

連結と余連結な CW スペクトラム

阪市大 理 吉村 善一

CW スペクトラムと射のホモトピー類からなる圏を $\mathcal{C}_R$ とし、この圏の中で話を進める。

1 節 Postnikov 分解

1.1. CW スペクトラム E に対し、 $n+1$ 余連結な CW スペクトラム F と射 $\tau: E \rightarrow F$ が与えられ、 $\tau_*: \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(F)$ ($i \leq n$) が満たせられるとき、対 (F, τ) を E の $n+1$ 余連結 Postnikov コファイバーとよび、 $((E(-\infty, n], \tau_n)$ で表わす。又、 n 連結な CW スペクトラム G と射 $\gamma: G \rightarrow E$ が与えられ、 $\gamma_*: \pi_i(G) \rightarrow \pi_i(E)$ ($i > n$) が満たせられるとき、対 (G, γ) を E の n 連結 Postnikov ファイバーとよび、 $((E(n, \infty), \gamma_n)$ で表わす。 E に $n+2$ 次元以上の胞体を接着して $n+1$ 次元以上のホモトピー群を消した CW スペクトラムを $E_{n, \infty}$ とし、その包含を $\iota_n: E \subset E_{n, \infty}$ と

すると,

(1.1) 対 $(E_{n,\infty}, l_n)$ は E の $n+1$ 余連結 Postnikov コファイバーになる.

一方, l_n を含むコファイバー列 $E'_{n,\infty} \xrightarrow{k_n} E \subset E_{n,\infty}$ を考える.

(1.2) 対 $(E'_{n,\infty}, k_n)$ は E の n 連結 Postnikov ファイバーになる.

しかも $(E_{n,\infty}/E)^{n+1} = 3 \times 1$ となるから

命題 1.1 CW スペクトラム E が n 連結ならば, E とホモトピー同値で E の n 切片が基点からなる CW スペクトラム G が存在する.

補題 1.2 i) X は n 連結で E は $n+1$ 余連結, 又は
ii) X は異なる次元で E は n 連結とする. γ のとき
 $\{X, E\} = 3 \times 1$ となる.

[証明] i) 命題 1.1 より $X^n = 3 \times 1$ と仮定してよいので, k についての帰納法により $\{X^{n+k}, E\} = 0$ ($k \geq 0$) を得る.

よって Milnor の完全列

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 \{X^{n+k}, \Sigma^{-1}E\} \rightarrow \{X, E\} \rightarrow \varprojlim \{X^{n+k}, E\} \rightarrow 0$$

を用いると, $\{X, E\} = 3 \times 1$ となる.

ii) X は $X_0 = 3 \times 1$, $X_{k+1}/X_k = \bigvee_{\alpha} \Sigma^{d_{\alpha}} \quad (d_{\alpha} \leq n)$, $X = \bigcup X_k$ なる位数フィルトレーション $\{X_k\}$ をもつ. 従って Milnor の

完全列 $\{X, E\} = \{0\}$ を得る。」

定理 1.3 (Araki [1], Dold [3])

“Postnikov ファイバー, コファイバーの普遍性”

i) $n+1$ 次元連結 CW スペクトラム F と射 $\tau: E \rightarrow F$ に対し

$\tau = j_n \cdot j_n$ なる唯一つの射 $j_n: E(-\infty, n] \rightarrow F$ が存在する。

ii) n 次元連結 CW スペクトラム G と射 $\sigma: G \rightarrow E$ に対し

$\sigma = i_n \cdot g_n$ なる唯一つの射 $g_n: G \rightarrow E(n, \infty)$ が存在する。

[証明] (1.1) と (1.2) により (i) 対 $(E(-\infty, n], j_n)$ と射 $(E(n, \infty),$

$i_n)$ が存在する。 $\{E, F\}$ の完全列

$$\{\Sigma E(n, \infty), F\} \rightarrow \{E(-\infty, n], F\} \xrightarrow{j_n^*} \{E, F\} \rightarrow \{E(n, \infty), F\}$$

$$\{G, \Sigma^{-1} E(-\infty, n]\} \rightarrow \{G, E(n, \infty)\} \xrightarrow{i_n^*} \{G, E\} \rightarrow \{G, E(-\infty, n]\}$$

