

多重ソリトン解の直接的構成法と、時空二次元
の古奥場のモデルの場の方程式の準周期解の構
成について

阪大 理 伊達悦朗

このノートでは、散乱の逆問題の方法 (Inverse Scattering Method) で解ける非線型方程式の多重ソリトン解を求めよ
うな直接的な方法と、時空二次元の古奥場のモデルの場の方
程式の準周期解の構成について述べる。

初めに、この二つの話題の背景について述べる。

散乱の逆問題の方法で解ける非線型方程式のうちの典型的
なクラスは、いわゆる Zakharov-Shabat 方程式 [18], つまり、
二つの線型微分作用素 $L = \sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}$, $M = \sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}$
 $u_j, v_k: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて、

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0$$

の形に表わされる u_j, v_k に関する非線型方程式である。例
えば、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式, Boussinesq 方程式,
二次元 KdV (Kadomtsev-Petviashvili) 方程式等がこのクラス
に含まれる。

Krichever [6,7,8] は、Riemann 面の理論を用いて Zakharov-Shabat 方程式の準周期解を構成した。その方法の概略は次のとおりである。まず、Riemann 面上の与えられた g 個（行列の size に対応）の点で与えられた g 形の essential singularity（作用素 L, M の order に対応）を持つ関数を用いて abel 積分の理論を用いて構成する。次に、その関数が満たす二つの線型微分方程式

を決定する。これにより

Zakharov-Shabat 方程式の準周期解が得られ、同時にその解の theta 関数による表示が得られる。

一方で Novikov [14] による KdV 方程式の周期解に関する結果から、多重ソリトン解は、(準)周期解の、対応する Riemann 面の退化に伴う、極限と考えられ、実際に KdV 方程式の場合には、そのような計算も行われている。従って、特異点（二重点）を持つ有理曲線上で、Krichever の方法にならった構成を行えば、多重ソリトン解の簡単な直接的構成が得られると期待される。その方向での結果としては、Krichever [8] による、定常版の Zakharov-Shabat 方程式の場合の“準周期解を背景とした多重ソリトン解”（ $|x| \rightarrow \infty$ のとき準周期解と見なせるような解）の代数幾何学的な構成、B. W. Manin [12] による、二重点を持つ有理曲線上の異なる種 g の vector

bundle (そのおけるべき性質は、Krichever の構成を代数幾何学的に公理化したもので、その方向での最初の研究が Drinfeld [3] によりなされたことより、Manin は Krichever-Drinfeld bimodule と呼んでいる) の構成がある。

Manin の構成は、Zakharov-Shabat 方程式の多重ソリトン解の構成に対応するものではあるが、そこで構成されているものが、既に散乱の逆問題の方法で構成されている多重ソリトン解と同一のものであることを示すには、その構成をより具体化する必要がある。この具体化がこのノートのものである。

Krichever-Manin の構成をより具体的にこなすもう一つの目的は、一応は散乱の逆問題の枠組に入り、述べているものの、(つまり、二つの群作用素の commutativity として書かれてはいるものの、その係数にパラメータ λ の有理関数が含まれていたりするために) 散乱理論を構成することの複雑となつてしまっている方程式の多重ソリトン解を求めの簡単な方法への足がかりとしてである。これらの方程式としては、例えば、Pohlmeyer, Lund-Regge のモデルの方程式、massive Thirring model の方程式等がある。

このノートの手前では、Zakharov-Shabat 方程式の多重ソリトン解を Krichever の方法に対応する形で初等的に構成し、

更に、Zakharov-Shabat 方程式の種組には λ が存在しと考えられ、sine-Gordon 方程式は u の多重ソリトン解を持つ非線形偏微分方程式の典型である戸田格子の方程式に対しても同様の方法で多重ソリトン解を構成する。そして得られる解が、散乱の逆問題の方法で得られている解と同一であることを示す。

続いて、後半で対象とする方程式は、 $A(x, z), B(x, z) \in N \times N$ 行列とすると、

$$\left[i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{A}{\lambda+1}, i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B}{\lambda-1} \right] = 0$$

の形に表わされるクラスがある。このクラスは、Zakharov-Mikhailov [17] により、提議された F も q で、 $iA, iB \in \mathcal{O}(2)$ は $\mathcal{O}(2, \mathbb{R})$ の制限を課すことにより、Pohlmeyer-Lund-Regge のモデルの方程式、又は sine-Gordon 方程式が得られる。

Zakharov と Mikhailov は N -ソリトン解が与えられた時に、 $(N+1)$ -ソリトン解を構成する方法を与えている。

ここでは、 A, B に制限を課さない場合の、上の方程式の準周期解を構成する。構成は Krichever [7,8] の方法と類似の方法でできる。 A, B に制限を課した場合にも、ここで述べた方法で、更に精密化する必要があるようである。

I. 多重ソリトン解の直接的構成法

1. 同時解の構成

Zakharov-Shabat 方程式, sine-Gordon 方程式, 戸田格子の方程式のいずれも, 二つの線型作用素が可換という形で表わされる.

i) Zakharov-Shabat 方程式 [18] (簡単のためスカラー作用素の場合を扱う, $l=1$).

