

カントール極小系の位相充足群について

千葉大学自然科学研究科 松井宏樹 (MATUI Hiroki)

Graduate School of Science and Technology,
Chiba University

1 序

X がカントール集合であって、 $\alpha \in \text{Homeo}(X)$ が X 上の極小写像であるとき、 (X, α) をカントール極小系と呼びます。このノートでは、カントール極小系の位相充足群 $[[\alpha]]$ の性質について解説したいと思います。まず充足群 $[\alpha]$ や位相充足群 $[[\alpha]]$ の定義から始めましょう。

定義 1. (X, α) をカントール極小系とする。

- (1) ある関数 $n: X \rightarrow \mathbb{Z}$ を用いて $\gamma(x) = \alpha^{n(x)}(x)$ と書けるような同相写像 γ の全体を $[\alpha]$ とおき、 (X, α) の充足群と呼ぶ。
- (2) ある連続関数 $n: X \rightarrow \mathbb{Z}$ を用いて $\gamma(x) = \alpha^{n(x)}(x)$ と書けるような同相写像 γ の全体を $[[\alpha]]$ とおき、 (X, α) の位相充足群と呼ぶ。

$x \in X$ の (α による) 軌道を

$$O(x) = \{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

と書く事にします。 $\gamma \in [\alpha]$ であるという事は、任意の $x \in X$ に対して $\gamma(x) \in O(x)$ となる事と同値です。 γ は同相写像ですから、 γ は $O(x)$ から $O(x)$ への全単射写像を引き起こす事になります。

X はカントール集合ですから、 X から $\mathbb{Z}$ への連続関数は豊富に存在します。しかし X の開かつ閉な部分集合は可算個しかありませんから、 X から $\mathbb{Z}$ への連続関数の全体 $C(X, \mathbb{Z})$ は可算集合です。従って $[[\alpha]]$ は可算群になります。(当然 α 自身は $[[\alpha]]$ の元ですから、 $[[\alpha]]$ は α が生成する整数群を含み、特に無限群です。)

$[[\alpha]]$ の元としてどのような物が考えられるか、ピンと来ないという方のために、 $[[\alpha]]$ の元を構成してみます。 $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ を固定します。 α は周期点を持たないので、 $x, \alpha(x), \dots, \alpha^{n-1}(x)$ という n 個の点は互いに相異なります。従って、 $x \in X$ の開かつ閉な近傍 U を十分小さく取れば、 $U, \alpha(U), \dots, \alpha^{n-1}(U)$ という n 個の集合はどの 2 つも互いに交わりを持たないというように出来ます。そこで $\gamma \in \text{Homeo}(X)$ を次のように定めます。

$$\gamma(z) = \begin{cases} \alpha(z) & \text{if } z \in U \cup \alpha(U) \cup \dots \cup \alpha^{n-2}(U) \\ \alpha^{1-n}(z) & \text{if } z \in \alpha^{n-1}(U) \\ z & \text{otherwise} \end{cases}$$

すなわち γ は、 $U, \alpha(U), \dots, \alpha^{n-2}(U)$ の上では α に沿って一步前へ進み、 $\alpha^{n-1}(U)$ まで行き着いたら $n-1$ 歩後ろに下がって U まで後退するという写像です。明らかに γ は位相充足群 $[[\alpha]]$ の元であって、 $\gamma^n = \text{id}$ です。後で、 $[[\alpha]]$ の交換子群 $D([[\alpha]])$ はこのような元で生成される事を見ます。

充足群はもともとエルゴード理論における概念でした。エルゴード理論とカントール極小系を対比させるために、エルゴード理論における充足群がどのような物であったか、少しだけ振り返る事にします。

(X, μ) をルベグ空間とします。 G を (X, μ) に働く可算な非特異変換群とします。つまり G は、 (X, μ) 上の両可測な非特異変換全体が成す群の可算部分群です。このとき充足群 $[G]$ とは、 (X, μ) 上の非特異変換 γ であって、 μ に関してほとんどいたるところ $\gamma(x) \in O_G(x)$ となるような、 γ の全体を指します。ただしここで $O_G(x)$ とは $x \in X$ の G による軌道を表すとしています。

さて、 (X, μ) に働く可算な非特異変換群が 2 つ与えられたとしましょう。それを G_1, G_2 と書きます。2 つの変換群が同じ軌道を持つとは、 μ に関してほとんどいたるところ $O_{G_1}(x) = O_{G_2}(x)$ が成り立つ事を言います。これは言葉を替えれば、 $G_1 \subset [G_2]$ かつ $G_2 \subset [G_1]$ と同じです。また、 G_1 と G_2 が軌道同型であるとは、非特異変換 γ が存在して、 G_1 と $\gamma G_2 \gamma^{-1}$ が同じ軌道を持つことを言います。

