

多重極輻射のエネルギー保存と運動量保存 および角運動量に関する考察

Study on Conservations of Energy and Momentum and a Role of Angular Momentum on Multi-pole Radiation

松室 堯之
Takayuki Matsumuro

石川 容平
Yohei Ishikawa

篠原 真毅
Naoki Shinohara

京都大学 生存圏研究所
Research Institute for Sustainable Humanosphere, Kyoto University

1 はじめに

平面波の球面波展開は、量子力学や電磁気学における衝突や散乱の問題に用いられるよく知られた手法である[1]。半空間の平面波が任意の原点で定義された球面波で展開できることは、一点から放出されたエネルギーが一方方向に揃うことを示している。このことは、高い指向性利得を持つ開口面アンテナの式[2]と整合しない。これら二つの現象には異なるメカニズムが存在することが考えられる。球面波合成による高い指向性は高効率の無線電力伝送への応用が期待される[3]。そこで本研究では、数式計算ソフトウェア Mathematica ver.8 を用いて、一点から放射され一方方向に伝搬する球面波の電磁界の性質に関する解析を行う。本稿では、平面波の球面波展開について説明した後、放射電力、放射運動量と原点近傍の角運動量流に関するシミュレーションの結果について報告する。

2 平面波の球面波展開と合成

x 方向に電界、y 方向に磁界を持ち、真空中を z 正方向に進行する直線偏波は次のように球面波展開できる[1]。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{\ell=1}^{\infty} [a_{\ell}^{(E)} \mathbf{E}_{\ell m}^{(E)} + a_{\ell}^{(M)} \mathbf{E}_{\ell m}^{(M)}] \Big|_{m=1} \\ \mathbf{H} &= \sum_{\ell=1}^{\infty} [a_{\ell}^{(E)} \mathbf{H}_{\ell m}^{(E)} + a_{\ell}^{(M)} \mathbf{H}_{\ell m}^{(M)}] \Big|_{m=1} \\ a_{\ell}^{(E)} &= a_{\ell}^{(M)} = i^{(\ell+2)} \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \end{aligned} \quad (1)$$

$\mathbf{E}_{\ell m}^{(E)}$ 、 $\mathbf{H}_{\ell m}^{(E)}$ は E 波あるいは TM 波と呼ばれる電気多重極子による球面波であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\ell m}^{(E)} &= \frac{1}{Z_0} \mathbf{L} j_{\ell}(kr) P_{\ell}^m(\cos \theta) \{-\sin(m\varphi)\} e^{-i\omega t} \\ \mathbf{E}_{\ell m}^{(E)} &= \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}_{\ell m}^{(E)} \end{aligned} \quad (2)$$

で表される。 $\mathbf{E}_{\ell m}^{(M)}$ 、 $\mathbf{H}_{\ell m}^{(M)}$ は H 波あるいは TE 波と呼ばれる磁気多重極子による球面波であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\ell m}^{(M)} &= \mathbf{L} j_{\ell}(kr) P_{\ell}^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{H}_{\ell m}^{(M)} &= -\frac{ik}{Z_0} \nabla \times \mathbf{E}_{\ell m}^{(M)} \end{aligned} \quad (3)$$

で表される。直線偏波を球面波展開した場合、 $e^{im\varphi}$ ではなく $-\sin(m\varphi)$ や $\cos(m\varphi)$ を用いて展開されること

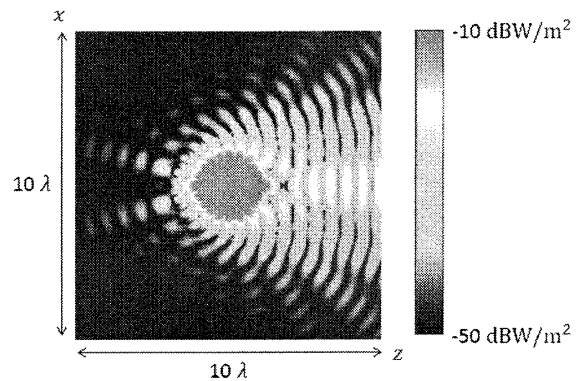


図1 瞬時電力密度 ($\ell_{\max} = 10, t = 0$)

に注意する。ここで、 k は波数、 ω は角周波数、 Z_0 は真空のインピーダンスを表す。 (r, θ, φ) は直交座標系から定義される球座標系とする。 $j_{\ell}(x)$ は球ベッセル関数、 $P_{\ell}^m(x)$ はルジャンドル陪関数であり、 $\mathbf{L}$ は

$$\mathbf{L} = \frac{1}{i} (\mathbf{r} \times \nabla) \quad (4)$$

で定義される演算子である。

ところで、E 波・H 波の径方向の関数である球ベッセル関数は 2 つの球ハンケル関数の和で表される。

$$j_{\ell}(kr) = \frac{1}{2} \{h_{\ell}^{(1)}(kr) + h_{\ell}^{(2)}(kr)\} \quad (5)$$

$h_{\ell}^{(1)}(kr)$ は原点から外向きに進む進行波、 $h_{\ell}^{(2)}(kr)$ は原点に向かって内向きに進む進行波を表し、それぞれの項は $z = 0$ から z 正方向に進行する半空間の平面波の球面波展開、 z 負方向から $z = 0$ に進行する半空間の平面波の球面波展開に用いる。

本研究では、電界強度 1 V/m の直線偏波の展開によって得られる球面波のうち有限個の次数の E 波と H 波を $h_{\ell}^{(1)}(kr)$ を用いて $\ell = 1$ から $\ell = N$ まで足し合わせた外向き球面波（以降、 $\ell_{\max} = N$ の球面波と呼ぶ）の解析を行っている。周波数は 5.8 GHz を用いている。図 1 に $\ell_{\max} = 10$ の球面波の $t = 0$ における瞬時電力密度を示す。高次までの球面波の合成によって指向性のある放射が起こっていることがわかる。このような合成された球面波の電磁界がビームを形成するメカニズムを解析することが本研究の目的である。