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - L, \frac{\partial}{\partial t} - M \right] = 0$$

$$L = \sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad M = \sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad u_m, u_{m+1}, v_n, v_{n+1}: \text{定数}$$

ii) sine-Gordon 方程式 [1], [6]

$$u_{xy} + \sin u = 0$$

この方程式は次の二つの線型微分方程式の compatibility condition である.

$$L\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{i\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} u_T & 0 \\ 0 & -u_T \end{bmatrix} \Phi = 0$$

$$M\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} - \frac{i}{2\lambda} \begin{bmatrix} 0 & \exp(iu) \\ \exp(-iu) & 0 \end{bmatrix} \Phi = 0 \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

iii) 戸田格子の方程式 [4], [11]

$$\partial Q_n / \partial t = P_n, \quad \partial P_n / \partial t = \exp(Q_{n+1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1}) \quad n \in \mathbb{Z}$$

ある u は

$$a_n = \frac{1}{4} \exp\{(Q_{n+1} - Q_n)/4\}, \quad b_n = -\frac{1}{2} P_{n-1}$$

と書くことにする。

$$\partial a_n / \partial t = 2a_n(b_{n+1} - b_n), \quad \partial b_n / \partial t = 2a_n(a_n - a_{n-1}).$$

この方程式は、次の二つの非線形微分方程式の compatibility condition である。

$$L\Phi = (\lambda + \lambda^{-1})\Phi, \quad M\Phi = \partial\Phi/\partial t \quad \Phi = \{\Phi(n)\}$$

$$(L\Phi)(n) = \Phi(n+1) + b_n\Phi(n) + a_{n-1}\Phi(n-1)$$

$$(M\Phi)(n) = \Phi(n+1) + b_n\Phi(n) - a_{n-1}\Phi(n-1).$$

これら二つの線形方程式の同時解となるべき関数三要素は $x - t - \lambda$ の関数として、次の簡単な特徴付けにより構成される。

N は任意の自然数、 $x_1, \dots, x_N, \beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{C}$ に相異なる複素数、 $c_1, \dots, c_N$ は任意の複素数とする。それぞれこの方程式に対応して、次の形の関数を考える。

$$(a.1) \quad \Phi(x, y, t, \lambda) = (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(x, y, t) \lambda^j) \exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$$

ここで $\lambda \neq 0$ かつ $x - t - \lambda$ 。 $P(\lambda) = \sum_{j=0}^m p_j \lambda^j$, $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^n q_j \lambda^j$ は任意の定数係数の多項式。

$$(a.2) \quad \Phi_n(x, y, \lambda) = (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{nj}(x, y) \lambda^j) \exp(\lambda x + \lambda^{-1}y) \quad n=1, 2$$

$$(a.3) \quad \Phi_n(t, \lambda) = \lambda^n (\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{nj}(t) \lambda^j) \exp\{t(\lambda - \lambda^{-1})\} \quad n \in \mathbb{Z}$$

この形の関数に対し、次の条件を課す。この条件は、

Zakharov-Shabat 方程式の場合、二重点を接する有理曲線上での

構成に対応している。

$$(b.1) \quad \Phi(x, y, t, \alpha_j) = C_j \Phi(x, y, t, \beta_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

$$(b.2) \quad \Phi_n(\xi, \eta, \alpha_j) = (-1)^{n-1} C_j \Phi_n(\xi, \eta, \beta_j) \quad \beta_j = -\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad n=1, 2$$

$$(b.3) \quad \Phi_n(t, \alpha_j) = C_j \Phi_n(t, \beta_j) \quad \beta_j = \alpha_j^{-1}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1. 条件 (b.1) (resp. (b.2), (b.3)) による関数 $\Phi(x, y, t, \lambda)$ (resp. $\Phi_n(\xi, \eta, \lambda)$, $\Phi_n(t, \lambda)$) は一意的に決定される。

証明. いずれの場合も同様である。Zakharov-Shabat 方程式の場合について示す。

条件 (b.1) は未知数 $\Phi_j(x, y, t)$ $0 \leq j \leq N-1$ に対する次の連立一次方程式と同値である。

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_k^k e(\alpha_k) - C_j \beta_k^k e(\beta_k)) \Phi_k = -\alpha_j^N e(\alpha_j) + C_j \beta_j^N e(\beta_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

$$e(\lambda) = \exp(\lambda x + P(\lambda) y + Q(\lambda) t)$$

この連立一次方程式の係数行列は、 (x, y, t) の関数

$$f_j(x) = \exp(\alpha_j x + P(\alpha_j) y + Q(\alpha_j) t) - C_j \exp(\beta_j x + P(\beta_j) y + Q(\beta_j) t)$$

の wronski 行列である。関数 f_j は一次独立であり、 x の解析関数であるから、その行列式、つまり、関数 f_j の wronskian は恒等的に非零とはならない。従って Φ_j が一意的に決定され、 $\Phi(x, y, t, \lambda)$ も一意的に定まる。証明終。

Proposition 2. i) 関数 $\Phi(x, y, t, \lambda)$ は次の方程式を満たす

$$\sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial y$$

$$\sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial t$$

ここで、係数 u_j, v_j は ϕ_j, p_j, q_j によって一意に定まる。

ii) 関数 $\Phi(x, y, \lambda) = \tau(\Phi_1(x, y, \lambda), \Phi_2(x, y, \lambda))$ は $u = -i \log(\phi_{1,0}/\phi_{2,0})$