Henry Dye による次の著しい定理は、保測変換の場合には軌道同型が充足群の抽象的な群構造によってのみ決まる事を主張しています。

定理 2 ([D]). 上の設定で、 G_1 と G_2 がともに保測な変換群であるとする。 $\pi : [G_1] \rightarrow [G_2]$ が群同型写像であるとき、非特異変換 γ が存在して、 $\pi(g) = \gamma \circ g \circ \gamma^{-1}$ が任意の $g \in [G_1]$ に対して成り立つ。特に $[G_2] = \gamma[G_1]\gamma^{-1}$ である。

さて、ここでカントール極小系の設定に戻しましょう。上に述べた Dye の定理の類似が [GPS] において示されました。

定理 3 ([GPS]). (X, α) と (Y, β) をカントール極小系とする。 $G \subset [\alpha]$ と $H \subset [\beta]$ を「充足群」とする。すると、任意の群同型 $\pi : G \rightarrow H$ は X から Y への同相写像によって誘導される。すわなち、同相写像 $F : X \rightarrow Y$ が存在して、任意の $g \in G$ に対して $\pi(g) = F \circ g \circ F^{-1}$ となる。

定理の文中で「充足群」と鍵括弧を付けた事に注意して下さい。ここでは敢えて曖昧な書き方をしたのですが、上の定理における G や H は、定義 1 で定めた充足群や位相充足群でなくとも構いません。定理 3 は、もっと色々な「充足群」に対して成り立ちます。どのような群に対して定理 3 が成り立つのかを説明するために、色々な「充足群」を導入しましょう。

まず $x \in X$ の (α による) 前方軌道と後方軌道を次で定めます。

$$\begin{aligned} O^+(x) &= \{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\} \\ O^-(x) &= \{\alpha^{1-n}(x) : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

そして (X, α) の AF 充足群 $[[\alpha]]_x$ を次で定めます。

$$[[\alpha]]_x = \{\tau \in [[\alpha]] : \tau(O^+(x)) = O^+(x)\}$$

$\tau \in [\alpha]$ であれば $\tau(O(x)) = O(x)$ ですから、もしも $\tau(O^+(x)) = O^+(x)$ ならば自動的に $\tau(O^-(x)) = O^-(x)$ も成り立つ事になります。AF 充足群 $[[\alpha]]_x$ とは、 x の前方軌道と後方軌道をそれぞれ不変にするような元の集まりです。この「充足群」をどうして AF 充足群と呼ぶのかは、次の節で明らかにします。

次に指数写像について説明します。 $x \in X$ を固定します。 $\tau \in [[\alpha]]$ に対して次のようにして整数値 $I(\gamma)$ を定めます。

$$I(\gamma) = \#(O^+(x) \cap \gamma(O^-(x))) - \#(O^-(x) \cap \gamma(O^+(x)))$$

γ は $\gamma(z) = \alpha^{n(z)}(z)$ と書き表されていて、 $n : X \rightarrow \mathbb{Z}$ は連続写像ですから特に有界であり、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $|n(z)| \leq N$ となります。よって、

$$O^+(x) \cap \gamma(O^-(x)) \subset \{\alpha(x), \alpha^2(x), \dots, \alpha^N(x)\}$$

かつ

$$O^-(x) \cap \gamma(O^+(x)) \subset \{x, \alpha^{-1}(x), \dots, \alpha^{1-N}(x)\}$$

となるので、 $I(\gamma)$ は well-defined です。このようにして定めた写像 $I: [[\alpha]] \rightarrow \mathbb{Z}$ を指数写像と呼びます。この定義を見て、関数解析で習ったフレドホルム指数を思い出された方がいるかも知れません。実は指数写像 I をフレドホルム指数として理解する事も可能です。理解の鍵となるのは、 $[[\alpha]]$ の元が、 (X, α) から生じる接合積 $C^*(X, \alpha)$ のユニタリー（正確に言えば $C(X)$ を正規化するようなユニタリー）と対応しているという事実です。詳しくは [GPS] を参照してください。いま定めた $I: [[\alpha]] \rightarrow \mathbb{Z}$ が群準同型である事を見るのは容易です。要するに 2 つの元 $\tau_1, \tau_2 \in [[\alpha]]$ を持って来て、 $I(\tau_1 \tau_2) = I(\tau_1) + I(\tau_2)$ を確認すればいいのですが、落ち着いてよく考えれば確かにそうになっている事が分かります（前方軌道と後方軌道を行き来する点の個数を勘定すると、上手い具合に差し引きが起こる）。しかも I は、最初に固定した点 $x \in X$ に拠らずに決まっている事も確認できます。

注意 4. 接合積 $C^*(X, \alpha)$ の K_1 群は $\mathbb{Z}$ に同型であり、指数写像 I は K_1 群への写像にほかなりません。また α -不変測度による積分によって I を表示する事も可能です。この辺りの事は重要ではありますが、このノートにはあまり関係ありませんので省略します。[GPS] を参照ください。

指数写像 I の核を $[[\alpha]]_0$ と書きましょう。すなわち

$$[[\alpha]]_0 = \{\tau \in [[\alpha]] : I(\tau) = 0\}$$

です。 α は後方軌道の点 $x \in X$ を前方軌道の点 $\alpha(x)$ に移し、その他には後方軌道と前方軌道に行き来はありませんから、当然 $I(\alpha) = 1$ となります。

