

散逸カオス系における半古典論の構築

早稲田大学 理工学部 太田 幸宏,¹ 大場 一郎²

明確なハミルトニアンが存在しない散逸系における量子カオスの問題を一般的に記述する枠組みの構築をおこないたい。そのためまず QSD に基づく半古典的な解析の可能性を探る。モデルとして減衰調和振動子で計算をおこない、枠組みの無矛盾性の確認をする。この枠組みでは散逸系を扱う際に付随して現れるハミルトン系の情報を使い解析をおこなえる可能性がある。

1 序論

量子力学の枠組みの中で熱平衡状態への接近という不可逆過程 [11] や測定による状態の非干渉化を説明するため量子開放系の手法が研究されている。一方、量子カオスの研究では非可積分系の量子化の問題そして古典系の軌道の情報がどのようにその対応する量子系の情報に反映されるかが中心の問題となる [4]。こうして散逸カオス系の量子化では次の二点が主要な問題点となる。第一に明確なハミルトニアンが存在しない古典系の量子化とそこでの量子-古典対応の問題、第二に測定過程による非干渉化と古典的特性であるカオスとの関連の問題である。

量子化された散逸カオス系については様々な研究がなされている。文献 [5] などでは測定過程による非干渉化と量子-古典対応の関連について詳細な議論がなされている。ハミルトン系において重要なモデルである kicked top に散逸効果をいれた dissipative kicked top の研究は文献 [2, 6] などにておこなわれている。またランダム行列理論を散逸系へ適用し、準位統計に関する情報から正則-カオス遷移に関する研究 [6, 8] もなされている。そして近年量子化された散逸系の一例であるダフィン振動子における数値的解析で、正則-カオス遷移や量子-古典のクロスオーバー現象が報告されている [1, 3, 9]。

dissipative kicked top はハミルトン系の場合のように半古典的手法やランダム行列理論を使った解析が進んでおり、その上での数値計算が非常によく行われている。注目すべきことはこの系が散逸効果なしでカオス的特性を持ちうるということである。本研究および文献 [9] では、ダフィン振動子のような、むしろ散逸効果（および周期的な外力）の存在のためそこにカオス的特性を持ちうる系に注目したい。またこうした系に dissipative kicked top の議論を適用するのは非常に困難である。なぜなら dissipative kicked top の議論ではハミルトニアンにその起源をもつユニタリ発展と散逸効果の時間発展がよく分離されていることが仮定されているからである。したがっ

¹E-mail: ota@suou.waseda.jp

²E-mail: ohba@mn.waseda.ac.jp

てこの仮定がよくない散逸効果の存在がカオス発生の本質となる系を量子化した場合についての解析はほぼ数値的なものに限られている。先に述べたようにダフィン振動子に関しては正則-カオス遷移や量子-古典のクロスオーバー現象が報告されている。そこでこうした系の挙動をより深く理解するため、半古典論の構築やランダム行列理論からのアプローチが必要であると思われる。本研究では Quantum State Diffusion (QSD) に基づき半古典論の構築を目指している。本稿ではまず減衰調和振動子を例にこの解析方法について議論する。

2 QSD に基づく量子開放系の記述と経路積分

量子開放系の記述に本稿では現象論的な手法の一つである Quantum State Diffusion (QSD) を採用しよう。量子開放系では純粋状態が混合状態へ時間発展しうる。しかし形式的に QSD では系の時間発展を純粋状態として記述する [3, 12]。

$$d|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle dt - \frac{1}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}|\psi\rangle dt + \hat{L}|\psi\rangle d\xi \quad (1)$$

$$d\xi^* d\xi = dt, \quad d\xi d\xi = 0$$

$d\xi$ は複素ウィナー過程の増分である。 $\hat{H}$ は自己共役演算子でハミルトニアンに対応する。 $\hat{L}$ は任意の演算子でリンドブラッド演算子と呼ばれる。散逸効果は $\hat{L}$ を現象論的に選択することで記述される。式 (1) はリンドブラッド型マスター方程式 [7] と数学的に同等である。この方程式は密度演算子 ρ の性質、 $\text{Tr}\rho = 1$ と正值性 $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0$ for $\forall\psi$ を全ての時刻で満たすマルコフ的な時間発展の一般形（完全正值な力学的半群）である。時間発展のマルコフ性は仮定である。マスター方程式は複素ウィナー過程に対するアンサンブル平均をとることで再現される [3]。この操作を M と書けば、 $M(d\xi) = 0$, $\rho = M(|\psi\rangle\langle\psi|)$, $\text{Tr}(\hat{A}\rho) = M(\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle)$ となる。式 (1) は ψ について線形である。一方 ψ について非線形なバージョンも存在し、それは数値計算において特に威力を発揮する [3]。式 (1) と非線形なものとの最大の違いは、前者は $\|\psi\|^2$ を保存しないのに対し後者は保存するという点である。しかしこのことは $\text{Tr}\rho = 1$ を破るということでない。なぜなら $d\|\psi\|^2 = \text{Re}(\langle\psi|\hat{L}|\psi\rangle d\xi)$ であるからである。

