

正型対称ポテンシャル作用素 の Resolvents について

石大 理 岸 正 倫

§ 1. 序

X を locally compact, σ -compact Hausdorff space, C_K を X 上の compact support の連続関数全体.

C_0 をその uniform norm による completion とする.

HUNT [4] によれば C_K を C_0 に写すポテンシャル作用素 T が positive $\mathcal{C}$ -complete maximum principle をみたせば次の性質をもつ C_0 上の resolvent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ が存在する.

$$i) \quad R_\lambda \geq 0, \quad \| \lambda R_\lambda \| \leq 1$$

$$ii) \quad R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

$$iii) \quad Tf - R_\lambda f = \lambda R_\lambda Tf = \lambda T R_\lambda f \quad \forall f \in C_K$$

$$iv) \quad Tf = \lim_{\lambda \downarrow 0} R_\lambda f \quad \forall f \in C_K$$

T が domination principle をみたす場合には次の条件を仮定すれば同じ結論をうる. complete maximum principle が導かれるからである.

$$0 \leq \exists h_n \in C_K \quad \Rightarrow \quad \forall h_n \uparrow 1$$

この HUNT の定理には少なくとも二つの問題点がある。その一つは V が C_K を C_0 へ写すこと。多くの場合 $f \in C_K$ でも Vf は必ずしも無限遠点で 0 とならない。次に domination principle と complete maximum principle の隔りが明確には定理に反映していない。これらの問題点をふまえて V が特に positive 正型対称ポテンシャル作用素である場合について resolvent の特徴づけとこれに関連した問題を考察する。

§2. ポテンシャル作用素と resolvents

X を locally compact, σ -compact Hausdorff space, ξ を X 上の稠密な正 Radon 測度, $\mathcal{B}$ を X 上の有界可測かつ台が compact な函数全体とする。 $\mathcal{B}$ の各元 f を可測函数 Vf に写す linear operator V をポテンシャル作用素という。次の 4 条件を仮定する。

$$(1) \quad f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Vf \geq 0$$

$$(2) \quad \int Vf \cdot g \, d\xi = \int Vg \cdot f \, d\xi \quad \text{有限}$$

$$(3) \quad \int Vf \cdot f \, d\xi \geq 0$$

$$(4) \quad \forall K \text{ compact } \subset X \quad \text{に對して定数 } A_K \text{ が存在して}$$

$$\int_K |Vf| \, d\xi \leq A_K \|Vf\|$$

$$\text{すなわち} \quad \|Vf\|^2 = \int Vf \cdot f \, d\xi$$

このとき $\{ \varphi_f; f \in \mathcal{B} \}$ は内積 $(\varphi_f, \varphi_g) = \int \varphi_f \cdot \varphi_g \, d\zeta$ で前ヒルベルト空間を作る。その完備化を $\mathcal{H}$ とする。

命題 1. $\mathcal{H}$ の元 u は局所可積分函数で

$$\begin{aligned} \int_K |u| \, d\zeta &\leq A_K \|u\| && \forall K \text{ compact} \\ (u, \varphi_f) &= \int u f \, d\zeta && \forall f \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

∇ は自然に拡張して局所可積分函数に作用される： すなわち $f \geq 0$ に対して $f_n \in \mathcal{B}^+$ $f_n \uparrow f$ を選べば $\nabla f_n \uparrow$ $\int \lim \nabla f_n \cdot f \, d\zeta < \infty$ のとき $\nabla f = \lim \nabla f_n$ と定義すると ∇f は $\{\}$ -測度 0 を除いて一意に定まる。

$$\Sigma^+ = \{ f \geq 0 : \int \nabla f \, d\zeta < \infty \}$$

$$\Sigma = \{ f - g : f, g \in \Sigma^+ \}$$

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g, \quad f - g \in \Sigma$$

とおく。勿論 $f \in \Sigma$ ならば $\nabla f \in \mathcal{H}$ 。特に $f \in \Sigma^+$ ならば $\nabla f \geq 0$ であるとして f_n をとれば $\nabla f_n \rightarrow \nabla f$ (強) である。

命題 1' $u \in \mathcal{H}, f \in \Sigma$ ならば

$$(u, \nabla f) = \int u \cdot f \, d\zeta$$

$f \in \Sigma^+, u \geq 0$ の場合には ∇ の定義から命題 1 とから

直ぐわかる. u が一般の場合には次の補題を使う.