さて、このようにして導入された色々な「充足群」に対して、定理 3 が適用可能である事が [GPS] で証明されています。そしてその結果として、これらの「充足群」がコントロール極小系のさまざまなレベルの完全不変量になっている事が示されます。

定理 5 ([GPS]). (X, α) をコントロール極小系とする。 $[\alpha], [[\alpha]], [[\alpha]]_0, [[\alpha]]_x$ に対して定理 3 が適用可能であり、その結果として次が成り立つ。

- (1) $[\alpha]$ の群としての同型類は、 (X, α) の軌道同型に対する完全不変量である。
- (2) $[[\alpha]]$ の群としての同型類は、 (X, α) の flip conjugacy に対する完全不変量である。
- (3) $[[\alpha]]_0$ の群としての同型類は、 (X, α) の flip conjugacy に対する完全不変量である。
- (4) $[[\alpha]]_x$ の群としての同型類は、 (X, α) の強軌道同型に対する完全不変量である。

2 AF 充足群

(X, α) をカントール極小系とし、 $x \in X$ とします。この節では AF 充足群 $[[\alpha]]_x$ の性質を調べます。

x に縮むような開かつ閉な部分集合の列 $\{U_n\}_n$ を取ります。すなわち $U_{n+1} \subset U_n$ であって、 $\bigcap_n U_n = \{x\}$ です。 U_n を天井集合とするような角谷-Rohlin 分割

$$\mathcal{P}_n = \{X(n, v, k) : v \in V_n, k = 1, 2, \dots, h(v)\}$$

を取りましょう。つまり

$$R(\mathcal{P}_n) = \bigcup_{v \in V_n} X(n, v, h(v)) = U_n$$

です。必要であればそれぞれの塔をさらに分割する事により、 $\{\mathcal{P}_n\}_n$ は X の位相を生成するとして構いません。

$v \in V_n$ を固定しましょう。 π を $\{1, 2, \dots, h(v)\}$ の置換とします。このとき同相写像 τ_π を次で定めます。

$$\tau_\pi(z) = \begin{cases} \alpha^{\pi(k)-k}(z) & z \in X(n, v, k) \\ z & \text{otherwise} \end{cases}$$

つまり、 $v \in V$ に対応する塔の上では π に応じて $X(n, v, k)$ たちを入れ替え、その他の塔では何も動かさないという事です。少し考えると τ_π は $[[\alpha]]_x$ の元である事が分かります。つまり、置換群 $S_{h(v)}$ に同型な部分群が $[[\alpha]]_x$ に含まれる事になります。同じ事が各々の塔に関して言えますから、このような τ_π たちで生成される群 G_n は、 $\bigoplus_{v \in V_n} S_{h(v)}$ に同型な $[[\alpha]]_x$ の部分群を成します。

定理 6. 上の設定で、 $[[\alpha]]_x = \bigcup_n G_n$ である。

この定理は、それほど証明が難しいわけではありません。角谷-Rohlin 分割を用いてカントール極小系を Bratteli 図式で書き表す方法さえ知っていれば、簡単に理解できます。荒っぽく言うと、角谷-Rohlin 分割 $\mathcal{P}_n$ は、

$$\bigoplus_{v \in V_n} M_{h(v)}(\mathbb{C})$$

という有限次元環に対応しています。 G_n はこの環のユニタリー群の部分群と見なせます。上の定理は $[[\alpha]]_x$ がそのような G_n の増大和になっていると言っているわけですか

ら、言わば、AF 環に相当すると思えます。このような理由から $[[\alpha]]_x$ は AF 充足群と呼ばれます。

$[[\alpha]]_x$ は有限群 G_n の増大和ですから、いわゆる局所有限群です。 $[[\alpha]]$ はもちろん無限位数の元を含みますし、それほど簡単な群とは言えません。しかし、ある点 $x \in X$ の前方軌道と後方軌道を保つという条件を課しただけで、 $[[\alpha]]_x$ は局所有限群になるのですから、かなり不思議な現象のように感じられます。

次に $[[\alpha]]_x$ の正規部分群の構造を調べましょう。定理 6 より、 $[[\alpha]]_x$ の交換子群 $D([[\alpha]]_x)$ は、 G_n の交換子群の増大和になっている事が分かります。 G_n は $\bigoplus_{v \in V_n} S_{h(v)}$ に同型でしたから、 $D(G_n)$ は $\bigoplus_{v \in V_n} A_{h(v)}$ に同型である事になります。

定理 7. 上の設定で、 $D([[\alpha]]_x)$ は単純群である。また $[[\alpha]]_x/D([[\alpha]]_x)$ は群として $K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ に同型である。