を係数にもつ ii) の作用素 L, M の同時解である。

iii) $\Phi(t, \lambda) = \{\Phi_n(t, \lambda)\}$ は $a_n = \phi_{n+1,0}/\phi_{n,0}, b_n = \phi_{n,N-1} - \phi_{n+1,N-1}$

を係数にもつ iii) の作用素 L, M に対して

$$L\Phi = (\lambda + \lambda^{-1})\Phi, \quad M\Phi = \partial \Phi / \partial t$$

を満たす。

証明. Zakharov-Shabat 方程式について示す。 $u_j(x, y, t)$ は

$$\sum_{j=0}^m u_j \sum_{k=0}^j c_k \partial^{j-k} \phi_{N-k+1} / \partial x^{j-k} = \sum_{j=0}^m \phi_{N-j+1} p_j, \quad k=0, \dots, m$$

なる連立一次方程式によって決まる。これは連立一次方程式の係数行列は対角成分が 1 の三角行列であるから、 u_j は一意に決定される。

また、 v_j は q_j によって一意に決定される。

すなわち、

$$F(x, y, t, \lambda) = \sum_{j=0}^m u_j \partial^j \Phi / \partial x^j - \partial \Phi / \partial y$$

とすれば、 F は

$$F(x, y, t, \lambda) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j(x, y, t) \lambda^j \right) \exp(\lambda x + P(\lambda)y + Q(\lambda)t)$$

の形であることがわかる。更に F は

$$F(x, y, t, \alpha_j) = c_j F(x, y, t, \beta_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

なる関係式をみたしていることより, Prop. 1 の証明と同様に
して, 今度は $f_j = 0$ により $F \equiv 0$ が得られる。

従って, 更には α のように定めた u_j に対して

$$\sum_{j=0}^m u_j \partial^j \Phi / \partial x^j = \partial \Phi / \partial y$$

をみたす。もう一方の方程式についても同様。 証明終

注意. $P(\alpha_j) = P(\beta_j)$ $1 \leq j \leq N$ なる関係式が成立している
場合, (*) より Φ_j は y に依存しないことになり, 従って $\alpha =$
 α とし u_j, v_j も y に依存する

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m u_j(x, t) \partial^j \tilde{\Phi} / \partial x^j &= P(\lambda) \tilde{\Phi} & \tilde{\Phi}(x, t, \lambda) &= \Phi(x, y, t) e^{-y P(\lambda)} \\ \sum_{j=0}^n v_j(x, t) \partial^j \tilde{\Phi} / \partial x^j &= \partial \tilde{\Phi} / \partial t \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上のことから, (λ はパラメータとして Φ に含まれ
ている) $\Rightarrow$ の非線形方程式の compatibility condition として

定理. 上で構成した, $u_j(x, y, t), v_j(x, y, t), a_n(t), b_n(t)$ はそ
れぞれ, Zakharov-Shabat 方程式, sine-Gordon 方程式,
戸田格子の方程式の解である。

2. 解の表示

二次の KdV 方程式を例にとり、上で得た解が、常微分方程式の問題の方法で得られている多重ソリトン解と同一であることを示す。

この場合、 $P(\lambda) = \lambda^2$, $Q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda$ $a \in \mathbb{C}$ と仮定して計算すれば、

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, y, t), \quad M = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{3}{2}u(x, y, t) + a\right)\frac{\partial}{\partial x} + v(x, y, t)$$

$$u = -2\partial\phi_{N-1}/\partial x, \quad v = -\partial^2\phi_{N-1}/\partial x^2 + 3\phi_{N-1}\partial\phi_{N-1}/\partial x - 3\partial\phi_{N-2}/\partial x$$

となり、非線形方程式は

$$3(u_y + u_{xx}) = 4v_x$$

$$v_y - u_t = v_{xx} - u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x - au_x$$

あるいは v を消去して

$$3u_{yy} - 4u_{xt} + u_{xxxx} + 6(uu_x)_x + 4au_{xx} = 0$$

となる。この方程式が二次の KdV 方程式である。

準一次方程式 (*) を解くことにする

$$\phi_{N-1} = -\frac{\det(f, f', \dots, f^{(N-2)}, f^{(N)})}{\det(f, f', \dots, f^{(N-1)})} = -\frac{\partial}{\partial x} \log \det(f, f', \dots, f^{(N-1)})$$

$$f = {}^t(f_1, \dots, f_N)$$

である。従って、

$$u = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \log \det(f, f', \dots, f^{(N-1)})$$

が二次の KdV 方程式の解である。この表示式は wronskian

の対数微分という形である。一方、散乱の逆問題の方法で得られている解は、Gram 行列式の対数微分という形で表わされている。以下でその変形をみる。

まず

$$\det(f, f', \dots, f^{(N-1)}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^N (\alpha_k x + P(\alpha_k) y + Q(\alpha_k) t)\right\} \times \\ \times \det\left[\alpha_i^{k-1} - c_i \beta_i^{k-1} \exp\{(\beta_i - \alpha_i)x + (P(\beta_i) - P(\alpha_i))y + (Q(\beta_i) - Q(\alpha_i))t\}\right]$$