補題 1 [1] $\forall u \in \mathcal{H}$ に対して $\exists \tilde{u} \in \mathcal{H}$ かつ

$$|u| \leq \tilde{u}, \quad \|\tilde{u}\| \leq \|u\|.$$

実際、 $P = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{B}^+ \}$ の閉包とし、 u の P への射影を u' 、 $-u$ の P への射影を u'' とすれば $\tilde{u} = u' + u''$ が求まるものである.

この P の元は純ポテンシャルと呼ばれ、 $u \in \mathcal{H}$ が P の元であるための必要充分条件は $\forall v \in \mathcal{H} \ v \geq 0$ に対して $(u, v) \geq 0$ であること. P の各元が実際に正刻度のポテンシャルとして表わされるかどうかは問題である. $\equiv$ についてはこれにふれない. §3 補題 2 にポテンシャルとして表わされる例がある.

§2. BEURLING-DENY [2] にならって resolvent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ を作る. $\lambda > 0$ と $f \in \mathcal{H} \cup L^2(\mathbb{R})$ が与えられたとき $v \in \mathcal{H}$ が $\lambda v - f \in L^2(\mathbb{R})$ である v に対して

$$F(v) = \|v\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^{-1} \|\lambda v - f\|_{L^2}^2$$

と置く.

命題 2. $\exists u \in \mathcal{H} \quad \lambda u - f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow$

$$F(u) = \inf \{ F(v) \mid v \in \mathcal{H}, \lambda v - f \in L^2(\mathbb{R}) \}$$

$R_\lambda f = u$ と定義する.

$R_\lambda f$ の基本的性質を書き添えると:

命題 3.

(i) R_λ は $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $L^2 \rightarrow \mathcal{H} \cap L^2$ の linear operator かつ

$$R_\lambda f \text{ は } (R_\lambda f, v)_\mathcal{H} = (f - \lambda R_\lambda f, v)_{L^2} \text{ for } \forall v \in \mathcal{H} \cap L^2$$

による特徴づけが出来る.

$$(ii) \quad \|\lambda R_\lambda f\|_\mathcal{H} \leq \|f\|_\mathcal{H}, \quad \|\lambda R_\lambda f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$$

$$(iii) \quad (R_\lambda f, g)_{L^2} = (f, R_\lambda g)_{L^2} \quad f, g \in L^2$$

$$(iv) \quad (R_\lambda f, f)_{L^2} \geq 0 \quad f \in L^2$$

$$(v) \quad R_\lambda f - R_\mu f = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu f \quad f \in L^2$$

$$(vi) \quad \lambda \downarrow 0 \text{ のとき } \lambda R_\lambda f \rightarrow f \text{ (強)} \text{ in } L^2 \quad f \in L^2$$

(5) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ なるから

$$(iii)' \quad (R_\lambda f, g)_\mathcal{H} = (f, R_\lambda g)_\mathcal{H} \quad f, g \in \mathcal{H}$$

$$(iv)' \quad (R_\lambda f, f)_\mathcal{H} \geq 0 \quad f \in \mathcal{H}$$

$$(v)' \quad R_\lambda f - R_\mu f = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu f \quad f \in \mathcal{H}$$

$$(vi)' \quad \lambda \downarrow 0 \text{ のとき } \lambda R_\lambda f \rightarrow 0 \text{ (強)} \text{ in } \mathcal{H} \quad f \in \mathcal{H}$$

$$(vii)' \quad \lambda \uparrow \infty \text{ のとき } \lambda R_\lambda f \rightarrow f \text{ (強)} \text{ in } \mathcal{H} \quad f \in \mathcal{H}$$

(6) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in L^2 なるから

$$(vi)' \quad \lambda \uparrow \infty \text{ のとき } \lambda R_\lambda f \rightarrow f \text{ (強)} \text{ in } L^2 \quad f \in L^2$$

命題 4. 上の条件 (5) は次の条件 (7) と同値である.