文献 [12] では式 (1) を経路積分で表示した。

$$G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_\xi[x, p] \right] \quad (2)$$

$$S_\xi[x, p] = \int_{t_i}^{t_f} (\dot{x}p - H_{eff}(x, p)) dt - i\hbar \int_{t_i}^{t_f} L(x, p) d\xi(t) \quad (3)$$

ただし $\hat{H}_{eff} = \hat{H} - \frac{i\hbar}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}$ である。なお x に関していわゆる mid-point rule を採用している。式 (2) は Green 関数であり、ベクトルは

$$\psi_\xi(x_f, t_f) = \int G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \quad (4)$$

で表される。ここで初期時刻 $t = t_i$ で系は純粋状態にあるものとした。式 (4) を使って密度演算子は

$$\langle x_f | \rho(t_f) | y_f \rangle = \int M(G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) G_\xi^*(y_f, t_f; y_i, t_i)) \langle x_i | \rho(t_i) | y_i \rangle dx_i dy_i \quad (5)$$

$$M(G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) G_\xi^*(y_f, t_f; y_i, t_i)) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp(\Phi[x, p, y, q]),$$

$$\Phi[x, p, y, q] = \left(\frac{i}{\hbar} (W[x, p] - W^*[y, q]) + \int_{t_i}^{t_f} \delta A(x, p, y, q) dt \right),$$

$$W[x, p] = \int_{t_i}^{t_f} (\dot{x}p - H_{eff}(x, p)) dt,$$

$$\delta A(x, p, y, q) = L(x, p) L^*(y, q)$$

となる。密度演算子の混合性つまり散逸効果の起源は δA という項の存在であり、QSD の定式化ではこの項に確率過程をいれることで密度演算子をベクトルへときほぐしていることになる。

式 (3) を作用と考え最小作用の原理から”軌道”を導出することができる。文献 [12] によれば、

$$dx = \frac{\partial H_{eff}}{\partial p} dt + i\hbar \frac{\partial L}{\partial p} d\xi \quad (6a)$$

$$dp = -\frac{\partial H_{eff}}{\partial x} dt - i\hbar \frac{\partial L}{\partial x} d\xi \quad (6b)$$

となる。mid-point rule を採用していることから式 (6a) はストラトノヴィッチ型確率微分方程式である。一方、式 (6b) は伊藤型確率微分方程式である。しかし $d\xi$ が複素ウィナー過程の増分で $d\xi d\xi = 0$ であることから式 (6a) は伊藤型確率微分方程式になることが示される。式 (6a)(6b) は確率過程に依存する項を除けば複素化したハミルトンの正準方程式である。つまり散逸系に付随してあるハミルトン系が現れることになる。そして状態の混合化を引き起こしうる散逸項の影響は確率過程に関する項に全て押し込められている。リンドブラッド演算子が x, p について線形ならば特にこの項は外力となってしまう。

式 (5) を停留位相の方法で評価しても散逸系を半古典的に扱える。事実 dissipative kicked top を扱った文献 [2, 6] ではそうしている。しかしこれは系の特殊性のため成功したといえよう。一般に密度演算子の表示をとるためには2つの変数が必要になる。各々密度演算子の対角項と干渉項に関連する。このため停留解も2種類存在する。調和振動子の場合にはこの2変数がきれいに分離され計算や解釈がおこないやすい。非線形ポテンシャルの場合はこの2変数が混ざり合って停留解の中に現れるという困難が生ずる。QSD に基づく解析ではそのような問題は生じない。ただこの場合も計算の最後に確率過程についてアンサンブル平均をとる必要があり、それは決して簡単なことではない。

3 減衰調和振動子

減衰調和振動子は停留位相の方法が厳密になるので、この枠組みの無矛盾性のチェックになる。モデルとして

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0}\hat{p}^2 + \frac{m_0\omega_0^2}{2}\hat{x}^2, \quad \hat{L} = \sqrt{2\gamma}\hat{a} = \sqrt{\frac{\gamma m_0\omega_0}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{\gamma}{m_0\omega_0\hbar}}\hat{p}$$

を採用しよう。式 (6a)、(6b) から停留条件を満たす解を求めると、

$$x(t) = x_f\phi_1(t) + x_i\phi_2(t) - \int_{t_i}^{t_f} F_1 G_s(t, s) d\xi(s) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{F_2}{m} G(t, s) d\xi(s) \quad (7a)$$

$$p(t) = mx_f\dot{\phi}_1(t) + mx_i\dot{\phi}_2(t) - \int_{t_i}^{t_f} mF_1 G_{ts}(t, s) d\xi(s) + \int_{t_i}^{t_f} F_2 G_t(t, s) d\xi(s) \quad (7b)$$