と変形する。ここで、行列 (α_i^{k-1}) の逆行列を δ_{jk} とし

$$= \exp\left\{ \dots \det(\alpha_i^{k-1}) \det((\alpha_i^{k-1})^{-1} (\alpha_i^{k-1} - c_i \beta_i^{k-1} \exp(\dots))) \right\} \\ = \exp\left\{ \dots \prod_{a>b} (\alpha_a - \alpha_b) \det\left(\delta_{jk} - c_j \frac{\prod_{l \neq k} (\beta_l - \alpha_l)}{\prod_{l \neq k} (\alpha_l - \alpha_l)} \exp(\dots)\right) \right\}$$

とすると、 $g(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \alpha_j)$ $\dot{g} = dg/d\lambda$ とすれば

$$= \exp\left\{ \dots \prod_{a>b} (\alpha_a - \alpha_b) \det\left(\delta_{jk} - \frac{c_j}{\beta_j - \alpha_k} \frac{g(\beta_j)}{\dot{g}(\alpha_k)} \exp(\dots)\right) \right\}$$

となる。対数をとると、 $u = \log \det$ とする

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \det\left(\delta_{jk} - \frac{c_j}{\beta_j - \alpha_k} \frac{g(\beta_j)}{\dot{g}(\alpha_k)} \exp\{(\beta_j - \alpha_j)x + (\beta_j^2 - \alpha_j^2)y + (\beta_j^3 - \alpha_j^3)t + a(\beta_j - \alpha_j)t\}\right)$$

となる。この式は Gram 行列式の形に直すのは容易である。

II. 時空二次元の古典場のモデルの場の方程式の非同期解の構成.

1. Zakharov - Mikhailov の定式化

Zakharov - Mikhailov [17] は、時空二次元の古典場のモデルの場の方程式のクラスとして、次の形のものを選び出した。

$U(z, \lambda), V(z, \lambda) \in N \times N$ 行列で、その成分は、複素パラメータ λ の関数として有理関数で、その極は (z, λ) に依存しないとす。その時

$$[i\partial/\partial z - U, i\partial/\partial \bar{z} - V] = 0 \quad (1)$$

の形に表いされる方程式系を考える。このクラスには、現在までに知られている時空二次元の古典場のモデルの方程式はすべて含まれる。(その例について後で触れる。)

この方程式系には次の不定性がある。 U, V を方程式系 (1) の解とし、 Ψ を線型方程式

$$i\partial\Psi/\partial z = U\Psi, \quad i\partial\Psi/\partial \bar{z} = V\Psi$$

(= 元の線型方程式の compatibility condition が方程式系 (1) である。) の同時解とする。 $f(z, \lambda)$ を任意の non-singular な行列とし、

$$\tilde{U} = fUf^{-1} + if_z f^{-1}, \quad \tilde{V} = fVf^{-1} + if_{\bar{z}} f^{-1} \quad (2)$$

$$\tilde{\Psi} = f\Psi$$

とおけば、 $\tilde{U}, \tilde{V}$ の極は U, V の極と一致し、更に $\tilde{\Psi}$ は線型

方程式

$$i\partial\tilde{\Psi}/\partial\tau = \tilde{U}\tilde{\Psi}, \quad i\partial\tilde{\Psi}/\partial z = \tilde{V}\tilde{\Psi}$$

を入れる。つまり $\tilde{U}, \tilde{V}$ も方程式系(1)の解である。従って、方程式系(1)の解には、任意関数の不定性が残る。そこで、 f を指定するとは、gauge を指定するといひ、 f の種々の選び方に応じて得られる方程式系と互いに gauge equivalent であるといひ、変換(2)を gauge 変換と呼ぶ。

上の方程式系(1)の例として、 U が $\lambda = -1$ に唯一つの一位の極を持つ、 V が $\lambda = 1$ に唯一つの一位の極を持つ場合を考える。

$$\therefore U = U_0 + \frac{U_1}{\lambda+1}, \quad V = V_0 + \frac{V_1}{\lambda-1}$$

この時、方程式系(1)は

$$U_{0\tau} - V_{0z} - i[U_0, V_0] = 0 \quad (3)$$

$$U_{1\tau} - i[U_1, V_0 - \frac{1}{2}V_1] = 0$$

$$V_{1z} - i[V_1, U_0 + \frac{1}{2}U_1] = 0$$

となる。 f を

$$U_0 = -if^{-1}f_z, \quad V_0 = -if^{-1}f_{\bar{z}}$$

のように選ぶ。(方程式(3)はこれらの特殊方程式の

compatibility condition である)。この時、 f により gauge 変換を行なえば、特殊方程式

$$i\partial\Psi/\partial\tau = \frac{A}{\lambda+1}\Psi, \quad i\partial\Psi/\partial z = -\frac{B}{\lambda-1}\Psi$$

$$A = fU_1f^{-1}, \quad B = -fV_1f^{-1}$$

と compatibility condition の非線型方程式

$$A_2 = \frac{i}{2} [A, B], \quad B_3 = -\frac{i}{2} [A, B] \quad (4)$$

が得られる。

方程式 (4) より、 A の Jordan 標準形 A_0 は z に依らず、 B の Jordan 標準形 B_0 は z に依らないことがわかる。行列 A を標準化する行列 g とする： $A_0 = A_0(z) = g A g^{-1}$