を考えると、補題 1-2 i) より j_n^* と i_n^* は共に同型になる。

従って τ, σ に対し j_n, g_n がそれぞれ唯一つ定まる。□

補題 1.4 $m < n$ とする、ホモトピー同値射

$$(E(m, \infty))(-\infty, n] \rightarrow (E(-\infty, n])(m, \infty)$$

が存在して、次の図式は可換になる:

$$\begin{array}{ccc} E & \hookleftarrow & E(m, \infty) \rightarrow (E(m, \infty))(-\infty, n] \\ & & \downarrow \\ & \rightarrow & E(-\infty, n] \leftarrow (E(-\infty, n])(m, \infty) \end{array}$$

上の補題の結果, $m < n$ に対し

$$E(m, n] = (E(m, \infty))(-\infty, n] = (E(-\infty, n])(m, \infty)$$

と定義してよい。特に $E(n-1, n] = E[n]$ と略す。

1.2. $\varphi: E \wedge F \rightarrow G$ は CW スペクトラムのペアリングである。 $E[0, \infty) \wedge F(n, \infty)$ は n 連結だから、定理 1.3 ii) と補題 1.2 i) を用いると次の図式

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccccc} E[0, \infty) \wedge F(n, \infty) & \rightarrow & E[0, \infty) \wedge F & \rightarrow & E[0, \infty) \wedge F(-\infty, n] \\ & & \downarrow & & \\ \varphi(n, \infty) \downarrow & & E \wedge F & & \downarrow \varphi(-\infty, n] \\ & & \downarrow & & \\ G(n, \infty) & \rightarrow & G & \rightarrow & G(-\infty, n] \end{array}$$

を可換にする射 $\varphi(n, \infty)$ と $\varphi(-\infty, n]$ が唯一つ存在する。

更に (1.3) と補題 1.2 i) を用いると次の図式

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccc} E[0, \infty) \wedge F(n, \infty) & \rightarrow & E[0, \infty) \wedge F[n] & \rightarrow & E[0] \wedge F[n] \\ \varphi(n, \infty) \downarrow & & \varphi[n] \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi}[n] \\ G(n, \infty) & \rightarrow & G[n] & & \end{array}$$

を可換にする射 $\varphi[n]$ と $\bar{\varphi}[n]$ が唯一つ定まる。

命題 1.5 i) E は (結合性 または可換性をみたす) 1 をもつ環 CW スペクトラムとする。 φ のとき

a) $E[0, \infty)$, $E[0]$ は共に φ の様な CW スペクトラムで、

$i: E[0, \infty) \rightarrow E$ と $j': E[0, \infty) \rightarrow E[0]$ は 1 をもつ環としての射になる。

b) $E(-\infty, 0]$ は (結合性をみたす) $E[0, \infty)$ 加群 CW スペクトラムで、 $j: E \rightarrow E(-\infty, 0]$ と $j': E[0] \rightarrow E(-\infty, 0]$ は $E[0, \infty)$ 加群としての射になる。

ii) $\tau: E \rightarrow F$ は 1 をもつ環 CW スペクトラムの射とする。

γ のとき, $\gamma[0, \infty) : E[0, \infty) \rightarrow F[0, \infty)$ と $\gamma[0] : E[0] \rightarrow F[0]$ は共に γ の様な射になる。

iii) 次の図式は可換になる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \rightarrow & E[0] & \rightarrow \\
 E[0, \infty) & \rightarrow & E & \rightarrow & E(-\infty, 0] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F[0, \infty) & \rightarrow & F & \rightarrow & F(-\infty, 0] \\
 & & \rightarrow & F[0] & \rightarrow
 \end{array}$$

K , MU をそれぞれ BU スペクトラム, 複素 Thom スペクトラムとし, $\mu_c : MU \rightarrow K$ を Thom 写像とする。 K と MU は共に結合性と可換性をみたす 1 もつ環 CW スペクトラムで, μ_c は 1 もつ環としての射になる。 連結 BU スペクトラム $K[0, \infty)$ と余連結 BU スペクトラム $K(-\infty, 0]$ をそれぞれ K , $\bar{K}$ で表わし, 命題 1.5 を適用すると

定理 1.6 i) K は結合性と可換性をみたす 1 もつ環 CW スペクトラムで, $\bar{K}$ は結合性をみたす K 加群 CW スペクトラムになる。

ii) Thom 写像 μ_c によって射 $\gamma : MU \rightarrow K$ が唯一つ定まり, 次の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \gamma & \nearrow & K \\
 MU & \xrightarrow{\mu_c} & K & \searrow \eta & H \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \bar{\mu} & & \nwarrow \bar{\eta} \\
 H & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \bar{K} & &
 \end{array}$$