Proof. $D([[\alpha]]_x)$ は $D(G_n)$ の増大和である。 $D(G_n)$ は $\bigoplus_{v \in V_n} A_{h(v)}$ に同型であり、各直和因子 $A_{h(v)}$ は単純群である。 $D(G_n)$ の $D(G_{n+1})$ への埋め込みは、 $\{P_n\}_n$ に付随した Bratteli 図式で記述される。この Bratteli 図式が十分に絡み合っているため（対応する AF 環が単純であるという事）、 $D(G_n)$ の増大和 $D([[\alpha]]_x)$ は単純になる。

当然の事ながら、 $G_n/D(G_n)$ は $\mathbb{Z}_2^{V_n}$ に同型である。したがって $[[\alpha]]_x/D([[\alpha]]_x)$ は $\mathbb{Z}_2^{V_n}$ の帰納極限として表される。 $K^0(X, \alpha)$ は $\mathbb{Z}^{V_n}$ の帰納極限であったから、結局 $[[\alpha]]_x/D([[\alpha]]_x)$ は $K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ に同型である事になる。□

定義 8. 上の定理によって得られる $[[\alpha]]_x$ から $K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ への準同型を sgn と書き、符号写像と呼ぶ。

普通の置換に対する符号は、もちろん $\mathbb{Z}_2$ に値を取ります。 $[[\alpha]]_x$ の元 τ を、コントロール集合 X もしくはコントロール極小系 (X, α) に働く「置換」と見て、その符号 $\text{sgn}(\tau)$ を考えると、符号は $K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ に値を取るというわけです。

実際にどのようにすれば $\text{sgn}(\tau)$ を計算できるか、考えてみましょう。定理 6 より、 τ はどこかの G_n に入っています。その事を念頭に置いて計算を進めます。まず τ は有限位数ですから、各 $x \in X$ に対して

$$n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \tau^n(x) = x\}$$

という自然数が定まります。 $n^{-1}(k)$ 上では τ は k 乗して初めて元に戻るような写像になっていますから、ある開かつ閉な集合 $V_k \subset n^{-1}(k)$ が存在して、 $V_k, \tau(V_k), \dots, \tau^{k-1}(V_k)$

は互いに交わりを持たず、しかも

$$n^{-1}(k) = V_k \cup \tau(V_k) \cup \cdots \cup \tau^{k-1}(V_k)$$

となります。符号が 1 になるのは奇置換の時で、それは $n(x) = k$ が偶数の時です。したがって

$$\text{sgn}(\tau) = \sum_{k:\text{even}} [1_{V_k}] + 2K^0(X, \alpha)$$

となります。

3 位相充足群の正規部分群の構造

この節では、カントール極小系 (X, α) の位相充足群 $[[\alpha]]$ の正規部分群について調べます。指数写像 I は $[[\alpha]]$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像でしたから、 I の核 $[[\alpha]]_0$ について考えればよい事になります。次の補題が決定的に重要な役割を果たします。

補題 9. (X, α) をカントール極小系とし、 $x, y \in X$ が異なる軌道を持つとする。このとき $[[\alpha]]_0 = [[\alpha]]_x [[\alpha]]_y$ となる。すなわち、任意の $\tau \in [[\alpha]]_0$ に対して $\tau_1 \in [[\alpha]]_x$ と $\tau_2 \in [[\alpha]]_y$ が存在し、 $\tau = \tau_1 \tau_2$ と書ける。

簡単に言えば、任意の $\tau \in [[\alpha]]_0$ は 2 つの AF 充足群 $[[\alpha]]_x$ と $[[\alpha]]_y$ の元の積に分解できるわけです。もちろん、 $[[\alpha]]_x$ と $[[\alpha]]_y$ はたくさんの共通部分を持ちますから、この分解は決して一意的ではありません。また、 $[[\alpha]]_x$ は正規部分群ではありませんから、この補題から直接 $[[\alpha]]_0$ の構造が明らかになるわけでもありません。

上の補題を証明するにはどうしたらいいか簡単に述べます。まず、与えられた $\tau \in [[\alpha]]_0$ は $[[\alpha]]_x$ の元とは限りませんから、 $O^+(x)$ と $O^-(x)$ をそれぞれ保っているわけではありません。しかし $I(\tau) = 0$ ですから、 $O^+(x)$ から $O^-(x)$ に移る点の個数と、 $O^-(x)$ から $O^+(x)$ に移る点の個数は同じです（フレドホルム指数がゼロという事です）。そこで、これらの点に 1 対 1 の対応を付けておいて、それらを入れ替える同相写像 τ_2 を構成します。すると $\tau_2 \tau$ はめでたく $[[\alpha]]_x$ の元になってくれます。 τ_2 を構成する際に、 y の軌道についても気を配っておいて、 $\tau_2 \in [[\alpha]]_y$ とする事が出来るので、これで良いというわけです。

少しだけ脇道にそれます。カントール極小系の位相充足群を考察し始めた当初から、 $[[\alpha]]$ が従順であるかどうかを決定したいと私は考えていました。 (X, α) がいわゆる加算機変換である場合には、 $[[\alpha]]$ は初等的な群の増大和で書ける事が簡単に分かるので、特