g により、gauge 多様体 Σ 上の z による非線型方程式

$$i\Psi_3 + C\Psi + \frac{z}{2} A_0 \Psi = 0 \quad C = -\frac{1}{2} A_0 - i g_3 g^{-1}$$

$$i\Psi_2 + S\Psi + \frac{1}{2z} \Gamma \Psi = 0 \quad S = -i g_2 g^{-1} - \frac{1}{2} g B g^{-1}, \Gamma = g B g^{-1}$$

$$z = (1-i)/(1+i)$$

と compatibility condition の非線型方程式

$$-C_2 + S_3 - i[C, S] - \frac{i}{4} [A_0, \Gamma] = 0 \quad (5)$$

$$A_{02} + \frac{i}{2} [A_0, S] = 0 \quad (6)$$

$$\Gamma_3 + i[\Gamma, C] = 0$$

が得られる。

$z = z^*$ 、更に A_0 が対角行列で、対角成分が互いに相異なることがあれば、方程式 (6) より、 S も対角行列であることがわかる。 z の時 $C = C_1 + C_2$ 、 C_2 : 対角行列 と表わし、方程式 (5) の対角成分を考えると、

$$C_{12} = S_3$$

とあることがわかる。従って

$$C_{11} = R_3, \quad S = R_2$$

なるような対角行列 R が存在する。

e^{-iR} により gauge 変換を行なえば、非線型方程式は

$$i\Psi_3 + Q_1\Psi + \frac{\sigma}{2}A_0\Psi = 0 \quad Q_1 = e^{-iR}C_1e^{iR}$$

$$i\Psi_2 + \frac{1}{2\sigma}Q_2\Psi = 0 \quad Q_2 = e^{-iR}C_2e^{iR}$$

となり、compatibility condition の非線型方程式は

$$Q_{12} = \frac{i}{\sigma} [Q_2, A_0], \quad Q_{23} = i [Q_1, Q_2] \quad (7)$$

となる。この方程式系は、Budagon-Takhtadzhian [2] が考察している。

この 1-ポート準周期解を考えたのは、方程式系 (4) 及び方程式系 (7) である。これらは互いに gauge equivalent である。gauge equivalence が解の構成にどのように反映するかについて、次節で触れる。

2. 準周期解の構成

初めに、方程式系 (7) の準周期解の構成を考える。

次の data $\{S, \lambda, \sigma, a_j(z), b_j(z) \mid 1 \leq j \leq N\}$ が与えられるとする。ここに

S : 種数 $g > 0$ の compact Riemann 面

λ : S 上の order N の有理型関数で、その極 $P_1, \dots, P_N$ は互いに相異なる。零点 $Q_1, \dots, Q_N$ は互いに相異なる。

$\delta = D_1 + \dots + D_{g+N-1}$: S 上 n 因子で、各 $j = 1, \dots, N$ に対し

$$z \dim \mathcal{O}(\delta - P_1 - \dots - P_j - \dots - P_N) = 1 \text{ なる } z \in a.$$

$a_j(z), b_j(\tau)$: 適当に補った関数.

である.

この data $\{S, \lambda, \delta, a_j(z), b_j(\tau)\}$ から、方程式系 (7) の準周期解を構成できることを示す.

点 P_j の local parameter とし z は $(\lambda(P))^{-1}$ 、点 Q_j の local parameter とし z は $\lambda(P)$ に固定しておく.

次の性質を持つ関数 $\Psi_j(z, \tau, P)$ ($1 \leq j \leq N$, $(z, \tau) \in \mathbb{R}^2$, $P \in \mathcal{P}$) を構成することを考える.

i) Ψ_j は $S - \{P_1, \dots, P_N, Q_1, \dots, Q_N\}$ での一価有理型で、その極因子は δ に等しい.

ii) Ψ_j は P_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \tau, P) = (\delta_{j\epsilon} + O(\lambda^{-1})) \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \int^3 a_\epsilon(\tau) d\tau\right)$$

と展開され、 Q_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \tau, P) = (O(1)) \exp\left(\frac{i}{2\lambda} \int^\tau b_\epsilon(\tau) d\tau\right)$$

と展開される.

このような性質を持つ関数 $\Psi_j(z, \tau, P)$ が存在したとすれば、

すなわち、 $d \log \Psi_j$ は S 上の Abel 微分となる. その極の様子には、

D_δ ($1 \leq k \leq g+N-1$) の留数 -1 の一位の極

$$P_k \ (1 \leq k \leq N) \text{ 是 } -\frac{i}{2\pi z} \left(\int^3 a_k(\tau) d\tau \right) dz + \delta_{jk} \frac{dz}{z} \quad z = \lambda^{-1}$$

$$Q_k \ (1 \leq k \leq N) \text{ 是 } -\frac{i}{2\lambda^2} \left(\int^2 b_k(\tau) d\tau \right) d\lambda$$

λ 形 λ 極を持つ。 abc 係数の留数の和は零であるから、更に
3 個の点 $P_{j,n}(\tau, \lambda)$ ($n=1, \dots, g$) 是留数 1 の λ 一位の極を持つ。

