

Shape における Lusternik-Schnirelmann の category について

山口大 教育 渡辺 正

§ 0. 最近 K. Borsuk [1] が compact metric 空間の shape において, Lusternik-Schnirelmann の category を導入した。これは, 任意の空間の shape において Lusternik-Schnirelmann の category を導入する。shape における n -連結性との関係等を考察する。

§ 1. ANR, CW を各々 ANR 空間と連続写像よりなる category, CW-complex と連続写像よりなる category とする。HANR, HCW を各々 ANR, CW の homotopy category とする。 $f \simeq g$ は homotopic を示し, $[f]$ を f の homotopy class とする。

X を位相空間とし $K = \{f_a; a \in A\}$, $f_a: X \rightarrow P_a \in \text{ANR}$ とする。 K が X の semi-projection であるとは次の条件を満足するときである。

- (1) $\forall f: X \rightarrow P \in \text{ANR}$ に対し $\exists a \in A \exists g: P_a \rightarrow P$ で $f \simeq g f_a$ を満足する。

category $\mathcal{C}$ に對して, $\text{pro-}\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の pro-category とする,
すなわち, $\text{pro-}\mathcal{C}$ の object は $\mathcal{C}$ の inverse system である。
 pro-HANR の元 $X = \{X_a, [p_{aa'}], A\}$ が空間 X に associate するこ
は, $\exists \{p_a; a \in A\}, p_a: X \rightarrow X_a$ 次の条件を満足する。

$$(2) \quad p_a \simeq p_{aa'} p_{a'}$$

$$(3) \quad \forall f: X \rightarrow P \in \text{ANR} \quad \exists a \in A \quad \exists g: X_a \rightarrow P \quad \text{c.} \quad f \simeq g p_a.$$

$$(4) \quad \forall f, g: X_a \rightarrow P \in \text{ANR} \quad \exists a' \geq a \quad \text{c.} \quad f p_{aa'} \simeq g p_{aa'}.$$

[6] において, 次の事実が示されている。

Lemma 1. X が空間 X として $K = \{f_a; a \in A\}$ が X の semi-projection
-n とする。このとき X に associate する system $X = \{X_a, [p_{aa'}], B\}$
で各 X_a は f_a の値域と一致するものが存在する。

§ 2. π_n を n -th homotopy group functor とする。空間 X
が n -shape connected であるとは次の性質を満足することである。
3。

$$(5) \quad X \text{ に associate する system } X = \{X_a, [p_{aa'}], A\} \text{ に對して}$$

$$\forall a \in A \quad \exists a' \geq a \quad \text{c.} \quad \pi_n(p_{aa'}) : \pi_n(X_{a'}) \rightarrow \pi_n(X_a) \text{ が zero}$$

$$\text{homomorphism for } n \leq n.$$

注意: この § では空間はすべて pointed であり, 写像も
pointed である。Lemma 1 を使用して次の定理を得る。

Theorem 1. 空間 X が n -shape connected であるための
必要十分条件は, X に associate する system $X = \{X_a, [p_{aa'}], A\}$

各 X_n が n -connected であることが存在することである。

この定理と古典的 Hurewicz の定理を組合せることにより shape における Hurewicz の定理を得る。

Theorem 2. $n \geq 1$ と X が n -shape connected とする。このとき, Hurewicz map: $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ は $k \leq n+1$ に対して pro-isomorphism となる。各 $\pi_k(X)$, $H_k(X)$ は X の k -th pro-homotopy group, k -th pro-homology group を示す。

上の Th 2 は 森田 [5] で示されているが, この証明の方が, はるかに簡単である。

§ 2. 空間 X の Lusternik-Schnirelmann の category を $\text{cat } X$ と示す。すなわち $\text{cat } X = n$ とは 次の性質を満足する最小なる n のことである。

(6) $\exists \{U_1, \dots, U_n\}; X$ の open cover として 各 U_i は X の中で contractible.

もしも, この様なものが存在しないときには $\text{cat } X = \infty$ とする。

$f: X \rightarrow Y$ に対して $\text{cat } f$ を次の様に定義する。 $\text{cat } f$ とは 次の条件を満足する n の最小なることである。

(7) $\exists \{U_1, \dots, U_n\}; X$ の open cover として $f|_{U_i}: U_i \rightarrow Y$ が null-homotopic for $i \leq n$.