(7) $\lambda \downarrow 0$ のとき $R_\lambda f \rightarrow \nabla f$ (強) in $\mathcal{H}$ for $\forall f \in L^2 \cap \Sigma$

であるとき次の (8) が成立する

(8) $\nabla f - R_\lambda f = \lambda R_\lambda \nabla f \quad f \in L^2 \cap \Sigma$

証明. (7) $\Rightarrow$ (5): $R_\lambda f \in \mathcal{H} \cap L^2$ 故明らか.

(5) $\Rightarrow$ (7):

$$\begin{aligned} \|\nabla f - R_\lambda f\|_H^2 &= (\nabla f, f)_{L^2} - 2(R_\lambda f, f)_{L^2} + (f - \lambda R_\lambda f, R_\lambda f)_{L^2} \\ &\leq (\nabla f - R_\lambda f, f)_{L^2} = (\nabla f - R_\lambda f, \nabla f)_H \\ &\leq \|\nabla f\|_H^2 \end{aligned}$$

$\forall v \in \mathcal{H} \cap L^2$ とする

$$\begin{aligned} (\nabla f - R_\lambda f, v)_H &= (f, v)_{L^2} - (f - \lambda R_\lambda f, v)_{L^2} \\ &= (\lambda R_\lambda f, v)_{L^2} \rightarrow 0 \quad (\lambda \downarrow 0) \end{aligned}$$

従って $R_\lambda f \rightarrow \nabla f$ (強) in $\mathcal{H}$

(5) $\Rightarrow$ (8): $f \in L^2 \cap \Sigma$, $v \in \mathcal{H} \cap L^2$ とする

$$\begin{aligned} (R_\lambda f, v)_H &= (f - \lambda R_\lambda f, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2} - (f, \lambda R_\lambda v)_{L^2} \\ &= (\nabla f, v)_H - (\nabla f, \lambda R_\lambda v)_H \\ &= (\nabla f - \lambda R_\lambda \nabla f, v)_H \end{aligned}$$

§ 3. domination principle

定義. Γ の domination principle とは Γf とは

$$f, g \in \mathcal{B}^+, \quad \Gamma f(x) \leq \Gamma g(x) \text{ on } \{x; f(x) > 0\} \Rightarrow \Gamma f \leq \Gamma g$$

この § 2" はこの原理と resolvent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ との関係を条件 (5) と与える V について調べる.

命題 5. V が条件 (5) を与えるならば次は同値である.

$$(9) \quad R_\lambda \geq 0 \quad \text{on } L^2 \quad \lambda > 0$$

$$(10) \quad u \in \mathcal{H} \Rightarrow |u| \in \mathcal{H}, \quad \| |u| \|_{\mathcal{H}} \leq \| u \|_{\mathcal{H}}$$

$$(9)' \quad R_\lambda \geq 0 \quad \text{on } L^2 \cup \mathcal{H} \quad \lambda > 0$$

証明 $(9) \Rightarrow (10)$: $v \in L^2$ に対して

$$H^\lambda(v) = \lambda (v - \lambda R_\lambda v, v)_{L^2}$$

$$\text{とある.} \quad H^\lambda(v) = \lambda^2 \| R_\lambda v \|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \| v - \lambda R_\lambda v \|_{L^2}^2 \quad \text{【注意】}$$

$$\text{すなわち} \quad H^\lambda(v) \leq M^2 \quad (\lambda > 0) \quad \text{ならば} \quad v \in \mathcal{H}, \quad \| v \|_{\mathcal{H}} \leq M$$

であることがわかる. $\mathcal{H} = \mathcal{H} \cap L^2$ として $v = |u|$

とすると

$$H^\lambda(|u|) = \lambda (|u| - \lambda R_\lambda |u|, |u|)_{L^2}$$

$$\leq \lambda (u, u)_{L^2} - \lambda^2 (R_\lambda u, u)_{L^2}$$

$$= H^\lambda(u) = \lambda (R_\lambda u, u)_{\mathcal{H}} \leq \| u \|_{\mathcal{H}}^2$$