$P_{j,n}(\tau, \lambda)$ が N 上 λ Jacobi の逆問題の解となる、ということから
次の様にしなくてはなる。

$\alpha_j, \beta_j \ (1 \leq j \leq N)$ 是 N 上 λ canonical homology basis

$\omega_j \ (1 \leq j \leq N)$ 是正規化第一種係数の基底

$\omega(P, Q)$ 是点 P, Q 是それぞれ留数 1, -1 の λ 一位の極を持つ。正規化第二種係数。

$\omega_{P_i, 2}$ 是 P_i の λ 是 $\frac{1}{2\pi z} dz$ の λ 形 λ 極を持つ正規化第二種係数。
 $\omega_{Q_j, 2}$ 是 Q_j の λ 是 $\frac{1}{2\lambda^2} d\lambda$ の λ 形 λ 極を持つ正規化第二種係数。

とすれば、

$$d \log \Phi_j = -i \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\int^3 a_k(\tau) d\tau \right) \omega_{P_k, 2} + \left(\int^2 b_k(\tau) d\tau \right) \omega_{Q_k, 2} \right\} \\ + \sum_{k=1}^g \omega(P_{j,k}(\tau, \lambda), D_k) + \sum_{k=1}^N \omega(P_k, D_{g+k}) + \sum_{k=1}^g c_k \omega_k \quad (8)$$

$k \neq j \ (D_{g+k} = D_{g+j})$

と表わされる。

Φ_j が N 上 λ 一位であることから

$$\int_{\alpha_k} d \log \Phi_j = 2\pi i m_{jk}, \quad \int_{\beta_k} d \log \Phi_j = 2\pi i n_{jk}, \quad m_{jk}, n_{jk} \in \mathbb{Z}$$

である。この関係式を具体的に書くことにより、 $P_{j,n}(\tau, \lambda)$ は λ Jacobi の逆問題の解であることがわかる。

$$\left(\sum_{\ell=1}^g \int_{D_\ell}^{P_{j\ell}(z, \tau)} \omega_{\ell} \right) \equiv \left(i \sum_{\ell=1}^N \left\{ \left(\int_{\gamma_\ell} a_\ell(z) dz \right) U_{\ell\ell} + \left(\int_{\gamma_\ell} b_\ell(z) dz \right) V_{\ell\ell} \right\} - \sum_{\ell=1}^N \int_{D_{j\ell}}^{P_{j\ell}} \omega_{\ell} \right) \bmod \Gamma$$

$\ell \neq j \ (D_{j\ell} = D_{j\ell i})$

$$= z, \quad U_{\ell\ell} = 2\pi i \int_{P_\ell} \omega_{P_\ell, z}, \quad V_{\ell\ell} = 2\pi i \int_{P_\ell} \omega_{Q_\ell, z} \quad z \in \Gamma \text{ 上 } \exists \text{ a } \omega_j$$

に関する周期行列 A の列ベクトルで生成した $\mathbb{C}^g$ の lattice である。

逆に、 ω は Jacobi の座問題に解いて $P_{j,n}(z, \tau)$ を定め、(8) の右辺の abel 微分 χ_j を定義すれば、関数 $\exp\left(\int_{P_0}^P \chi_j\right)$ ($P \in S$) は定数倍を除いて、上に準拠した Ψ_j の性質を満たす。

次に Ψ_j の満たす微分方程式を求めよう。

$$\Psi_j(z, \tau, P) = \left(\delta_{j\ell} + \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell^{j\ell}(z, \tau) \lambda^{-\ell} \right) \exp\left(\frac{i\lambda}{2} \int_{\gamma_\ell} a_\ell(z) dz\right) \quad \text{around } P_\ell$$

$$\Psi_j(z, \tau, P) = \left(\sum_{\ell=0}^m \beta_\ell^{j\ell}(z, \tau) \lambda^\ell \right) \exp\left(\frac{i}{2\lambda} \int_{\gamma_\ell} b_\ell(z) dz\right) \quad \text{around } Q_\ell$$

とす。 $\alpha_\ell^{j\ell}, \beta_\ell^{j\ell}$ は S 上の theta 関数を用いて表示できる。

関数

$$F_j = \partial \Psi_j / \partial z - \frac{i\lambda}{2} a_j \Psi_j - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N (a_n - a_j) \alpha_j^{jn} \Psi_n$$

は、上に準拠した Ψ_j の性質を満たし、更に $P_\ell \ (1 \leq \ell \leq N)$ で零となる。従って関数 F_j / Ψ_j は $P_{j,n}(z, \tau) \ (1 \leq n \leq g)$ に極を持つ S 上の有理型関数で P_j で零となる。従って恒等的に零である。つまり、 $\Psi = \Psi(\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ とおけば、 Ψ は微分方程式

$$z \Psi_z + \frac{1}{2} [\alpha, A_0] + \frac{\lambda}{2} A_0 \Psi = 0$$

$$\alpha = (\alpha_i^{j\ell}) \quad A_0 = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$$

を満足し得る。

同様にし、 Ψ は

$$i\Psi_z + \frac{1}{2\lambda} \beta B_0 \beta^{-1} \Psi = 0 \quad \beta_0 = (\beta_0^{jk}), \quad B_0 = \text{diag}(b_1, \dots, b_N)$$

も満足す。

こうして、方程式系(7)の解を構成でき得る。

方程式系(4)を解くことは、data $\{\delta, \lambda, \delta, a_j(x), b_j(y)\}$ による、 λ に関する条件で、

$$\lambda^{-1}(-1) = \{P'_1, \dots, P'_N\}, \quad \lambda^{-1}(1) = \{Q'_1, \dots, Q'_N\}, \quad \lambda^{-1}(\infty) = \{P_1, \dots, P_N\}$$