ここで、

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_0} \left(1 - i\frac{\gamma}{\omega_0}\right), \quad m\omega = m_0\omega_0, \quad F_1 = -\sqrt{\frac{\gamma\hbar}{m_0\omega_0}}, \quad F_2 = -i\sqrt{\gamma m_0\omega_0\hbar}$$

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sin\omega T} \sin\omega(t - t_i), \quad \phi_2(t) = \frac{1}{\sin\omega T} \sin\omega(t_f - t)$$

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{W}\phi_1(s)\phi_2(t) & (t > s) \\ \frac{1}{W}\phi_1(t)\phi_2(s) & (t < s) \end{cases}$$

$$G_s(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{W}\dot{\phi}_1(s)\phi_2(t) & (t > s) \\ \frac{1}{W}\dot{\phi}_1(t)\phi_2(s) & (t < s) \end{cases}, \quad G_{ts}(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{W}\dot{\phi}_1(s)\dot{\phi}_2(t) & (t > s) \\ \frac{1}{W}\dot{\phi}_1(t)\dot{\phi}_2(s) & (t < s) \end{cases}$$

である。ただし $T = t_f - t_i$ 、 $W = -\omega/\sin\omega T$ とおいた。 ϕ_1 、 ϕ_2 は各々式 (7a)、(7b) の斉次形の素解である。式 (3) を式 (7a)、式 (7b) で評価すると、

$$\begin{aligned} S = & \frac{m\omega}{2\sin\omega T} ((x_f^2 + x_i^2) \cos\omega T - 2x_fx_i) - \frac{i\hbar\gamma}{2}T \\ & + \frac{\sqrt{\hbar}}{\sin\omega T} \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\gamma m\omega} (x_f e^{-i\omega(t-t_i)} - x_i e^{i\omega(t_f-t)}) d\xi(t) \\ & + \frac{\hbar\gamma}{\sin\omega T} \int_{t_i}^{t_f} d\xi(t) \int_{t_i}^t d\xi(s) e^{i\omega(t_f-t)} e^{-i\omega(s-t_i)} \end{aligned} \quad (8)$$

となり、この S を使い Green 関数は

$$G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right) \quad (9)$$

となる。Green 関数のプリファクターはガウス積分をすることにより求めることができる [10]。また以上の計算結果は文献 [12] によるものと一致している。この Green 関数を基にしてこの系が満たすべき時間発展の方程式、つまり QSD の式を導出することもできる。

$$dG_\xi(x, t; x_i, t_i) = \frac{\partial G_\xi}{\partial t} dt + \frac{\delta G_\xi}{\delta \xi(t)} d\xi, \quad d\xi dt = 0$$

に注意すれば簡単に求めることができる。計算の詳細は省略する。

4 まとめ

QSDに基づき開放系の半古典論の手法の構築をするため、停留位相の方法が厳密になる減衰調和振動子について計算をおこなった。この枠組みで散逸項の影響はQSDに含まれる確率過程に関する項になってしまう。リンドブラッド演算子が x と p について線形の場合は停留解の非斉次項へ反映される。斉次形は複素化したハミルトンの正準方程式になっており、したがってハミルトン系の情報を使い散逸系を扱える可能性がある。しかし最終的にオブサーバブルの期待値を計算する際には複素ウィナー過程についてのアンサンブル平均をとる必要があり、その計算は決して容易ではない。課題としては非線形問題への適用と計算すべき量の考察である。計算すべき量としては密度演算子から直接計算することが難しい量を考えるべきである。またそうした量が散逸系の特徴をうまく捉えている必要がある。特に量子論的な散逸率や系の混合性と古典的な運動の間の関係が興味深い。

謝辞

有益な議論および意見をさせていただきました大場教授、中里教授ならび大場・中里研究室の方々に感謝いたします。

参考文献

- [1] H. H. Adamyany, S. B. Manvelyan, and G. Yu. Kryuchyan, Phys. Rev. E **64** (2001), 046219.
- [2] D. Braun, *Dissipative quantum chaos and decoherence*, Springer-Verlag, 2001.
- [3] T. A. Brun, I. C. Percival, and R. Schack, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 2077.
- [4] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer-Verlag, 1990.
- [5] S. Habib, K. Shizume, and W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 4361.
- [6] F. Hakke, *Quantum signatures of chaos*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [7] G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48** (1976), 119.
- [8] B. Mehlig and T. Chalker, J. Math. Phys, **41** (2000), 3233.
- [9] Y. Ota and I. Ohba, in preparation.
- [10] L. S. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, John Wiley Sons, New York, 1981.
- [11] H. Spohn and J. L. Lebowitz, Adv. Chem. Phys. **38** (1978), 109.
- [12] W. T. Strunz, Phys. Rev. A **54** (1996), 2664.