従って $|u| \in \mathcal{H}$, $\| |u| \|_{\mathcal{H}} \leq \| u \|_{\mathcal{H}}$. 一般に u について $\mathcal{H} \cap L^2$ の元で近似すればいい.

$$(10) \Rightarrow (9)': \quad u \in \mathcal{H} \cup L^2, \quad u \geq 0 \quad \text{とすると} \quad R_\lambda u \in \mathcal{H}$$

だから $|R_\lambda u| \in \mathcal{H}$, $\| |R_\lambda u| \|_{\mathcal{H}} \leq \| R_\lambda u \|_{\mathcal{H}}$. 従って

$$F(|R_\lambda u|) = \| |R_\lambda u| \|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^{-1} \| \lambda |R_\lambda u| - u \|_{L^2}^2$$

$$\leq \|R_\lambda u\|_H^2 + \lambda^{-1} \|\lambda R_\lambda u - u\|_{L^2}^2 = F(R_\lambda u)$$

命題 2 によって $|R_\lambda u| = R_\lambda u$ 、すなわち $R_\lambda u \geq 0$.

注意 (9) は $R_\lambda \geq 0$ on B と $\|\cdot\|$.

次の命題 6 は CARTAN-DENY のよく知られた論法 (例えば [3] 参照) で証明される. 条件 (5) は使わない.

命題 6. (10) が成立すれば V は domination principle をみたす.

= 9 逆

命題 6'. V が domination principle をみたせば (10) が成立する.
は次の命題から導ける.

命題 7. V が domination principle と (5) をみたせば

$$(11) \quad u \in \mathcal{H}_a \Rightarrow |u| \in \mathcal{H}_a, \quad \| |u| \|_a \leq \|u\|_a$$

ただし a は正の定数, $\mathcal{H}_a$ は $\{ \nabla_a f = \nabla f + a f; f \in B \}$ のノルム $\| \nabla_a f \|_a^2 = \int \nabla_a f \cdot f \, d\mathbb{Z}$ による完備化である. 勿論本質的線形作用素 ∇_a は §2 の 4 条件をみたす.

命題 7 から命題 6' が導けることを見るために $f \in B$ と

$$L(\nabla g) = \int |\nabla f| g \, d\mathbb{Z} \quad \forall g \in B$$

$$\begin{aligned} \text{とすると} \quad L(\nabla g) &= \lim_{a \downarrow 0} \int |\nabla_a f| g \, d\mathbb{Z} \\ &= \lim_{a \downarrow 0} (|\nabla_a f|, \nabla_a g)_a \end{aligned}$$

だから $|L(\nabla g)| \leq \lim_{a \downarrow 0} \|\nabla_a f\|_a \|\nabla_a g\|_a$
 $\leq \lim_{a \downarrow 0} \|\nabla_a f\|_a \|\nabla_a g\|_a = \|\nabla f\|_H \|\nabla g\|_H$
 = したがって $\|\nabla f\| \in \mathcal{H}$, $\|\nabla f\|_H \leq \|\nabla f\|_H$ が得られる. 一般の
 $u \in \mathcal{H}$ については $\{\nabla f_n\}$ $f_n \in \mathcal{B}$ が u に近似すればいい.

以下 domination principle と (5) を仮定して命題 7 の証明の
 概要をのべる. これは [Itô [5]] を修正したものである.

補題 2. P_a を $\mathcal{H}_a$ の純粋テンソル集合、すなわち
 $\{\nabla_a f; f \in \mathcal{B}^+\}$ の $\|\cdot\|_a$ による閉包とすると

$$u \in P_a \Rightarrow \exists f \in L^2 \cap \Sigma_a^+ \text{ s.t. } u = \nabla_a f$$

補題 3. ∇_a は次の domination principle を満たす:

$$f \in L^2 \cap \Sigma_a^+, g \in \mathcal{B}^+, \nabla_a f(x) \leq \nabla_a g(x) \text{ on } \{x; f(x) > 0\}$$

$$\Rightarrow \nabla_a f \leq \nabla_a g$$

補題 4. $f_1, f_2 \in \mathcal{B}^+$ とすると $\exists f \in L^2 \cap \Sigma_a^+$ s.t.
 $\nabla_a f = \inf \{ \nabla_a f_1, \nabla_a f_2 \}$