が互いに互いに相異なるという条件に置き換える。 P'_j の local parameter とし、 $\lambda+1 \in Q'_j$ の local parameter とし、 $\lambda-1 \in P_j$ とする。

Ψ_j の性質とし、

i) $\delta = \{P_1, \dots, P_N, Q_1, \dots, Q_N\} \in \delta = \{P'_1, \dots, P'_N, Q'_1, \dots, Q'_N\}$ なる。

ii) Σ .

iii) Ψ_j は P'_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \eta, P) = (\text{regular part}) \times \exp\left(-\frac{i}{\lambda+1} \int^P a_0(x) dx\right)$$

と展開し、 Q'_j の近傍で

$$\Psi_j(z, \eta, P) = (\text{regular part}) \exp\left(\frac{i}{\lambda-1} \int^P b_0(y) dy\right)$$

と展開する、更に $\Psi_j(P_j) = \delta_j \in \Delta$ にせよ。

構成は同様にでき、 Ψ は次の様型方程式を満足する。

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = \frac{\gamma_0 A_0 \gamma_0^{-1}}{\lambda+1} \Psi, \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\varepsilon_0 B_0 \varepsilon_0^{-1}}{\lambda-1} \Psi$$

$$= z, \quad \gamma_0, \varepsilon_0 \text{ 正}$$

$$\Psi_j(z, \bar{z}, z) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{\ell}^{jk} (\lambda+1)^{\ell} \right) \exp\left(-\frac{i}{\lambda+1} \int^z a_{\ell}(z') dz'\right) \quad \text{around } P_k$$

$$\Psi_j(z, \bar{z}, z) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon_{\ell}^{jk} (\lambda-1)^{\ell} \right) \exp\left(\frac{i}{\lambda-1} \int^z b_{\ell}(z') dz'\right) \quad \text{around } Q_k$$

と $\gamma_0 \geq \varepsilon_0$,

$$\gamma_0 = (\gamma_0^{jk}), \quad \varepsilon_0 = (\varepsilon_0^{jk})$$

を定めた。

この z の方程式系 (4) の解を構成する。

3. 例

a) Pohlmeyer [15] の次元 $O(4)$ non-linear σ -model の方程式

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi + (\partial_{\mu} \phi, \partial^{\mu} \phi) \phi = 0 \quad \phi = \phi(x^0, x^1) \in S^3$$

の方程式系

$$\begin{aligned} \alpha_3 \beta_2 - \beta_3 \beta_2 \sin \frac{\alpha}{2} / 2 \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha &= 0 & \bar{z} &= \frac{1}{2}(x^0 + x^1) \\ \beta_3 \bar{z} + (\alpha_3 \beta_2 + \alpha_2 \beta_3) / \sin \alpha &= 0 & z &= \frac{1}{2}(x^0 - x^1) \end{aligned} \quad (9)$$

に帰着する。ここで $\alpha = \alpha(z, \bar{z})$ と示し、方程式系 (9) の解型方程式

$$i \varphi_3 - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\alpha_3 - i \beta_3 \tan \frac{\alpha}{2}) e^{-i\omega} \\ -(\alpha_3 + i \beta_3 \tan \frac{\alpha}{2}) e^{i\omega} & 0 \end{bmatrix} \varphi + \frac{z}{2} \varphi = 0$$

$$i\varphi_2 + \frac{1}{2z} \begin{bmatrix} \omega\alpha & -\rho\sin\alpha e^{-i\omega} \\ -\rho\sin\alpha e^{i\omega} & -\omega\alpha \end{bmatrix} \varphi = 0$$

$$\omega_3 = \beta_3 \omega\alpha / 2\omega^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \omega_2 = \beta_2 / 2\omega^2 \frac{\alpha}{2}$$

a compatibility condition τ がある $\Rightarrow \tau \neq 1$.

b) Lund-Regge [10] は 10 次元の時空 z . static な massless scalar fields と interaction z には homogeneous と relativistic string の方程式

$$x_{\tau\tau} - x_{\sigma\sigma} + 2x_\tau \times x_\sigma = 0 \quad x = x(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^3 \quad (10)$$

$$x_\tau^2 + x_\sigma^2 = 1 \quad x_\tau \cdot x_\sigma = 0$$

が (曲面 $\Lambda \equiv$ 次元 $1 - \text{クワッド空間}$ Λ の埋め込み Λ の理論を用いることにより) 方程式系

$$u_3 \tau + \rho \sin u \omega u + v_3 v_\tau \omega u / \rho \sin^3 u = 0 \quad \tau = \frac{1}{2}(\tau + \sigma) \quad (11)$$

$$v_3 \tau - (u_3 v_\tau + u_\tau v_3) / \rho \sin u \omega u = 0 \quad \tau = \frac{1}{2}(\tau - \sigma)$$

と同値であること $\Rightarrow$ 示し、方程式系 (11) が、系型方程式

$$i f_3 + u_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} f + \frac{v_3}{2\rho \sin^3 u} \begin{bmatrix} 0 & e^{2iu} \\ e^{-2iu} & 0 \end{bmatrix} f + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f = 0$$

$$i f_2 - \frac{v_2}{2\rho \sin^2 u} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f + \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} 0 & e^{2iu} \\ e^{-2iu} & 0 \end{bmatrix} f = 0$$

a compatibility condition τ がある $\Rightarrow \tau \neq 1$.

