $s = z$, $\mathcal{C}$ の "Selberg ζ " を次のように定義する:

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Selberg}}(s) = \prod_{\mathbf{p} \in P_1(\mathcal{C})} (1 - N(\mathbf{p})^{-s})^{-1}$$

$$\text{このとき } \zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Hasse}}(s) = \zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Selberg}}(s) \text{ となる}$$

("HASSELBERG ζ ").

注意 $s = z$ の "Selberg ζ " とは $\mathcal{C}$ の道から

決めたという意味で使っているだけである。通常の
Selberg ζ あるいは Ihara ζ とは全く別種の
ものである。

文献: N. Kurokawa "Zeta functions of categories"
Proc. Japan Acad. 72A (1996) 221-222.