もしも, この様なものが存在しないときには, $\text{cat } f = \infty$ とする。

$\text{cat } X$, $\text{cat } f$ は次の性質をもつ。

(8) X が Y に $\leq$ である homotopy category であるならば

$$\text{cat } X \leq \text{cat } Y.$$

(9) X が contractible であるための必要十分条件は $\text{cat } X = 1$.

(10) $\text{cat } X = \text{cat } I_X$, $I_X: X \rightarrow X$ は恒等写像.

(11) $\text{cat } f \leq \min \{ \text{cat } X, \text{cat } Y \}$, $f: X \rightarrow Y$.

(12) $\text{cat } gf \leq \min \{ \text{cat } f, \text{cat } g \}$, $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$.

(13) $f \leq g$ ならば $\text{cat } f = \text{cat } g$

(14) $\text{cat } f = 1$ であるための必要十分条件は f が null-homotopic であること.

次の pro-HANR の object $X = \{X_\alpha, [p_{\alpha\alpha'}], A\}$ に対して $\text{cat } X$ を次の様に定義する. $\text{cat } X$ とは次の条件を満足するものうちで最小なものを示す.

(15) $\forall \alpha \in A \exists \alpha' \geq \alpha$ である $\text{cat } p_{\alpha\alpha'} \leq \alpha$.

もしも, この様なものが存在しなるときには, $\text{cat } X = \infty$ とする.

(1) ~ (14) の性質を用いて次の Th を示すことが出来る.

Theorem 3. X, Y は pro-HANR の object とする. もしも X が pro-HANR に於て Y に支配されるならば $\text{cat } X \leq \text{cat } Y$.

この Th の Corollary として $\text{cat } X$ は pro-HANR での invariant であることが判る.

最後の shape における Lusternik-Schnirelmann の category を次の様に定義する. X を空間とすると $s\text{-cat } X$ は, 或

3 X に associated system $\mathcal{X}$ に対し $s\text{-cat } X = \text{cat } \mathcal{X}$ とする。

この様に定義するとき、前述の s と $\mathcal{X}$ の取り方に依らず $s\text{-cat } X$ が決まる。このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 4. X が compact metric 空間であるとき、この $s\text{-cat } X$ は Borsuk の定義による $\mathcal{K}(X)$ と一致する。

この $s\text{-cat } X$ の性質を列挙しよう。

Theorem 5. X, Y を空間とし、 $sh(X) \leq sh(Y)$ であるならば $s\text{-cat } X \leq s\text{-cat } Y$ 。これは s を $s\text{-cat}$ は shape invariant である。

Theorem 6. X が ANR であるならば、 $\text{cat } X = s\text{-cat } X$ 。

Theorem 7. X が trivial shape であるための必要十分条件は $s\text{-cat } X = 1$ 。

Theorem 8. X, Y を compact 空間とする。このとき $\max\{s\text{-cat } X, s\text{-cat } Y\} \leq s\text{-cat}(X \times Y) \leq s\text{-cat } X + s\text{-cat } Y - 1$ 。

定理 8 は A. Borsuk の定理の shape における定理である。次に Theorem 1 を使用して Grossman の定理に類似する定理を shape で示すことができる。

Theorem 9. pointed 空間 X が n -shape connected であるならば $s\text{-cat } X \leq \left\lfloor \frac{d\text{-dim } X}{n+1} \right\rfloor + 1$ 。このとき $d\text{-dim } X$ は X の deformation dimension を示す。

この n の系は n と s を得る。

Theorem 10. 連結な空間 X に対して $s\text{-cat} X \leq d\text{-dim} X + 1$.

註: "証明は, "す"れ と"こ"かに記述する"マ"エリ"可"。
変分に対応する概念が shape 理論の方に"ミ"れ"ば", $s\text{-cat}$ の
部分, 幾何学的な意味を説明すること"が"可"い"る"と"あ"る"う"。

文 献

- [1]. K. Borsuk ; On the Lusternik-Schnirelmann category in shape theory, *Fund. Math.* 99 (1978) 35-42.
- [2]. I. Bernstein - T. Ganea ; The category of a map and of a cohomology class, *Fund. Math.* 50 (1962) 265-279.
- [3]. R. Fox ; On the Lusternik-Schnirelmann category, *Ann. of Math.* 42 (1941) 333-370.
- [4]. D. Grouman ; An estimation of the Lusternik-Schnirelmann category, *Doklady* 54 (1946) 108-112
- [5]. K. Morita ; The Hurewicz and the Whitehead theorems in shape theory, *Sci. Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku*. 12 (1974) 246-258.
- [6]. T. Watanabe, On spaces which have the shape of compact metric spaces, to appear in *Fund. Math.*