c) Getmanov [5] は 時空 = 次元 Λ complex scalar field Λ の τ に対する方程式

$$(1 - |\phi|^2) \phi_{\tau\tau} + \phi^* \phi_3 \phi_2 - \phi (1 - |\phi|^2)^2 = 0$$

を考へ、2-soliton解を求めた。(N-γ γ トとも同様にして
ると述べている。) この方程式は

$$\phi = \mu \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\beta}{2}}$$

と置くことにより、方程式系(9)に帰着する。(cf. Kulish[9],
Nevai-Papanicolaou [13]).

d) Neveu-Papanicolaou [13] は scalar contact interaction
を述べている 2個の classical massless fermion の運動方程式

$$[i\gamma - (\sigma + i\pi\gamma^5)] \psi_i = 0 \quad i=1,2$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \psi_i^* \psi_i, \quad \pi = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^2 \psi_i^* \gamma^5 \psi_i$$

が方程式系(9)に帰着することを示した。

方程式系(9)と方程式系(11)との対応は次で与えられる。

$$u = \frac{1}{2}\alpha, \quad v_x = \frac{1}{2}\beta_x \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \quad v_y = -\frac{1}{2}\beta_y \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{cf. Kulish[9]})$$

尚、 $\mathbb{R}^3$ と $\Delta U(z)$ との対応

$$(x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}$$

を用い、方程式(10)は、 $iA, iB \in \Delta U(z)$ と $\mathbb{C}$ との方程式
系(4)である。

2次元 $\mathbb{C}$ 構造を、 δ と $1-\delta$ 区間内曲線 $\mu^2 = \prod_{j=1}^{2H^2} (\lambda - \lambda_j)$

$\lambda_j \neq 0$ (or $\lambda_j \neq -1, 1$) とし、 $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

とすれば、方程式系(9)を α, β を複素数値として解(方程式
(10)を $x \in \mathbb{C}^3$ とし解)を構成できる。

References

1. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur : Method for Solving the Sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1262-1264
2. A. S. Budagov and L. A. Takhtadzian : A Non-linear One-dimensional Model of Classical Fields Theories with Internal Degrees of Freedom. *Soviet Phys. Dokl.* 22 (1977), 428-430
3. V. G. Drinfeld : Commutative Subring of Certain Noncommutative Rings. *Funct. Anal. and Its Appl.* 11 (1977), 9-12.
4. H. Flaschka : On the Toda Lattice II : *Prog. Theor. Phys.* 51 (1974), 703-716.
5. B. S. Getmanov : New Lorentz-Invariant System with Exact Multi-Soliton Solutions. *JETP. Lett.* 25 (2), (1977), 119-122.
6. I. M. Krichever : Algebraic-geometric Construction of the Zakharov-Shabat Equations and Their Periodic Solutions. *Soviet Math. Dokl.* 17 (1976) 394-397
7. — — : Algebraic Curves and Commuting Matricial Differential Operators. *Funct. Anal. and Its Appl.* 10 (1976), 144-146.
8. — — : Integration of Nonlinear Equations by the Method of Algebraic Geometry. *Funct. Anal. and Its Appl.* 11 (1977), 12-26.
9. P. P. Kulish : Conservation Laws for a String in a Static Field. *Theor. Math. Phys.* 33 (1977), 1016-1018.
10. F. Lund and T. Regge : Unified Approach to Strings and Vortices with Soliton Solutions. *Phys. Rev. D* 14 (1976). 1524-1535.

11. S. V. Manakov : Complete Integrability and Stochastization of Discrete Dynamical Systems. Soviet Phys. JETP. 40 (1974), 269-274.
12. Yu. I. Manin : Matrix Solitons and Bundles over Curves with Singularities, Funct. Anal. and Its Appl. 12 (4) (1978), 53-67. (Russian)
13. A. Nerveu and N. Papanicolaou : Integrability of the Classical $[\bar{\Psi}_i, \Psi_i]_2^2$ and $[\bar{\Psi}_i, \Psi_i]_2^2 - [\bar{\Psi}_i, \gamma \Psi_i]_2^2$ Interactions. Commun. math. Phys. 58(1978), 31-64.
14. S. P. Novikov : The Periodic Problem for the Korteweg - de Vries Equation. Funct. Anal. and Its Appl., 8 (1974), 236-246.
15. K. Pohlmeyer : Integrable Hamiltonian Systems and Interactions through Quadratic Constraints. Commun. math. Phys. 46(1976), 207-221.
16. V. E. Zakharov, L. A. Takhtadzhian, and L. D. Faddeev : Complete Description of Solutions of the "Sine - Gordon" equation. Soviet Phys. Dokl., 19 (1975), 824-826.
17. V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov : Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique. Jour. Exp. and Theor. Phys. 74 (6) (1978), 1953-1973. (Russian)
18. V. E. Zakharov and A. B. Shabat : A Scheme for Integrating the Nonlinear Equations of Mathematical Physics by the Method of Inverse Scattering Problem. I. Funct. Anal. and Its Appl., 8 (1974), 226-235.