実際、右辺の函数を w とし、 $u = \nabla_a f$ が P_a を動くときの
 $I(u) = \|u\|_a^2 - 2 \int w f d\mathbb{P}$ の inf を与える最適テンソル
 を $u = \nabla_a f$ とすると

$$\nabla_a f \geq w, \quad \nabla_a f(x) = w(x) \text{ on } \{x; f(x) > 0\}.$$

従って補題 3 の domination principle によって $\nabla_a f = w$ を
 得る. u の存在は $u_n = \nabla_a f_n \in P_a$, $I(u_n) \downarrow \inf I(u)$

とすると $\{u_n\}$ が Cauchy 列になるから $u_n \rightarrow \exists u$ (強) in $\mathcal{H}_a$
 $u = \nabla_a f \in \mathcal{P}_a$. $\mathcal{H} \cap L^2$ が $\mathcal{H}$ に dense, 従って $\mathcal{H}_a \cap L^2$ が
 $\mathcal{H}_a$ に dense だから f_n の可測集合 e への制限 $f_{n,e}$ のポテン
 シヤル $\nabla_a f_{n,e}$ は f の e への制限 f_e のポテンシヤル $\nabla_a f_e$
 へ弱収束する. これから $\int w f_n d\mathbb{Z} \rightarrow \int w f d\mathbb{Z}$ が導かれ
 $I(u_n) \downarrow I(u)$. すなわち u が $\inf I(u)$ を与える.

注意 上の補題 2 および 4 では条件 (5) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$
 が本質的である, not dense なら反例がある.

補題 5. $f \in L^2 \cap \Sigma_a$, $\forall_a f \geq 0$ ならば $\{x; \nabla_a f(x) = 0\}$
 上 ($\mathbb{Z}$ -測度 0 を除いて) $f \leq 0$.

実際, compact K が存在して $\mathbb{Z}(K) > 0$, $K \perp f > 0$ かつ
 $\nabla_a f = 0$ と $\mathbb{Z}$ 値を導くことができる. $\mathcal{P}_a(C_K)$ は $\{\nabla_a h;$
 $h \in \mathcal{B}^+, \text{ support of } h \subset C_K\}$ の閉包, $g = K$ の特性函数
 $\mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}$, $\nabla_a g$ の $\mathcal{P}_a(C_K)$ への射影を u' とすると

$$\exists g' \in L^2 \cap \Sigma_a^+ \ni g' = 0 \text{ on } K$$

$$u' = \nabla_a g', \quad \nabla_a g(x) = \nabla_a g'(x) \text{ on } \{x; g(x) > 0\}.$$

従って domination principle による $\nabla_a g' \leq \nabla_a g$. 更に
 $g \neq g'$ だから $\nabla_a g' \neq \nabla_a g$ on K . 故に

$$\begin{aligned} 0 &< \int (\nabla_a g - \nabla_a g') f d\mathbb{Z} = (\nabla_a f, \nabla_a g - \nabla_a g')_a \\ &= \int \nabla_a f (g - g') d\mathbb{Z} = - \int_{C_K} \nabla_a f \cdot g' d\mathbb{Z} \leq 0. \end{aligned}$$

注意 補題 5 は HUNT のポテンシヤル論の positive maximum

principle の弱形式と与えることが出来る。

さて命題 7 を証明するため、 $f_1, f_2 \in B^+$, $\nabla_a f = \inf \{ \nabla_a f_1, \nabla_a f_2 \}$ $f \in L^2 \cap \Sigma_a^+$ とすると

$$|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2| = \nabla_a f_1 + \nabla_a f_2 - 2\nabla_a f \in \mathcal{H}_a$$

$$\begin{aligned} \|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2\|_a^2 &= \|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2\|_a^2 + 4(\nabla_a f_1 - \nabla_a f, \nabla_a f_2 - \nabla_a f)_a \\ &= 2 \text{ 右辺第 2 項は補題 5 によつて } \leq 0 \text{ である} \end{aligned}$$

$$\|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2\|_a^2 \leq \|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2\|_a^2.$$