3 エネルギーの保存

場の量の複素振幅を $\tilde{E}$ のように表すと、球面波の複素ポインティングベクトルは次のように与えられる。

$$\tilde{P} = \tilde{E} \times \tilde{H}^* \quad (6)$$

球面波の放射電力は $\tilde{P}$ の実部の径方向成分を球表面で面積積分することによって求まる。図2は $l_{\max} = 2, 3$ の球面波の放射電力を r を変数としてプロットしたものである。多重極から放出されたエネルギーが一定値を保ち遠方に伝わっていることが確認できる。

4 運動量の保存

電磁運動量は次のように与えられる。

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad (7)$$

ここで、運動量保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G} + (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (8)$$

より、真空中における単位時間あたりの球面波の放射運動量は $\mathbf{T}$ の実部の径方向成分ベクトルを球表面で面積積分することによって求まる。ただし $\mathbf{T}$ はマクスウェルの応力テンソルの時間平均値であり、複素振幅を用いて

$$\bar{\mathbf{T}} \equiv \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{E}}^* + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{H}}^* - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^*) \quad (9)$$

のように与えられる。ここで、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。図3は $l_{\max} = 2, 3$ の球面波の放射運動量の z 方向成分を r を変数としてプロットしたものである。多重極から放射された z 方向の運動量が一定値を保ち遠方に伝わっている様子が読み取れる。

5 角運動量の存在とその役割

単位時間あたりの角運動量流は運動量の場合と同様にして $\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{T}}$ の実部の径方向成分ベクトルを球表面で面積積分することによって求まる。図4は $l_{\max} = 2, 3$ の球面波の原点近傍の角運動量流の φ 方向成分を r を変数としてプロットしたものである。角運動量は原点近傍にのみ存在し、遠方には放射しないことがわかる。原点近傍の角運動量によって後方側方に放射されたエネルギーが前方に運ばれる。このように角運動量は一点から放出されるエネルギーをビームに形成する役割を果たす。

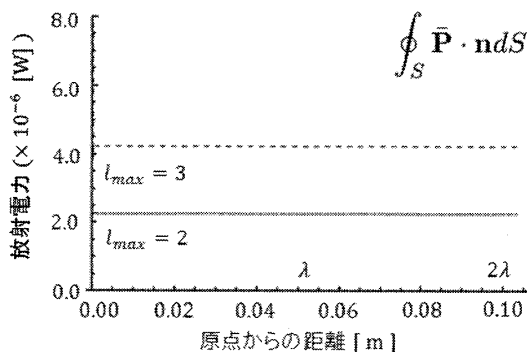


図2 放射電力 [W]

6 まとめ

半空間の直線偏波の球面波展開の要素を有限個重ね合わせた球面波の諸性質に関する解析を行った。

1. 多重極から放射された電力は原点近傍から遠方まで同一の値を持つことを計算により確認した。
2. 多重極から放射された運動量も同様に原点近傍から遠方まで同一の値を持つことを計算により確認した。
3. これらの放射電力、放射運動量の保存の確認は、正確な電磁界の計算手法を保証するものである。
4. 角運動量流は φ 方向成分のみであり、原点近傍に局在する。角運動量は後方側方に放射されたエネルギーを前方に運び、一点から放出されるエネルギーからビームを形成する役割を果たす。

謝辞

有益なご議論をいただいた(株)村田製作所の柳ヶ瀬雅司氏に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] J.D. ジャクソン (西田稔 訳), 『電磁気学 (下)』, 吉岡書店, pp.640-643, pp.698-699, 2003, (J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics 3rd edition", John Wiley & Sons, 1998.)
- [2] 社団法人電子情報通信学会, アンテナ工学ハンドブック, オーム社, pp.154-164, 1980.
- [3] 石川容平, IEEE MTT-S Kansai Chapter 設立総会記念講演会資料『光・マイクロ波のエネルギーを集める』, 2007.

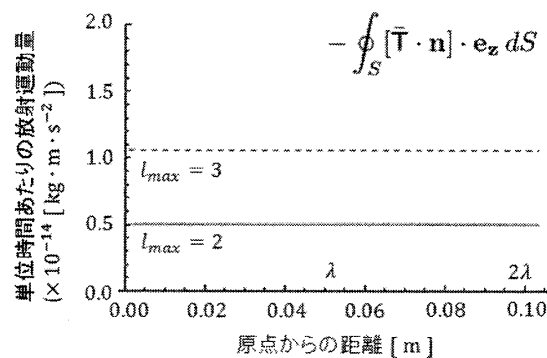


図3 単位時間あたりの放射運動量 [kg·m·s⁻²]

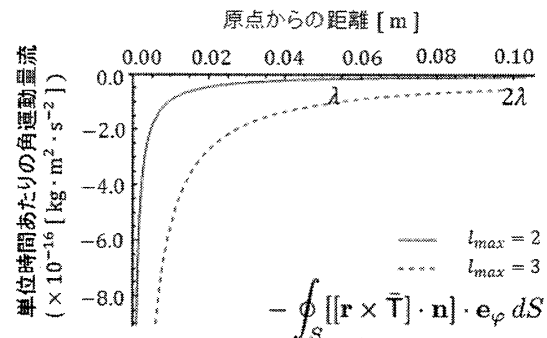


図4 単位時間あたりの角運動量流 [kg·m²·s⁻²]