しかも $\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}, \eta$ は 1 もつ環としての射で,
 $\lambda, \bar{\lambda}$ は K 加群としての射である。

なお, 1 もつ環 K と K 加群 $\bar{K}$ との関係として

命題 1.7 次の列は完全列である:

$$0 \rightarrow K_*(X) \otimes_{\pi_*(K)} \pi_*(\bar{K}) \rightarrow \bar{K}_*(X) \rightarrow T_{\pi_*(K)}^{\pi_*(K)}(K_*(X), \pi_*(\bar{K})) \rightarrow 0.$$

2 節 普遍係数列

2.1 CW スペクトラム E とアーベル群 I に対し,

$\text{Hom}(E_*(), I)$ は CW スペクトラム上のコホモロジー理論に

なる。従って, Brown の表現可能定理により CW スペクト

ラム $\hat{E}(I)$ が唯一つ存在して, 同型 $\tau_I: \hat{E}(I)^*(X) \cong$

$\text{Hom}(E_*(X), I)$ が得られる。今 $0 \rightarrow A \rightarrow I \xrightarrow{\varphi} J \rightarrow 0$

をアーベル群 A の単射的分解とすると, 準同型 φ より射

$\hat{E}(\varphi): \hat{E}(I) \rightarrow \hat{E}(J)$ が唯一つ定まる。その写像錐を

$\Sigma \hat{E}(A)$ とおくと, 完全列

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}^1(E_{*-1}(X), A) \rightarrow \hat{E}(A)^*(X) \xrightarrow{\tau_A} \text{Hom}(E_*(X), A) \rightarrow 0$$

が成り立ち, しかも $\hat{E}(A)$ は A の単射的分解によらないで一意に定まる。特に

$$(2.2) \quad \hat{H}(A) = HA, \quad \hat{K}(A) = KA \quad [4].$$

補題 2.1 $\hat{E}(A) = F(E, \hat{S}(A))$ 射 CW スペクトラム。

[証明] I を単射的アーベル群とすると, 同型

$$\hat{E}(I)^*(X) \cong \text{Hom}(E_*(X), I) \cong \hat{S}(I)^*(X \wedge E) \cong F(E, \hat{S}(I))^*(X)$$

が得られるので、ホモトピー同値射 $\varphi_I: \hat{E}(I) \rightarrow F(E, \hat{S}(I))$

が存在する。従って A の単射的分解 $0 \rightarrow A \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow 0$

に対し、次の図式

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{E}(A) & \rightarrow & \hat{E}(I) & \rightarrow & \hat{E}(J) & \rightarrow & \Sigma \hat{E}(A) \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_I & & \downarrow \varphi_J & & \downarrow \Sigma \varphi_A \\ F(E, \hat{S}(A)) & \rightarrow & F(E, \hat{S}(I)) & \rightarrow & F(E, \hat{S}(J)) & \rightarrow & F(E, \Sigma \hat{S}(J)) \end{array}$$

を可換にするホモトピー同値射 $\varphi_A: \hat{E}(A) \rightarrow F(E, \hat{S}(A))$ が存在する。 $\square$

$\rho_E(A): \hat{E}(A) \wedge E \rightarrow \hat{S}(A)$ を評価射とすると、射 $\Sigma_E(A): E \rightarrow F(\hat{E}(A), \hat{S}(A))$ を $\rho_E(A) = \rho_{\hat{E}(A)}(A) * (1_{\hat{E}(A)} \wedge \Sigma_E(A))$ により定義する。以後、整数環 $\mathbb{Z}$ に対し $\hat{E}(\mathbb{Z})$, $\rho_E(\mathbb{Z})$, $\Sigma_E(\mathbb{Z})$ をそれぞれ $\hat{E}$, ρ_E , Σ_E と略す。

定理 2.2 i) 関手 $F(_, \hat{S}(A)): \mathcal{C}_R \rightarrow \mathcal{C}_R$ は反変完全関手である。

ii) 全ての K に対し $\pi_K(E)$ は有限生成と仮定する。このとき

a) $\Sigma_E: E \rightarrow F(\hat{E}, \hat{S})$ はホモトピー同値射であり、

b) $F(_, \hat{S}): \{X, E\} \rightarrow \{\hat{E}, \hat{X}\}$ は同型になる。

準同型 $K_A: \hat{E}(A)^*(X) \rightarrow \text{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A)))$ を