一般の $u \in \mathcal{H}_a$ についで $u \in \{\nabla_a f_1^{(n)} - \nabla_a f_2^{(n)}\}$ $f_1^{(n)}, f_2^{(n)} \in B^+$ で近似すればいい。

以上をまとめると

定理 1. $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

$$\text{domination principle} \iff R_\lambda \geq 0 \quad \forall \lambda > 0$$

系 [6] $R_\lambda \geq 0$ かつ $\nabla f = \lim_{\lambda \downarrow 0} R_\lambda f$ for $\forall f \in B$ ならば

∇ は次の majoration principle を満たす

$$(12) \quad f, g \in B^+, \quad \nabla_a f(x) \leq \nabla_a g(x) \text{ on } \{x; f(x) > 0\} \quad (a > 0)$$

$$\Rightarrow \nabla_a f \leq \nabla_a g$$

実際、命題 4 と定理 1 によつて ∇ の domination principle を満たすことが出来る。

注意. $\forall$ or majoration principle と条件 (5) をみたせば、実は $\forall$ は domination principle をみたす。補題 5 の証明で α べに純ポテンシャルの適当な集合への射影 — $\forall \alpha = 1$ に関する掃散ポテンシャル — を使えば証明できる。

§ 4. complete maximum principle

定義. $\forall$ が complete maximum principle をみたすとは $f, g \in \mathcal{B}^+$, $\alpha \geq 0$, $\forall f(x) \leq \forall g(x) + \alpha$ on $\{x; f(x) > 0\}$
 $\Rightarrow \forall f \leq \forall g + \alpha$

定理 2 $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

complete maximum principle $\Leftrightarrow \lambda R_\lambda$ は positive submarkov
for $\forall \lambda > 0$

== λ positive submarkov とは $0 \leq f \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \lambda R_\lambda f \leq 1$.

定理 2 は命題 (10) の代りに次の (10)' を仲介して定理 1 と同様に証明できる。

$$(10)' \quad u \in \mathcal{H}, \alpha \geq 0 \Rightarrow u_\alpha = \sup \{ \inf \{ u, \alpha \}, 0 \} \in \mathcal{H}$$

$$\|u_\alpha\|_H \leq \|u\|_H$$

系. $\forall$ が domination principle と条件 (5) をみたせば

$$(13) \quad \exists h_n \in \mathcal{B}^+ \nearrow 1$$

ならば、 ∇ は complete maximum principle を満たす。

実際、 $f \in B^+$ $0 \leq f \leq 1$ が与えられたとき

$$f_n = \inf \{ \nabla h_n, f \}$$

とおくと $R_\lambda f_n \uparrow R_\lambda f$ であるから

$$\begin{aligned} \lambda R_\lambda f &= \lim \lambda R_\lambda f_n \leq \lim \lambda R_\lambda \nabla h_n \\ &= \lim (\nabla h_n - R_\lambda h_n) \leq \lim \nabla h_n = 1 \end{aligned}$$

最後に条件 (5) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ について:

次の2条件が満たされる(5)が成立する。

(4)' $\forall K$ compact には12定数 B_K が存在して

$$\int_K |\nabla f|^2 d\xi \leq B_K \|\nabla f\|^2 \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{B}$$

(14) $g_n \in \mathcal{B}$, $\|\nabla g_n\| \leq M < \infty$, g_n の support $\rightarrow$ 無限遠点

$$\Rightarrow (\nabla f, \nabla g_n) \rightarrow 0 \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{B}$$

§5. Poisson 方程式

この§では $\forall f \in \mathcal{B}$ について

$$(15) \quad A \nabla f = -f$$

となる linear operator A の存在について示す。 A が存在すれば $\nabla f = 0$ から $f = 0$ 、すなわち一意の原理が通る。そこでまず一意の原理を調べる。

命題 8.

i) 条件 (6), $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in L^2 , がみたされれば R_λ は一意の原理: $f \in L^2, R_\lambda f = 0 \Rightarrow f = 0$ をみたす.

ii) $R_\lambda \geq 0$ ならば 逆も正しい.