に従順であると結論できます。しかし一般の場合にはとうとう分かりませんでした。何となく、 (X, α) が加算機変換でない場合には、 $[[\alpha]]$ は自由群を含むような気がするのですが、自由群を確かに含むという例すら構成することは出来ませんでした。しかし上の補題を見ると、逆に、 $[[\alpha]]$ はいつでも従順ではないかという気がしないでもありません。というのも、 $[[\alpha]]_0$ は局所有限な部分群の2つの「積」に書けているのですから ($[[\alpha]]$ は $[[\alpha]]_0$ と $\mathbb{Z}$ の半直積ですから、 $[[\alpha]]$ が従順であることと $[[\alpha]]_0$ が従順であることは同値です)。しかしそれは見込み違いだろうと思います (自分で言い出しておいてすぐに否定するのも変ですが)。次のような簡単な例があります。 $SL(2, \mathbb{R})$ を考えます。Schmidt の直交化により、 $SL(2, \mathbb{R})$ の任意の行列は上三角行列と $SO(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}$ の元の積に書けます。Schmidt の直交化というのは、数をかけたり割ったり平方根を取ったりするだけの作業ですから、たとえば、成分が全て代数的数であるような行列に話を限れば、可算群の話に出来ます。上三角行列の全体や $SO(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}$ は明らかに従順ですが、 $SL(2, \mathbb{R})$ は自由群を含むので従順ではありません。というわけで、2つの従順な部分群の「積」に書けるからと言って、群が従順とは限らない事が分かります。

さて、話を元に戻しましょう。前節で定義した符号写像 $\text{sgn} : [[\alpha]]_x \rightarrow K^0(X, \alpha) \otimes \mathbb{Z}_2$ を $[[\alpha]]_0$ 全体に拡張する事を考えます。補題 9 より、任意の $\tau \in [[\alpha]]_0$ は $\tau_1 \in [[\alpha]]_x$ と $\tau_2 \in [[\alpha]]_y$ の積に書けますから、

$$\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\tau_1) + \text{sgn}(\tau_2)$$

と定義するのが自然です。しかし、補題 9 による分解は unique ではありませんから、まずは本当にこの定義が well-defined であるかどうか気がかかります。それは、 $\tau \in [[\alpha]]_x \cap [[\alpha]]_y$ に対して $\text{sgn}(\tau)$ を計算する際に、 τ が $[[\alpha]]_x$ の元であると思って計算した結果と、 $[[\alpha]]_y$ の元だと思って計算した結果が、果たして一致するかという点にかかっています。しかしそれは大丈夫です。というのも、前節の最後で見たように、 $\text{sgn}(\tau)$ の値は τ の first return time に拠って決まるのですから、どの AF 充足群に入っているかは関係ありません。

次に考えなくてはならないのが、このようにして決めた写像 $\text{sgn} : [[\alpha]]_0 \rightarrow K^0(X, \alpha) \otimes \mathbb{Z}_2$ が群準同型になっているかどうかです。面倒なのでこの部分の議論は省略します。結果的には sgn はちゃんと群準同型になっている事が確かめられ、次の定理が得られます。

定理 10. (X, α) をカントール極小系とすると、次が成り立つ。

- (1) $\text{sgn} : [[\alpha]]_0 \rightarrow K^0(X, \alpha) \otimes \mathbb{Z}_2$ は群準同型である。
- (2) sgn の核は $D([[\alpha]]_0)$ に等しい。

(3) $D([\alpha]_0)$ は単純群である。

Proof. (1) 省略。

(2) $K^0(X, \alpha) \otimes \mathbb{Z}_2$ は可換群なので、 sgn の核が $D([\alpha]_0)$ を含む事は明らか。逆に $\text{sgn}(\tau) = 0$ とする。 $\tau = \tau_1 \tau_2$ を補題 9 のような分解とする。 $\text{sgn}(\tau_1) = -\text{sgn}(\tau_2)$ である。 $\text{sgn}(\tau_3) = \text{sgn}(\tau_2)$ となるような $[\alpha]_x \cap [\alpha]_y$ の元 τ_3 が存在する。すると $\tau = (\tau_1 \tau_3)(\tau_3^{-1} \tau_2)$ であるが、 $\tau_1 \tau_3$ と $\tau_3^{-1} \tau_2$ はそれぞれ AF 充足群 $[\alpha]_x$ と $[\alpha]_y$ の元であり、どちらも符号はゼロである。したがって $\tau_1 \tau_3$ と $\tau_3^{-1} \tau_2$ はそれぞれ $D([\alpha]_x)$ と $D([\alpha]_y)$ の元であると結論できる。したがって τ は $D([\alpha]_0)$ の元である。

(3) $\tau \in D([\alpha]_0)$ を自明でない元とする。 τ を含む正規部分群が $D([\alpha]_0)$ に一致する事を見れば良い。任意に $x \in X$ を取る。 $\gamma \tau \gamma^{-1} \tau^{-1} \in D([\alpha]_x) \setminus \{\text{id}\}$ となるような $\gamma \in D([\alpha]_0)$ が存在する。 $D([\alpha]_x)$ は単純群であるから、 τ を含む正規部分群は少なくとも $D([\alpha]_x)$ を含む。 $x \in X$ は任意だったから、 τ を含む正規部分群は全ての AF 充足群の交換子群を含む。 $D([\alpha]_0)$ の元は $D([\alpha]_x)$ と $D([\alpha]_y)$ の元の積で書けるから、 τ を含む正規部分群は $D([\alpha]_0)$ に一致する。 $\square$