$K_A(\tau) = \tau_*$ により定義すると

命題 2.3 A が有限生成アーベル群ならば、次の列

$$0 \rightarrow \text{Ext}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A))) \rightarrow \hat{E}(A)^*(X) \xrightarrow{K_A} \text{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A))) \rightarrow 0$$

は完全列になる。

[証明] I が単射的アーベル群として有限生成のとき, 次の
三角形

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}(I)^*(X) & \xrightarrow{K_I} & \text{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(I))) \\ & \searrow \tau_I & \downarrow \rho_I \\ & & \text{Hom}(E_*(X), I) \end{array}$$

を可換にする自然な同型 ρ_I が存在することを示せば十分である。
今 $\alpha_I = \tau_I(1_{\hat{S}(I)}) \in \text{Hom}(\pi_0(\hat{S}(I)), I)$ とおくと, この同型 τ_I は $\tau_I = \alpha_I * K_I$ を満たす。明らかに $\pi_0(\hat{S}(I)) \cong I$ だから, この同型を τ と表わすと $\alpha_I \cdot S_{I*} = \tau$ となる射 $S_I: \hat{S}(I) \rightarrow \hat{S}(I)$ が存在する。しかるに I に対する仮定の下 α_I は同型となるので, 同型 ρ_I として $\alpha_I *$ を取ればよい。□

1.2. $\varphi: E \wedge F \rightarrow G$ を CW スペクトラムのペアリングとすると, 次の図式

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccc} \hat{G}(A) \wedge E \wedge F & \xrightarrow{1 \wedge \varphi} & \hat{G}(A) \wedge G \\ \bar{\varphi}(A) \wedge 1 \downarrow & & \downarrow e_G(A) \\ \hat{F}(A) \wedge F & \xrightarrow{e_{F(A)}} & \hat{S}(A) \end{array}$$

を可換にする射 $\bar{\varphi}(A): \hat{G}(A) \wedge E \rightarrow \hat{F}(A)$ が唯一つ定まる。更に, $e_{E \wedge F}(A) = e_F(A) * (e_{E, F}(A) \wedge 1_F)$ によって与えられる評価射 $e_{E, F}(A): \widehat{E \wedge F}(A) \wedge E \rightarrow \hat{F}(A)$ を用いると

$$(2.4) \quad \bar{\varphi}(A) : \hat{G}(A) \wedge E \xrightarrow{\hat{\varphi}(A) \wedge 1} \widehat{E \wedge \bar{H}(A)} \wedge E \xrightarrow{e_{E \wedge \bar{H}(A)}} \hat{\bar{H}}(A).$$

定理 2.2 i) と (2.4) により

命題 2.4 E は 1 をもつ環 CW スペクトラム とする。

i) F が (結合性をみたす) 左 E 加群 CW スペクトラム ならば, $\hat{F}(A)$ は (結合性をみたす) 右 E 加群 CW スペクトラム になる。

ii) $\varphi : F \rightarrow G$ が 左 E 加群 としての射 ならば, $\hat{\varphi}(A) : \hat{G}(A) \rightarrow \hat{F}(A)$ は 右 E 加群 としての射 になる。

ペアリイ = 7" $\varphi : F \wedge E \rightarrow G$ により $E^*(X) \otimes \text{Hom}(G_*(Y), A) \rightarrow \text{Hom}(F_* \wedge X \wedge Y, A)$ が 算 かい, $\bar{\varphi}(A) : E \wedge \hat{G}(A) \rightarrow \hat{F}(A)$ により $E^*(X) \otimes \hat{G}(A)^*(Y) \rightarrow \hat{F}(A)^*(X \wedge Y)$ が 算 かい。

定理 2.5 E は 1 をもつ環 CW スペクトラム, F は 右 E 加群 CW スペクトラム とし, A は 有限生成 アーベル群 とする。
このとき $E^*()$ 加群 としての完全列

$$0 \rightarrow \text{Ext}(F_{*-1}(X), A) \rightarrow \hat{F}(A)^*(X) \xrightarrow{K_A} \text{Hom}(F_*(X), A) \rightarrow 0$$