証明. i) $R_\lambda f = 0$ とすると命題 3 (i) によって

$$(f, v)_{L^2} = 0 \quad \text{for } \forall v \in \mathcal{H} \cap L^2 \quad \therefore f = 0.$$

ii) $f \in (\mathcal{H} \cap L^2)^\perp$ とすると $(R_\lambda f, v)_H = 0$ for $\forall v \in \mathcal{H} \cap L^2$. 是れと次の補題 6 によって $(R_\lambda f, v)_\lambda = 0$ for $\forall v \in \mathcal{H}_\lambda$. 従って $v = R_\lambda h, h \in \mathcal{B}$ とし $R_\lambda f = 0$ を得るから $f = 0$.

補題 6. $R_\lambda \geq 0$ とする. $\mathcal{H}_\lambda$ を $\{R_\lambda h; h \in \mathcal{B}\}$ のノルム $\|R_\lambda h\|_\lambda^2 = \int R_\lambda h \cdot h \, d\zeta$ による完備化とすると

$$i) \quad \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H} \cap L^2$$

$$ii) \quad (u, v)_\lambda = (u, v)_H + \lambda (u, v)_{L^2}, \quad u, v \in \mathcal{H}_\lambda$$

すなわち、ポテンシャル作用素として R_λ が §2 の 4 条件をみたし、従ってヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda$ が作られるが、その元は $\mathcal{H} \cap L^2$ と一致し、 $\mathcal{H}_\lambda$ の内積は ii) で与えられるのである. $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H} \cap L^2$ は容易にわかる. 逆の包含関係は次の補題を使って証明される.

補題 7. $f \in L^2$ に対し

$$H_\lambda^\mu(f) = \mu (f - \mu R_{\lambda+\mu} f, f)_{L^2} \quad \mu > 0$$

とあると

i) $H_\lambda^\mu(f)$ は μ の増加函数

ii) $f \in \mathcal{H}_\lambda \cap L^2 \Rightarrow H_\lambda^\mu(f) \nearrow \|f\|_\lambda^2$ as $\mu \uparrow \infty$

iii) $H_\lambda^\mu(f) \leq M < \infty \quad \forall \mu > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{H}_\lambda$

∇ の一意の原理について

命題 9. $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

(6) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $L^2 \Rightarrow \nabla$ は一意の原理をみたす:

$$f \in \Sigma, \nabla f = 0 \Rightarrow f = 0$$

$R_\lambda \geq 0$ である、この逆、一意の原理から (6) が導かれる、
はわからない。

定理 3. ∇ が条件 (5) (6) をみたせば $\mathcal{D}(A) \subset L^2$ なる
 L^2 への closed linear operator A が存在して

$$A \nabla f = -f \quad \forall f \in \mathcal{B}, \nabla f \in L^2$$

実際、命題 8 より R_λ^{-1} が存在し、resolvent equation によつて
 $A = \lambda I - R_\lambda^{-1}$ が定まる。そこで

$$\begin{aligned} I(\lambda \nabla + I) &= (\lambda I - A) R_\lambda (\lambda \nabla + I) \\ &= (\lambda I - A) \nabla \end{aligned}$$

から A が定める closed linear operator であることがわかる。

参考文献

- [1] N. ARONSZAJN - K. T. SMITH : A characterization of positive reproducing kernel, Amer. J. Math., 79 (1957), 611-622
- [2] A. BEURLING - J. DENY : Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 45 (1959), 208-215.
- [3] J. DENY : Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier, 15 (1965), 259-272.
- [4] G. A. HUNT : Markoff process and potentials II, Ill. J. Math., 1 (1957), 316-369.
- [5] M. ITÔ : Note sur contractions et principes du maximum, Osaka J. Math., 4 (1967), 217-226
- [6] K. YOSIDA : Positive resolvents and potentials, Z. Wahrs. verw. Geb., 8 (1967), 210-218.