上の定理の系として次を得ます。

系 11. (X, α) をカントール極小系とする。 $[\alpha]_0$ が単純群であるための必要十分条件は、 $K^0(X, \alpha)$ が 2-divisible である事である。

この節の最後に符号の計算例を示します。開かつ閉な部分集合 $U \subset X$ に対して、 U 上の first return map を α_U と書く事にします。すなわち α_U は U 上の同相写像として、

$$n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \alpha^n(x) \in U\}$$

を用いて、 $\alpha_U(x) = \alpha^{n(x)}(x)$ と定義されています。カントール集合の開かつ閉な部分集合はまたカントール集合ですから、 (U, α_U) もまたカントール極小系になっている事が分かります。 (U, α_U) は (X, α) の角谷誘導変換と呼ばれています。さて、 $x \in U^c$ に対しては $\alpha_U(x) = x$ と定義する事により、 α_U を X 上の同相写像と見なす事にしましょう。すると α_U は明らかに (X, α) の位相充足群 $[\alpha]$ の元です。そしてその指数 $I(\alpha_U)$ はちょうど 1 である事が分かります。したがって、 U と V がともに開かつ閉な部分集合であるとき、 $I(\alpha_U \alpha_V^{-1}) = 1 - 1 = 0$ ですから、 $\alpha_U \alpha_V^{-1} \in [\alpha]_0$ という事になります。

補題 12. 上の状況で、 $\text{sgn}(\alpha_U \alpha_V^{-1}) = [1_U] + [1_V] + 2K^0(X, \alpha)$ である。

4 位相充足群の有限生成性

この節では $[[\alpha]]$ や $[[\alpha]]_0$ の有限生成性について調べます。

まず、 $[[\alpha]]$ や $[[\alpha]]_0$ が有限生成となるためには、 (X, α) は (極小) サブシフトでなくてはならない事を説明します。そのために、 X の分割から生じるサブシフトについて説明します。 $\mathcal{P}$ を X の開かつ閉な部分集合からなる X の分割とします。つまり、 $\mathcal{P}$ に属する 2 つの異なる部分集合 U と V は互いに交わりを持たず、また $\mathcal{P}$ の元の全ての和集合を取ると X に一致します。 X はコンパクトですから $\mathcal{P}$ は有限集合となる事に注意して下さい。サブシフト $(\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ を考えます。 X から $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$ への写像 π を、

$$\alpha^k(x) \in \pi(x)_k$$

が任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つように定めます。 $\pi(x)_k$ とは $\pi(x)$ の第 k 成分です。すると $\sigma\pi = \pi\alpha$ となっていますから、 π は (X, α) から $(\pi(X), \sigma)$ への半共役写像です。この $(\pi(X), \sigma)$ のことを、 $\mathcal{P}$ によって定まるサブシフトと呼ぶ事にしましょう。

さて、 $[[\alpha]]$ が有限個の元 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ で生成されているとしましょう。各 γ_i に対して連続関数 $n_i : X \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在して、 $\gamma_i(x) = \alpha^{n_i(x)}(x)$ と書けています。 n_i は連続ですから、開かつ閉な部分集合からなる X の分割 $\mathcal{P}$ を十分細かく取る事により、任意の $i = 1, 2, \dots, m$ と $U \in \mathcal{P}$ に対して、 n_i は U 上で定数関数である、というように出来ます。 $(\pi(X), \sigma)$ を、 $\mathcal{P}$ によって定まるサブシフトとします。すると $\mathcal{P}$ の構成の仕方から、 $\tau_i \in [[\sigma]]$ が存在して、 $\tau_i\pi = \pi\gamma_i$ を満たす事が分かります。半共役写像 π は自然に $[[\sigma]]$ から $[[\alpha]]$ への埋め込みを誘導します。ところが $[[\alpha]]$ は γ_i たちで生成されているのですから、等式 $\tau_i\pi = \pi\gamma_i$ より、この埋め込みは全射である事になります。したがって半共役写像 π は実際には単射である事が結論され、 (X, α) は π を通じてサブシフト $(\pi(X), \sigma)$ と共役である事になります。

以上の議論は力学系に慣れた人にとっては当たり前の話です。実は、この逆が成り立ちます。すなわち次の定理が証明できます。

定理 13. (X, α) をカントール極小系とする。 $D([[\alpha]]_0)$ が有限生成であるための必要十分条件は、 (X, α) が (極小) サブシフトと共役である事である。