が存在する。

[証明] I を 単射的 アーベル群 とすると, (2.3) により

$$\begin{array}{ccc} E^*(X) \otimes \hat{F}(I)^*(Y) & \xrightarrow{1 \otimes K_I} & E^*(X) \otimes \text{Hom}(F_*(Y), \pi_0(\hat{S}(I))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{F}(I)^*(X \wedge Y) & \xrightarrow{K_I} & \text{Hom}(F_*(X \wedge Y), \pi_0(\hat{S}(I))) \end{array}$$

が 同 換 になる。従って 命題 2.3 の 完全列 は $E^*()$ 加群 としての 算 かい になる。』

命題 2.6 ホモトピー 同値射 $KA \rightarrow \hat{K}(A)$ は 次の 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 KA & \xrightarrow{\lambda} & KA & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & KA \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \widehat{K}(A) & \xrightarrow{\widehat{\lambda}(A)} & \widehat{K}(A) & \xrightarrow{\widehat{\lambda}(A)} & \widehat{K}(A)
 \end{array}$$

を可換にするホモトピー同値 $KA \rightarrow \widehat{K}(A)$, $\bar{KA} \rightarrow \widehat{\bar{K}}(A)$ を導く。

定理 1.6 ii), 2.2 i) と命題 2.6 により次の可換な図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mu_c & \rightarrow & K & \xrightarrow{\sim} & \widehat{K} \\
 MU & \xrightarrow{\xi} & K & \xrightarrow{\lambda} & \bar{K} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\bar{K}} \\
 & \searrow \mu & & \searrow \eta & & \searrow \widehat{\eta} & \\
 & & H & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\widehat{H}}
 \end{array}$$

が得られるので、命題 2.4 を用いて定理 1.6 ii) の図式を拡張する。

定理 2.7 次の可換な図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mu_c & \rightarrow & K & \xrightarrow{\sim} & \widehat{K} \\
 MU & \xrightarrow{\xi} & K & \xrightarrow{\lambda} & \bar{K} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\bar{K}} \\
 & \searrow \mu & & \searrow \eta & & \searrow \widehat{\eta} & \\
 & & H & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\widehat{H}}
 \end{array}$$

において、i) $\mu_c, \xi, \lambda, \mu, \eta$ は 1 をもつ環としての射で、
 ii) $\bar{\lambda}, \bar{\eta}$ は K 加群としての射、又 iii) $\widehat{\mu}_c, \widehat{\xi}, \widehat{\mu}$ は MU 加群としての射である。

$\mu: MU \rightarrow H$ は Baas [2] によれば

$$(2.5) \quad MU \rightarrow \cdots \rightarrow MU\langle n \rangle \rightarrow \cdots \rightarrow H$$

と分解でき、かつ $MU\langle n \rangle_*()$ は結合性をもつ $MU_*()$ 加群になる。従って $\varphi_n: MU_*(X) \otimes MU\langle n \rangle_*(Y) \rightarrow MU\langle n \rangle_*(X \wedge Y)$

を導くペアリニク $\varphi_{<n>} : MU \wedge MU_{<n>} \rightarrow MU_{<n>}$ が存在するが, $MU_{<n>}^0(MU \wedge MU_{<n>})$ のハウストドルフ性によりペアリニク $\varphi_{<n>}$ は唯一つ定まる。命題 2.4 を用いると

定理 2.8 i) $MU_{<n>}$, $\widehat{MU_{<n>}}(A)$ は共に結合性をみたす MU 加群 CW スペクトラムである。

ii) $MU \rightarrow \dots \rightarrow MU_{<n>} \rightarrow \dots \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow \widehat{MU_{<n>}} \rightarrow \dots \rightarrow \widehat{MU}$ は MU 加群としての射からなる列である。

定理 2.5 を適用すると

系 2.9 A が有限生成アーベル群ならば, $K_A : \pi_*(\widehat{MU_{<n>}}(A)) \rightarrow \text{Hom}(\pi_*(MU_{<n>}), A)$ は $\pi_*(MU)$ 加群として同型になる。

参考文献

- [1] S. Araki: 一般コホモロジー, 紀伊国屋書店 (予刊)
- [2] H. A. Baa: On bordism theory of manifold with singularities, Aarhus Univ. (1969/70).
- [3] A. Dold: On general cohomology, Aarhus Univ. (1968).
- [4] S. Yosimura: Universal coefficient sequences for cohomology theories of CW-spectra, Osaka J. Math. (投稿中)