(X, α) がサブシフトに共役であれば $D([[\alpha]]_0)$ が有限生成となる事を、この節の残りで説明したいと思います。

$\alpha^{-1}(U), U, \alpha(U)$ が互いに交わりを持たないような、開かつ閉な部分集合 $U \subset X$ に対して、次のようにして同相写像を定めます。

$$\gamma_U(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in \alpha^{-1}(U) \cup U \\ \alpha^{-2}(x) & x \in \alpha(U) \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

つまり γ_U は、 $\alpha^{-1}(U)$ や U の上では α に沿って一步前へ進み、 $\alpha(U)$ の上では α に沿って二歩後退し、その他の点では全く動かない、という写像です。明らかに $\gamma_U \in [[\alpha]]$ ですが、 $\gamma_U^3 = \text{id}$ ですから $\gamma_U \in [[\alpha]]_0$ という事になります。 γ_U はいわば、置換群における位数 3 の巡回置換 $(1\ 2\ 3)$ に対応していると思えます。 $(1\ 2\ 3)$ は $(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$ と交換子の形で書けますから、 $\gamma_U \in D([[\alpha]]_0)$ が分かります。

補題 14. $D([[\alpha]]_0)$ は、 γ_U という形の元で生成されている。

Proof. $x, y \in X$ を異なる軌道を持つ 2 つの点とする。補題 9 より、 $D([[\alpha]]_0)$ の元は $D([[\alpha]]_x)$ の元と $D([[\alpha]]_y)$ の元の積に書けている。したがって、 $D([[\alpha]]_x)$ が γ_U という形の元で生成されている事を見れば十分である。 $D([[\alpha]]_x)$ は、交代群の有限個の直和の無限増大和で書けていた。交代群 A_n は $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4), \dots, (n-2\ n-1\ n)$ で生成されるのだから、これで良い。 $\square$

カントール集合 X はもちろん無限に多くの開かつ閉な部分集合 U を持ちますから、有限生成性を言うためには、実際には有限個の γ_U しか必要としないという事を言わなくてはなりません。 γ_U という形の有限個の元から出発して、いくらでも小さな部分集合 U に対して γ_U を生成できなくてははいけません。問題を簡略化すれば、 γ_U と γ_V を用いて、 U や V よりも「細かい」部分集合 W に付随した γ_W を得るにはどうしたらいいだろうか、という事です。次の補題がこの問題に答えてくれます。

補題 15. 開かつ閉な部分集合 U と V があって、 $\alpha^{-1}(U), U, \alpha(U) \cup \alpha^{-1}(V), V, \alpha(V)$ という 5 つの集合が互いに交わりを持たないとする。このとき $W = \alpha(U) \cap \alpha^{-1}(V)$ とすると、

$$\gamma_V \gamma_U^{-1} \gamma_V^{-1} \gamma_U = \gamma_W$$

である。

証明は単なる計算です、というか、単に置換群の元の積を計算しているだけと思えますから、明らかです。

(X, α) が (極小) サブシフトであるという仮定の下で、この補題を組織的に繰り返し用いる事により、いくらでも「細かい」部分集合 W に付随した γ_W を得る事が出来ます。したがって定理 13 が証明される事になります。詳しくは論文を御覧下さい。

定理 13 の系として次を得ます。

系 16. (X, α) がカントール極小系であるとき、次が同値である。

- (1) (X, α) は極小サブシフトであり、かつ $K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ が有限群である。
- (2) $[[\alpha]]_0$ は有限生成である。
- (3) $[[\alpha]]$ は有限生成である。

$[[\alpha]]_0/D([[\alpha]])_0 \cong K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ と $[[\alpha]]/[[\alpha]]_0 \cong \mathbb{Z}$ より、証明は明らかです。

5 位相充足群の外部自己同型群

(X, α) をカントール極小系とします。この節では (X, α) の位相充足群の自己同型群について調べます。

$\pi \in \text{Aut}([[\alpha]])$ を自己同型としましょう。定理 3 より、同相写像 $F: X \rightarrow X$ が存在して、任意の $\tau \in [[\alpha]]$ に対して $\pi(\tau) = F\tau F^{-1}$ と書けます。 α と $F\alpha F^{-1}$ は X 上の極小写像であって、

$$[[F\alpha F^{-1}]] = F[[\alpha]]F^{-1} = [[\alpha]]$$

となります。すると Boyle-富山の定理 [BT] により、ある $\gamma \in [[\alpha]]$ が存在して、 $\gamma F\alpha F^{-1}\gamma^{-1} = \alpha$ もしくは $\gamma F\alpha F^{-1}\gamma^{-1} = \alpha^{-1}$ が成り立ちます。

$$C^\pm(\alpha) = \{\gamma \in \text{Homeo}(X) : \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha \text{ or } \alpha^{-1}\}$$

とおけば、 $\gamma F \in C^\pm(\alpha)$ という事です。これは言葉を替えれば、 F が $\gamma^{-1} \in [[\alpha]]$ と $C^\pm(\alpha)$ の元の積に書けた事を意味します。 α が生成する $C^\pm(\alpha)$ の部分群を $\mathbb{Z}\alpha$ と書きましょう。 $C^\pm(\alpha) \cap [[\alpha]] = \mathbb{Z}\alpha$ ですから、特に、 $[[\alpha]]$ の外部自己同型群 $\text{Out}([[\alpha]])$ は、自然に $C^\pm(\alpha)/\mathbb{Z}\alpha$ に同型である事になります。

同様の議論を $[[\alpha]]_0$ に適用する事により、 $\text{Out}([[\alpha]]_0)$ は $C^\pm(\alpha)$ に同型である事になります。ただし Boyle-富山の定理を適用する際には少しだけ注意が必要です。 $F\alpha F^{-1} \in [[\alpha]]$ と $\alpha \in [[F\alpha F^{-1}]]$ を確認しなければいけませんが、 α は $[[\alpha]]_0$ の元では無いからです。しかし各点 $x \in X$ に対して、ある近傍 U と $\tau \in [[\alpha]]_0$ が存在して、 $\alpha|U = \tau|U$ となります。したがって $F\alpha F^{-1}|F(U) = F\tau F^{-1}|F(U)$ となります。 $F\tau F^{-1} \in [[\alpha]]_0$ ですから、

$F\alpha F^{-1}$ も局所的には α のべき乗で書けている事が分かります。すなわち $F\alpha F^{-1} \in [[\alpha]]$ です。

同様の議論を $D([[\alpha]])$ に当てはめるのは自然な発想でしょう。しかしそのためには定理 3 が $D([[\alpha]])$ に対して適用可能でなければいけません。結論から言うと定理 3 は $D([[\alpha]])$ に対しても成り立ちます。このことは [S] でも触れられています。きちんとした証明が書かれた文献は今のところ無いのですが、[GPS] の議論をよく読むと同様の証明が $D([[\alpha]])$ に対しても通用することが分かります。

結論として次を得ます。

定理 17. $D([[\alpha]])$ の外部自己同型群 $\text{Out}(D([[\alpha]]))$ は、 $(K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)) \rtimes C^\pm(\alpha)$ に同型である。ただしここで $\eta \in C^\pm(\alpha)$ の $[f] \in K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ に対する作用は

$$\eta^*([f]) = [f\eta^{-1}]$$

で与えられる。

Proof. 任意の自己同型 $\pi \in \text{Aut}(D([[\alpha]]))$ がある同相写像 $F: X \rightarrow X$ によって与えられ、 F が $[[\alpha]]$ と $C^\pm(\alpha)$ の元の積に分解されるところまでは、 $\text{Aut}([[\alpha]])$ の場合と同じである。 $[[\alpha]]_0/D([[\alpha]])$ は $K^0(X, \alpha)/2K^0(X, \alpha)$ に同型であるから、結論を得る。 $\square$

6 例

Sturmian サブシフトと呼ばれる物を考えましょう。 $\theta \in [0, 1)$ を無理数とします。 $[0, 1)$ 上の θ によるずらしを R_θ と書きましょう。 $([0, 1), R_\theta)$ は無理数回転です。写像 $\pi: [0, 1) \rightarrow \{0, 1\}$ を、 $t \in [0, \theta)$ なら $\pi(t) = 0$ 、 $t \in [\theta, 1)$ なら $\pi(t) = 1$ と決めます。そして X を

$$\{(\pi(R_\theta^n(t)))_{n \in \mathbb{Z}} : t \in [0, 1)\}$$

の $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ における閉包とします。 α を X 上のずらしとすると、 (X, α) はカントール極小系になる事が知られていて、Sturmian サブシフトと呼ばれています。

$K^0(X, \alpha)$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (「正確」に言うと $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta$) に同型である事が知られています。よって $[[\alpha]]_0/D([[\alpha]])$ は $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ に同型です。(もちろん $D([[\alpha]])_0$ は単純です。)

しかも (X, α) はサブシフトですから、 $[[\alpha]]_0$ も $D([[\alpha]])_0$ も有限生成群になります。

α と交換するような同相写像は α の冪しかないことが分かっています。また $t \mapsto -t$ に対応するような位数 2 の $\sigma \in \text{Homeo}(X)$ があって、 $\sigma\alpha\sigma = \alpha^{-1}$ となっています。つま

り $C^\pm(\alpha) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ です。よって $\text{Out}([\alpha]_0) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ です。また $\text{Out}(D([\alpha]_0))$ は $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ に同型である事になります。

参考文献

- [BT] Boyle, M.; Tomiyama, J.; *Bounded topological orbit equivalence and C^* -algebras*, J. Math. Soc. Japan 50 (1998), 317–329.
- [D] Dye, H.; *On groups of measure preserving transformations II*, Amer. J. Math. 85 (1963), 551–576.
- [GPS] Giordano, T.; Putnam, I. F.; Skau, C. F.; *Full groups of Cantor minimal systems*, Israel J. Math. 111 (1999), 285–320.
- [M] Matui H.; *Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems*, preprint. math.DS/0404117.
- [S] Skau, C. F.; *Orbit structure of topological dynamical systems and its invariants*, Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996), 533–544, Internat. Press, Cambridge, MA, 1997.